Άρα $\frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{a-\lambda c}\,\frac{a-\lambda c-a+\lambda c+cy_n+d}{y_n-\lambda} \Rightarrow$

$$\frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{a-\lambda c}{(a-\lambda c)(y_n-\lambda)} + \frac{-a+\lambda c+cy_n+d}{(y_n-\lambda)(a-\lambda c)} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{y_n-\lambda} + \frac{-a+\lambda c+cy_n+d}{(y_n-\lambda)(a-\lambda c)}.$$

Έχουμε την εξίσωση $c\lambda^2+\lambda(d-a)-b=0$, λ διπλή ρίζα, άρα

$$\lambda = \frac{a-d}{2c} \Rightarrow a-d = 2\lambda c$$

Άρα $\frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{y_n-\lambda} + \frac{-2\lambda c+\lambda c+cy_n}{(y_n-\lambda)(a-\lambda c)} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{y_n-\lambda} + \frac{-\lambda c+cy_n}{(y_n-\lambda)(a-\lambda c)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{y_n-\lambda} + \frac{c(y_n-\lambda)}{(y_n-\lambda)(a-\lambda c)} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}-\lambda} = \frac{1}{y_n-\lambda} + \frac{c}{a-\lambda c}$$

Θέτουμε $V_n = \frac{1}{y_n-\lambda}$. Τότε $V_{n+1} = \frac{c}{a-\lambda c} + V_n$, $n=0,1,\dots$

Άρα $V_n = V_0 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{c}{a-2c} \Rightarrow V_n = V_0 + \frac{nc}{a-2c}$

Αλλά $V_n = \frac{1}{y_n - 2} \Rightarrow V_0 = \frac{1}{y_0 - 2}$. Άρα $\frac{1}{y_n-2} = \frac{1}{y_0-2} + \frac{nc}{a-2c}$, $n=0,1,\ldots$

Παράδειγμα: Να λύθετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = \frac{6y_n - 4}{y_n + 2}, \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση: Παίρνουμε την εξίσωση $\lambda = \frac{6\lambda - 4}{\lambda + 2} \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$
$(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow$ έχουμε την $\lambda = 2$ διπλή. Παίρνουμε τον λόγο

$$\frac{1}{y_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{6y_n-4}{y_n+2} - 2} = \frac{y_n+2}{6y_n - 4 - 2y_n - 4} = \frac{y_n+2}{4y_n - 8} = \frac{1}{4}\,\frac{y_n+2}{y_n-2}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{y_n - 2 + 4}{y_n - 2} = \frac{1}{4} + \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}(y_n-2)} \Rightarrow \frac{1}{y_{n+1}-2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{y_n - 2}$$

Θέτουμε $v_n = \frac{1}{y_n - 2}$. Άρα παίρνουμε την εξίσωση

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{4} \Rightarrow v_n = v_0 + \frac{1}{4} n \Rightarrow \frac{1}{y_n - 2} = \frac{1}{y_0 - 2} + \frac{n}{4}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Ποιοτική Μελέτη των λύσεων εξισώσεων Διαφορών,

Ορισμός. Μια ακολουθία x_n θετικών αριθμών θα λέμε ότι είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς εάν υπάρχουν αριθμοί $K > 0$ και $M > 0$ τέτοιοι ώστε

$$K \leq x_n \leq M, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση Έστω η την γραμμική εξίσωση

$$x_{n+1} = \frac{a}{c+dx_n}, \quad n=0,1,\cdots$$

όπου a, c, d θετικοί αριθμοί, όπως και το x_0,

Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς

Λύση Ο όρος dx_n, $n=0,1,\cdots$ είναι θετικός Ισχύει ότι

$x_n = \frac{a}{c+dx_{n-1}}$, $n=1,2,\cdots$ Άρα ισχύει ότι $x_n < \frac{a}{c}$, $n=1,2,\cdots$

Παίρνουμε την σχέση $x_n = \frac{a}{c+dx_{n-1}}$. Ισχύει ότι $x_{n-1} < \frac{a}{c}$, $n=2,3,\cdots$

Άρα $x_n > \frac{a}{c+d\cdot\frac{a}{c}}$, $n=2,3,\cdots$ Άρα $x_n > \min\left\{\frac{a}{c+d\frac{a}{c}}, x_1\right\}$

Άρα η x_n φραγμένη από θετικούς αριθμούς

Άσκηση Έστω η εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\ldots, \quad x_0>0, \; x_1>0$$

Θεωρούμε ότι $A>1$. Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς.

Απόδειξη. Ισχύει ότι $x_{n+2} > A$, $n=0,1,\ldots$ Άρα $x_n > A$, $n=2,3,\ldots$.

Επομένως $x_n > \min\{A, x_0, x_1\}$. Παίρνουμε την

$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}$, $n=1,2,\ldots$ Τότε εφόσον $x_n > A$, $n=2,3,\ldots$ ισχύει

ότι $x_{n+1} > A$, $n=1,2,\ldots$ Επομένως $x_{n+2} < A + \frac{x_n}{A}$, $n=1,2,\ldots$.

Θεωρούμε την γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης την οποία:

$$y_{n+2} = \frac{1}{A} y_n + A, \quad n=1,2,\ldots$$

Θέλουμε τη λύση y_n τέτοια ώστε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$

Θα βρούμε πρώτα την γενική λύση της ομογενούς:

$$y_{n+2} - \frac{1}{A} y_n = 0$$

Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 - \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{A}}$.

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς είναι η $c_1\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n$

Θέλουμε να βρούμε και μια μερική λύση της μη ομογενούς:

$y_{n+2} = \frac{1}{A} y_n + A$. Θέτουμε $y_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$ Επομένως

$C = \frac{1}{A} C + A \Rightarrow C\left(1 - \frac{1}{A}\right) = A \Rightarrow C = \frac{A^2}{A-1}$. Άρα η μερική λύση είναι η $\frac{A^2}{A-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι η

$$y_n = c_1\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n + \frac{A^2}{A-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Υπολογίζουμε τα c_1 και c_2 έτσι ώστε $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$.

Εφόσον $A > 1$ ισχύει ότι $\left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n \to 0 \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^n \to 0$, $n \to \infty$

Άρα η y_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό M.

δηλ. $y_n < M$, $n = 1, 2, \ldots$

Έχουμε $$x_3 = A + \frac{x_1}{x_2} < A + \frac{x_1}{A} = A + \frac{y_1}{A} = y_3$$

$$x_4 = A + \frac{x_2}{x_3} < A + \frac{x_2}{A} = A + \frac{y_2}{A} = y_4$$

$$x_5 = A + \frac{x_3}{x_4} < A + \frac{y_3}{A} = y_5$$

και επαγωγικά παίρνουμε $x_n < y_n$, $n = 3, 4, \ldots$ Άρα και η x_n είναι φραγμένη από πάνω από θετικό αριθμό.

Σημεία ισορροπίας.

Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0,1,\ldots, \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ συνεχής}, \qquad (1).$$

Ορισμός. Ένα σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}$ καλείται σημείο ισορροπίας για την (1) εάν ισχύει $\bar{x}=f(\bar{x})$.

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι η $x_n=\bar{x}$, $n=0,1,\ldots$ είναι μια σταθερή λύση της (1).

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης

$$x_{n+1} = 2x_n(1-x_n), \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση: Θέτουμε $x=2x(1-x) \Rightarrow x(1-2(1-x))=0 \Rightarrow x(1-2+2x)=0$

Άρα έχουμε 2 σημεία ισορροπίας τα: $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=\frac{1}{2}$.

Πρόταση. Έστω μια συνάρτηση $f:[a,b]\to[a,b]$. Θεωρούμε ότι η f είναι συνεχής. Τότε η $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$.

Έχουμε $g(a)=f(a)-a\geq 0$, $g(b)=f(b)-b\leq 0$ εφόσον $f:[a,b]\to[a,b]$

Έχουμε ότι η f είναι συνεχής. Άρα υπάρχει $\bar{x}$: $g(\bar{x})=0\Rightarrow$ $f(\bar{x})=\bar{x}$. Επομένως η $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει σημείο ισορροπίας.

Πρόταση: Έστω $I=[a,b]$ και f μια συνεχής συνάρτηση τέτοιοι ώστε $f(I)\supseteq I$. Τότε η εξίσωση $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Απόδειξη. Έχουμε $[a,b]\subseteq f([a,b])$. Άρα υπάρχει $c\in[a,b]$ τέτοιο ώστε $a=f(c)$. Επίσης υπάρχει d: $f(d)=b$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$

Παίρνουμε $g(c)=f(c)-c=a-c\leq 0$. Όμοιως $g(d)=f(d)-d=b-d\geq 0$

Εφόσον η g είναι συνεχής υπάρχει $\bar{x}$ τέτοιο ώστε $g(\bar{x})=0$ $\Rightarrow f(\bar{x})=\bar{x}$.

Σύγκλιση των λύσεων μιας εξίσωσης σε σταθερό ισορροπίας.

Ορισμός: Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης: $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,\ldots$ Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$: $\bar{x}=f(\bar{x})$. Υποθέτουμε ότι κάθε λύση x_n της εξίσωσης συγκλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n\to\infty$ δηλ. $\lim_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$. Τότε το $\bar{x}$ λέγεται ελκυστικό σημείο για την εξίσωση.

Ορισμός. Έστω x_n μια ακολουθία. Θεωρούμε την ακολουθία r_n φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots$. Τότε η ακολουθία x_{r_n}, $n=1,2,\ldots$ είναι μια υπακολουθία της x_n.

Παράδειγμα. Έστω η ακολουθία $x_n = \frac{3+n}{2+n}$, $n=1,2,\ldots$

Θεωρούμε την ακολουθία φυσικών αριθμών $r_n = 2^n$, $n=1,2,\ldots$

Τότε η $x_{r_n} = \frac{3+2^n}{2+2^n}$, $n=1,2,\ldots$ είναι μια υπακολουθία της x_n.

Ορισμός. Ένας αριθμός ℓ καλείται οριακός αριθμός για την ακολουθία x_n εάν υπάρχει υπακολουθία της x_n η οποία να συγκλίνει στον αριθμό ℓ όταν $n\to\infty$.

Ορισμός: Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία x_n. Τότε ο μικρότερος οριακός αριθμός αριθμός της x_n καλείται $\liminf_{n\to\infty} x_n$ και ο μεγαλύτερος οριακός αριθμός της x_n καλείται $\limsup_{n\to\infty} x_n$

Πρόταση Εάν $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ τότε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$

Πρόταση. Έστω x_n για φραγμένη ακολουθία

Τότε $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ εάν:

a) $(\forall \epsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}): \forall n\geq n_0 \quad \ell-\epsilon < x_n$

b). $(\forall m\in\mathbb{N})\ (\exists m_0\geq m): x_{m_0} < \ell+\epsilon.$

Επίσης $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ εάν:

a) $(\forall \epsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N}): \forall n\geq n_0 \quad x_n < L+\epsilon$

b) $(\forall m\in\mathbb{N})(\exists m_0\geq m): \quad L-\epsilon < x_{m_0}$

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι $\ell \leq L$

Άσκηση. Να δείξετε ότι κάθε θετική λύση της

$$x_{n+1} = \frac{a}{c + dx_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

συγκλίνει στο μοναδικό θετικό σημείο ισορροπίας της εξίσωσης.

Λύση. Πρώτα θα δείξουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό θετικό σημείο ισορροπίας. Παίρνουμε $x = \frac{a}{c+dx} \Rightarrow dx^2 + cx = a \Rightarrow$

$dx^2 + cx - a = 0 \Rightarrow x = -\frac{c + \sqrt{c^2+4ad}}{2d}$ ή $\bar{x} = -\frac{c+\sqrt{c^2+4ad}}{2d} > 0$.

Είχαμε δείξει σε προηγούμενη άσκηση ότι κάθε λύση x_n της εξίσωσης είναι φραγμένη από θετικούς αριθμούς. Θέτουμε για μια τυχούσα λύση x_n, $\ell = \lim_{n\to\infty} \inf x_n$ και $L = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$.

Θα δείξουμε ότι $\ell = L$. Ισχύει ότι $\ell \le L$.

Εφόσον $\ell = \liminf_{n\to\infty} x_n$ και $L = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ισχύουν τα εξής:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_1\in\mathbb{N})$: $\forall n \geq n_1$ $\ell-\epsilon < x_n$.

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_2\in\mathbb{N})$: $\forall n \geq n_2$: $x_n < L+\epsilon$.

Παίρνουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ Τότε έχουμε:

$(\forall \epsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})$ $\forall n \geq n_0$: $\ell-\epsilon < x_n < L+\epsilon$.

Παίρνουμε ένα $m\in\mathbb{N}$: $m \geq n_0+1$. Τότε υπάρχει $K\in\mathbb{N}$: $K \geq m$

Τέτοιος ώστε $x_K < \ell+\epsilon$. Αλλά $x_K = \dfrac{a}{c+dx_{K-1}}$. Επομένως

$\dfrac{a}{c+dx_{K-1}} < \ell+\epsilon$. Έχουμε $K-1 \geq m-1 \geq n_0$, άρα $x_{K-1} < L+\epsilon$

Επομένως $\dfrac{a}{c+d(L+\epsilon)} < \dfrac{a}{c+dx_{K-1}} < \ell+\epsilon \Rightarrow \dfrac{a}{c+d(L+\epsilon)} < \ell+\epsilon$

Για $\epsilon\to 0$ παίρνουμε την σχέση: $\dfrac{a}{c+dL} \leq \ell$.

Παίρνουμε $s \in \mathbb{N}$, $s \geq n_0+1$. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{N}$, $r \geq s \geq n_0+1$ τέτοιος ώστε $L-\epsilon \leq x_r = \frac{a}{c+dx_{r-1}}$. Επειδή $r-1 \geq n_0$ έχουμε

ότι $\ell-\epsilon < x_{r-1}$. Άρα $L-\epsilon \leq x_r = \frac{a}{c+dx_{r-1}} < \frac{a}{c+d(\ell-\epsilon)}$

$\Rightarrow L-\epsilon < \frac{a}{c+d(\ell-\epsilon)}$. Παίρνουμε το $\epsilon \to 0$. Τότε

$$L \leq \frac{a}{c+d\ell}.$$

Παίρνουμε: $\frac{a}{c+dL} \leq \ell$ και $L \leq \frac{a}{c+d\ell} \Rightarrow$

$\frac{aL}{c+dL} \leq \ell L$ και $\ell L \leq \frac{a\ell}{c+d\ell} \Rightarrow \frac{\alpha L}{c+dL} \leq \frac{\alpha \ell}{c+d\ell} \Rightarrow$

$cL + d\ell L \leq c\ell + d\ell L \Rightarrow c(L-\ell) \leq 0 \Rightarrow L \leq \ell \Rightarrow L = \ell$.

Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Από την εξίσωση $x_{n+1} = \frac{a}{c+dx_n}$ παίρνουμε $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{a}{c+d\lim_{n\to\infty} x_n}$

Άρα $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$. Επομένως το $\bar{x}$ ελκυστικό σημείο για την εξίσωση

Άσκηση Δίνεται η μη γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad n=0,1,\ldots$$

όπου x_0, x_1 είναι θετικοί αριθμοί και $A>1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ και κάθε θετική λύση x_n της εξίσωσης συγκλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n\to\infty$.

Λύση Παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση $\bar{x} = A + \frac{\bar{x}}{\bar{x}} = A+1$

Άρα είναι προφανές ότι η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x} = A+1$

Θα δείξουμε ότι κάθε λύση x_n συγκλίνει στο $\bar{x}$ όταν $n\to\infty$.

Σε προηγούμενη άσκηση είχαμε δείξει ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς

Άρα $l = \liminf x_n > 0$ και $\limsup_{n\to\infty} x_n = L < \infty$.

$(\forall \epsilon>0)\ (\exists\ n_0\in\mathbb{N}):\ \forall n\geq n_0:\quad \ell-\epsilon<x_n<L+\epsilon$

$\forall m\in\mathbb{N}\ \ \exists\ m_1\geq m$ ΤΈΤΟΙΟ ΏΣΤΕ $x_{m_1}<\ell+\epsilon$

$\forall m\in\mathbb{N}\ \ \exists\ m_2\geq m$ ΤΈΤΟΙΟ ΏΣΤΕ $L-\epsilon<x_{m_2}$

Παίρνουμε το $m=n_0+2$. Τότε υπάρχει $m_1\geq m=n_0+2$ ΤΈΤΟΙΟ ΏΣΤΕ

$x_{m_1}<\ell+\epsilon$ ΙΣΧΎΕΙ $x_{m_1}=A+\dfrac{x_{m_1-2}}{x_{m_1-1}}$

Έχουμε $m_1-2\geq n_0$ και $m_1-1\geq n_0\Rightarrow \ell-\epsilon<x_{m_1-2}<L+\epsilon$

και $\ell-\epsilon<x_{m_1-1}<L+\epsilon$. Άρα

$$A+\frac{\ell-\epsilon}{L+\epsilon}<A+\frac{x_{m_1-2}}{x_{m_1-1}}<\ell+\epsilon\Rightarrow A+\frac{\ell-\epsilon}{L+\epsilon}<\ell+\epsilon$$

Παίρνουμε $\epsilon\to 0$, ΤΌΤΕ $A+\dfrac{\ell}{L}\leq\ell$.

Παίρνουμε το $m = n_0 + 2$ τότε υπάρχει $m_2 \geq m = n_0 + 2$ τέτοιο ώστε

$$L - \epsilon < x_{m_2} = A + \frac{x_{m_2 - 2}}{x_{m_2 - 1}} < A + \frac{L + \epsilon}{\ell - \epsilon}$$

Άρα $L - \epsilon < A + \frac{L + \epsilon}{\ell - \epsilon}$. Παίρνουμε $\epsilon \to 0$. Άρα

$$L \leq A + \frac{L}{\ell}$$

Παίρνουμε τις ανισότητες: $A + \frac{\ell}{L} \leq \ell$ και $L \leq A + \frac{L}{\ell}$

Άρα $AL + \ell \leq \ell L$ και $L\ell \leq A\ell + L$: Τότε $AL + \ell \leq A\ell + L$

Επομένως $A(L - \ell) + \ell - L \leq 0 \Rightarrow (L - \ell)(A - 1) \leq 0 \Rightarrow L - \ell \leq 0$ διότι $A > 1$. Άρα $L \leq \ell$. Ισχύει ότι $\ell \leq L$. Επομένως $\ell = L$.

Άρα υπάρχει το $\lim_{n \to \infty} x_n$. Έχουμε $x_{n+2} = A + \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} x_{n+2} = A + \frac{\lim_{n \to \infty} x_n}{\lim_{n \to \infty} x_{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = A + 1.$$

Άσκηση. Δίνεται η εξίσωση

$$x_{n+1} = \frac{a + b x_n}{c + d x_n^2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

όπου $x_0 > 0$, a, b, c, d θετικοί αριθμοί και $\frac{b}{c} < 1$.

Να δείξετε ότι κάθε λύση x_n της εξίσωσης είναι φραγμένη από πάνω και από κάτω από θετικούς αριθμούς.

Λύση. Έχουμε $x_{n+1} = \frac{a + b x_n}{c + d x_n^2} \leq \frac{a + b x_n}{c} \Rightarrow$

$$x_{n+1} \leq \frac{b}{c} x_n + \frac{a}{c}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Παίρνουμε την γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης:

$$y_{n+1} = \frac{b}{c} y_n + \frac{a}{c}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Η λύση της ομογενούς $y_{n+1} = \frac{b}{c} y_n$ είναι η $\left(\frac{b}{c}\right)^n K$, $K > 0$

θα βρούμε και μια μερική λύση της μη ομογενούς: $y_{n+1} = \frac{b}{c} y_n + \frac{a}{c}$

Θέτουμε $y_n = \Lambda$. Τότε $\Lambda = \frac{b}{c}\Lambda + \frac{a}{c} \Rightarrow \Lambda\left(1 - \frac{b}{c}\right) = \frac{a}{c}$

$\Rightarrow \Lambda = \frac{a}{c-b}$

Επομένως η γενική λύση της μη ομογενούς είναι η

$$y_n = K\left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{a}{c-b}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Παίρνουμε την λύση τέτοια ώστε $y_0 = x_0$. Τότε εφόσον $\frac{b}{c} < 1$ έχουμε ότι $\left(\frac{b}{c}\right)^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Άρα υπάρχει αριθμός $M > 0$ τέτοιος ώστε $y_n < M$, $n = 1, 2, \ldots$

Άρα $n = 0$ έχουμε $x_1 \le \frac{b}{c}x_0 + \frac{a}{c} = \frac{b}{c}y_0 + \frac{a}{c} = y_1$

$x_2 \le \frac{b}{c}x_1 + \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}y_1 + \frac{a}{c} = y_2$

$x_n \le y_n < M$

Άρα η x_n φραγμένη από πάνω από το M. δηλ. $x_n \le M$, $n = 1, 2, \ldots$

Θα δείξουμε ότι είναι και φραγμένη από κάτω από θετικό αριθμό. Έχουμε

$$x_n = \frac{a + b x_{n-1}}{c + d x_{n-1}^2} > \frac{a}{c + d x_{n-1}^2}. \qquad \text{Ισχύει } x_n < M,\ n \geq 1$$

Άρα $x_{n+1} < M$, $n \geq 2$. Επομένως $x_n > \frac{a}{c + d M^2}$, $n \geq 2$

Τότε $x_n > \min\left\{\frac{a}{c+dM^2}, x_0, x_1\right\}$

Παρατήρηση Είδαμε ότι η γενική λύση της $y_{n+1} = \frac{b}{c} y_n + \frac{a}{c}$ είναι η $y_n = -K\left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{a}{c-b}$. Θέλουμε τη λύση $y_0 = x_0$

Τότε $y_0 = K + \frac{a}{c-b} \Rightarrow K = y_0 - \frac{a}{c-b}$. Άρα $y_n = \left(x_0 - \frac{a}{c-b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{a}{c-b}$

Εάν $x_0 > \frac{a}{c-b}$, τότε $y_n < x_0 - \frac{a}{c-b} + \frac{a}{c-b} = x_0$

Εάν $x_0 < \frac{a}{c-b}$ τότε $y_n < \frac{a}{c-b}$. Επομένως $y_n < M = \max\left\{x_0, \frac{a}{c-b}\right\}$.

Άσκηση: Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = \frac{a x_n^r + b}{c x_n^{r-1} + d}$, $n=0,1,\dots, x_0>0$,

$r\in\mathbb{N}$, $r\geq 2$, $a,b,c,d>0$ και $\frac{a}{c}<1$.

Να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης είναι φραγμένη από κάτω και από πάνω από θετικούς αριθμούς.

Λύση: Γράφουμε $x_{n+1} = \frac{a x_n^r}{c x_n^{r-1}+d} + \frac{b}{c x_n^{r-1}+d} < \frac{a x_n^r}{c x_n^{r-1}} + \frac{b}{d}$

Τότε $x_{n+1} < \frac{a}{c} x_n + \frac{b}{d}$. Μπορούμε να εργαστούμε όπως στις προηγούμενες ασκήσεις. Θεωρούμε την εξίσωση γραμμική

$$y_{n+1} = \frac{a}{c} y_n + \frac{b}{d}, \quad n=0,1,\dots.$$

Η γενική λύση της ομογενούς είναι η $K\left(\frac{a}{c}\right)^n$, $K>0$

Θα βρούμε και τη μερική λύση της μη ομογενούς: Θέτουμε

$$\Lambda = \frac{a}{c}\Lambda + \frac{b}{d} \Rightarrow \left(1-\frac{a}{c}\right)\Lambda = \frac{b}{d} \Rightarrow \Lambda = \frac{cb}{d(c-a)}$$

Άρα $y_n = k\left(\frac{a}{c}\right)^n + \frac{cb}{d(c-a)}$, $n=0,1,\ldots$

Θέλουμε την λύση: $y_0 = x_0$. Ισχύει ότι $\frac{a}{c} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{c}\right)^n = 0$

Άρα η y_n φραγμένη από πάνω δηλ. υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε

$$y_n < M,\ n=1,2,\ldots$$

Ισχύει $x_{n+1} < \frac{a}{c}x_n + \frac{b}{d}$, $n=0,1,\ldots$

$$x_1 < \frac{a}{c}x_0 + \frac{b}{d} = \frac{a}{c}y_0 + \frac{b}{d} = y_1$$

$$x_2 < \frac{a}{c}x_1 + \frac{b}{d} < \frac{a}{c}y_1 + \frac{b}{d} = y_2$$

και επαγωγικά

$$x_n < y_n < M,\ n=1,2,\ldots$$

Θα δείξουμε ότι είναι φραγμένη από κάτω από θετικό αριθμό:

$$x_n = \frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+d} > \frac{b}{cx_{n-1}+d} > \frac{b}{cM+d},\ n=2,3,\ldots$$

Πρόταση: Έστω $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι η f είναι φθίνουσα και θεωρούμε ότι $f:[a,b]\to[a,b]$. Θεωρούμε επίσης ότι το αλγεβρικό σύστημα $M=f(m)$, $m=f(M)$ έχει μοναδική λύση $m=M=\bar{x}$ όπου $\bar{x}$ το μοναδικό σταθερό ισορροπίας της $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,..$ Τότε κάθε λύση της $x_{n+1}=f(x_n)$ με $x_{n_0}\in[a,b]$ για κάποιο n_0 έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n=\bar{x}$.

Απόδειξη. Παίρνουμε $a=m_0$, $b=M_0$. Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών $m_{i+1}=f(M_i)$, $M_{i+1}=f(m_i)$, $i=0,1,..$

Ισχύει $m_0\le M_0$. Έχουμε $m_1=f(M_0)\le f(m_0)=M_1 \Rightarrow m_1\le M_1$

Έχουμε $m_0\le m_1\le M_1\le M_0$

Παίρνουμε $m_2=f(M_1)\le f(m_1)=M_2 \Rightarrow m_2\le M_2$

Έχουμε $m_2=f(M_1)\ge f(M_0)=m_1$. Επίσης $M_2=f(m_1)\le f(m_0)=M_1\Rightarrow M_2\le M_1$

Άρα έχουμε την διάταξη: $m_0\le m_1\le m_2\le M_2\le M_1\le M_0$

Επαγωγικά έχουμε ότι

$$m_0 \le m_1 \le m_2 \le \dots \le m_n \le M_n \le \dots \le M_2 \le M_1 \le M_0$$

Η ακολουθία $m_n \in [a,b]$ και είναι και αύξουσα. Άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} m_n = m$. Επίσης η M_n είναι φθίνουσα, άρα υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} M_n = M$

Έχουμε το ισοτηκα $m_{k+1} = f(M_k)$ και $M_{k+1} = f(m_k)$ Άρα

$\lim_{k\to\infty} m_{k+1} = f(\lim_{k\to\infty} M_k)$ και $\lim_{k\to\infty} M_{k+1} = f(\lim_{k\to\infty} m_k)$ Επομένως

$m = f(M)$ και $M = f(m)$. Από την υπόθεση έχουμε $m = M = \bar{x}$.

Έστω x_n για άλση της ενίσχυσης $x_{n+1} = f(x_n)$ τέτοια ώστε για κάποιο n_0 να έχουμε $x_{n_0} \in [a,b]$. Άρα επειδή f φθίνουσα

$$m_0 \le x_{n_0} \le M_0 \Rightarrow f(M_0) \le f(x_{n_0}) \le f(m_0) \Rightarrow$$

$$m_1 \le x_{n_0+1} \le M_1 \Rightarrow f(M_1) \le f(x_{n_0+1}) \le f(m_1) \Rightarrow m_2 \le x_{n_0+2} \le M_2$$

και επαγωγικά έχουμε $m_n \le x_{n_0+n} \le M_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m_n \le \lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} \le \lim_{n\to\infty} M_n$

Εφόσον $\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \bar{x}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} x_{n_0+n} = \bar{x}$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

Άσκηση. Έστω η ακολουθία

$$x_{n+1} = \frac{a\, e^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}}, \quad n=0,1,\ldots \quad a,c \in (0,\infty)$$

και $0<a\cdot c<4$. Να δείξετε ότι κάθε λύση x_n της εξίσωσης συγκλίνει στο μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Λύση. Εδώ έχουμε $f(x) = \frac{a\, e^{b-cx}}{1+e^{b-cx}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{ca\, e^{b-cx}}{(1+e^{b-cx})^2} < 0$

Επομένως η συνάρτηση f είναι φθίνουσα. Θα βρούμε ένα διάστημα $[a_1, b_1]$ τέτοιο ώστε $f:[a_1,b_1]\to[a_1,b_1]$ Είναι προφανές ότι $f(x)\le a$. Παίρνουμε $x\le a \Rightarrow f(x)\ge f(a) = \frac{a\, e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}$

Άρα παίρνουμε $a_1 = \frac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}$, $b_1 = a$. Τότε το

$I = \left[\frac{a e^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right]$. Ισχύει $f: I \to I$. Άρα η $x_{n+1} = f(x_n)$

έχει μοναδικό σταθερό ισορροπίας $\bar{x} \in I$. Παίρνουμε το

αλγεβρικό σύστημα $m = f(M)$ και $M = f(m)$:

$m = \frac{a e^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}$, $M = \frac{a e^{b-cm}}{1+e^{b-cm}}$. Άρα

$M - m = \frac{a e^{b-cm}}{1+e^{b-cm}} - \frac{a e^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής

$M - m = -\frac{ca e^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}(m-M)$ όπου το ξ σταθερό μεταξύ του m και M.

Επομένως $|M-m| = \frac{ca e^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}|M-m|$.

Θα δείξουμε ότι $\frac{e^{b-c\}}}{(1+e^{b-c\}})^2} < \frac{1}{4} \Rightarrow 4e^{b-c\}} < 1+e^{2(b-c\})} + 2e^{b-c\}}$

$\Rightarrow 0 < 1-2e^{b-c\}} + e^{2(b-c\})} \Rightarrow 0 < (1-e^{b-c\}})^2$. Άρα ισχύει ότι

$\frac{e^{b-c\}}}{(1+e^{b-c\}})^2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{ac\,e^{b-c\}}}{(1+e^{b-c\}})^2} < 1$ εφόσον $ac<4$. Επομένως

$M = m = \bar{x}$. Επομένως εάν x_n είναι λύση της εξίσωσης

$x_{n+1} = f(x_n)$ με $x_0 \in \left[\frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right]$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

Θα δείξουμε ότι για κάθε λύση x_n της εξίσωσης ισχύει $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

Έχουμε $x_{n+1} = f(x_n) = \frac{ae^{b-cx_n}}{1+e^{b-cx_n}}$, $n=0,1,\ldots$ Άρα $x_{n+1} \le a$, $n=0,1,\ldots$

Επομένως $x_n \le a$, $n=1,2,\ldots$. Εφόσον η f φθίνουσα ισχύει ότι

$f(x_n) \ge f(a) = \frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}$, άρα $x_{n+1} \ge \frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}} \Rightarrow x_n \ge \frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}$, $n \ge 2$

Άρα $x_n \in \left[\frac{ae^{b-ca}}{1+e^{b-ca}}, a\right]$, $n \ge 2$. Τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Παρατήρηση Έχουμε $f(x)=\frac{ae^{b-cx}}{1+e^{b-cx}}$ είναι συνεχής με συνεχή πρώτη παράγωγο. Ισχύει ότι υπάρχει αριθμός ξ μεταξύ του m και M τέτοιος ώστε

$$f(m)-f(M)=f'(\xi).(m-M). \quad \text{Άρα}$$

$$\frac{ae^{b-cm}}{1+e^{b-cm}}-\frac{ae^{b-cM}}{1+e^{b-cM}}=-\frac{cae^{b-c\xi}}{(1+e^{b-c\xi})^2}(m-M).$$

Άσκηση. Έστω η μη γραμμική εξίσωση

$$x_{n+1} = ax_n + (b + cx_n)e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Υποθέτουμε ότι $0 < a, c < 1$, $b > 1$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $\bar{x}$.

Λύση. Θέλουμε να βρούμε $\bar{x} = a\bar{x} + (b + c\bar{x})e^{-\bar{x}}$. Θεωρούμε

τη συνάρτηση $F(x) = ax + (b + cx)e^{-x}$ και $G(x) = F(x) - x$.

Παίρνουμε $G(0) = F(0) - 0 = b > 0$. Γράφουμε

$$G(x) = ax + (b + cx)e^{-x} - x = (a-1)x + (b + cx)e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} G(x) =$$

$(a-1)\infty + 0 = -\infty$. Άρα υπάρχει $\bar{x}$ τέτοιο ώστε $G(\bar{x}) = 0$.

Θα δείξουμε ότι η G είναι φθίνουσα. Παίρνουμε

$$G'(x) = a - 1 + \left(c(1-x) - b\right)e^{-x}.$$

Εάν $x \geq 1$ τότε $G'(x) < 0$.

Εάν $x < 1$ έχουμε $c(1-x) < 1$ διότι $0 < c < 1$. Εφόσον $b > 1$ έχουμε $c(1-x) - b < 0$.

Άρα $G'(x) < 0$. Επομένως G φθίνουσα. Άρα το $\bar{x}$ μοναδικό σημείο τέτοιο ώστε $G(\bar{x}) = 0$.

Ευστάθεια Εξισώσεων Διαφορών Πρώτης Τάξης

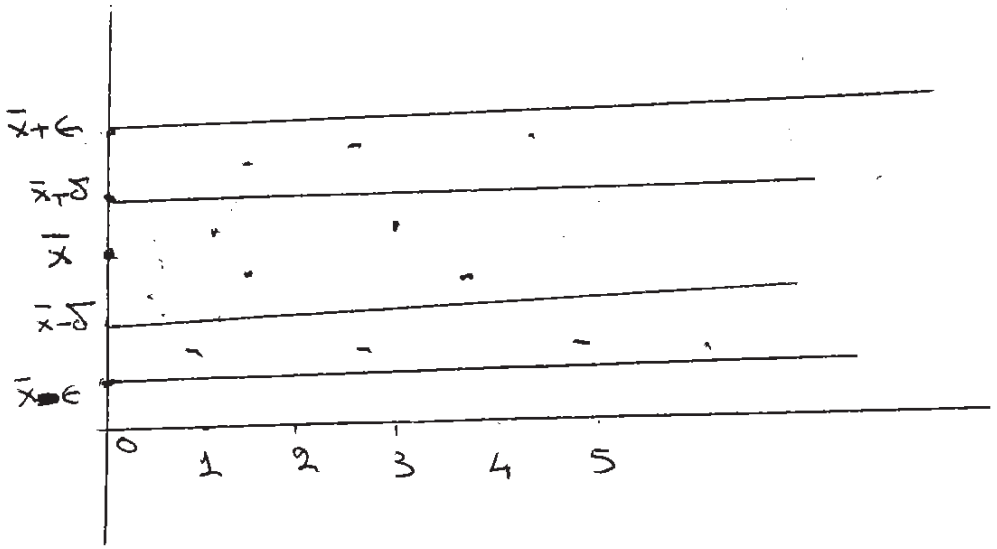
Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\dots$ Θεωρούμε ένα $x_0 \in \mathbb{R}$.

Τότε $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, άρα $x_2 = f^{(2)}(x_0) = f \circ f(x_0)$. κ.ο.κ.

$x_n = f^{(n)}(x_0)$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την λύση x_n ενώ άρτιση του x_0, $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $x_n(x_0)$.

Ορισμός. Θεωρούμε την εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,\dots$ Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει ένα σημείο ισορροπίας του $\bar{x}$ δηλ. $\bar{x} = f(\bar{x})$. Θα λέμε ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την εξίσωση εάν $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon))$: $\forall x_0$: $|\bar{x} - x_0| < \delta$ να έχουμε $|x_n - \bar{x}| < \epsilon$, $n \geq 0$ όπου $\bar{x} = f(\bar{x})$. Θεωρούμε ότι $\bar{x}(x_0) = \bar{x}$ επίσης $x_n(\bar{x}) = \bar{x}$, $n \geq 0$

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon))$: $\forall x_0$: $|\bar{x} - x_0| < \delta$ να έχουμε $|x_n(x_0) - x_n(\bar{x})| < \epsilon$, $n \geq 0$



Ορισμός: Το $\bar{x}$ είναι τοπικά ελκυστικό σημείο εάν υπάρχει αριθμός $\eta>0$ τέτοιος ώστε για κάθε x_0: $|\bar{x}-x_0|<\eta$ να έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n(x_0)=\bar{x}$

Ορισμός: Το $\bar{x}$ καλείται τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και τοπικά ελκυστικό σημείο.

Ορισμός. Το $\bar{x}$ καλείται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν είναι ευσταθές και κάθε λύση της εξίσωσης συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας όταν $n\to\infty$.

Πρόταση. Έστω $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $x_{n+1}=f(x_n)$ έχει ένα σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$. Τότε εάν

$$|f'(\bar{x})|<1$$

το $\bar{x}$ είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για την εξίσωση, ενώ εάν

$$|f'(\bar{x})|>1$$

τότε το $\bar{x}$ είναι ασταθές

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $|f'(\bar{x})|<1$. Υπάρχει κάποιος αριθμός $M>0$ τέτοιος ώστε $|f'(\bar{x})|<M<1$. Υποθέσαμε ότι η f' είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα υπάρχει περιοχή $I=(\bar{x}-c,\bar{x}+c)$ τέτοια ώστε για κάθε $x\in I$ να έχουμε $|f'(x)|<M$.

Παίρνουμε ένα τυχαίο $x_0 \in I = (\bar{x}-c, \bar{x}+c)$ Έχουμε την εξίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$, τότε $x_1 = f(x_0)$, επίσης εφόσον το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας ισχύει $\bar{x} = f(\bar{x})$, ισχύει

$x_1 - \bar{x} = f(x_0) - f(\bar{x})$. Αλλά η f' είναι συνεχής συνάρτηση. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής: Θα υπάρχει κάποιο σημείο ξ_1 το οποίο είναι μεταξύ του x_0 και του $\bar{x}$ έτσι ώστε:

$x_1 - \bar{x} = f(x_0) - f(\bar{x}) = f'(\xi_1)(x_0 - \bar{x})$. Τότε $|x_1 - \bar{x}| = |f'(\xi_1)|\,|x_0 - \bar{x}|$ Είναι προφανές ότι $\xi_1 \in I$. Επομένως

$$|x_1 - \bar{x}| < M\,|x_0 - \bar{x}| \quad \text{διότι} \quad |f'(\xi_1)| < M < 1.$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$x_2 - \bar{x} = f(x_1) - f(\bar{x}) = f'(\xi_2)(x_1 - \bar{x})$ όπου το ξ_2 είναι μεταξύ του x_1 και $\bar{x}$ άρα $\xi_2 \in I$. Επομένως $|x_2 - \bar{x}| = |f'(\xi_2)|\,|x_1 - \bar{x}| < M|x_1 - \bar{x}| < M^2 |x_0 - \bar{x}|$

Εργαζόμενοι επαγωγικά βρίσκουμε ότι

$$|x_n - \bar{x}| < M^n |x_0 - \bar{x}|, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Έχουμε ότι το $M < 1$, επομένως $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$. Τότε $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Άρα το $\bar{x}$ είναι τοπικά ελκυστικό σημείο διότι το $x_0 \in (\bar{x}-c, \bar{x}+c)$

Θα δείξουμε τώρα ότι είναι και ευσταθές το $\bar{x}$.

Παίρνουμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \min\{\epsilon, c\}$.

Τότε για το $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \min\{\epsilon, c\}$ τέτοιο για κάθε x_0: $|x_0 - \bar{x}| < \delta$ να έχουμε $|x_n - \bar{x}| < M^n |x_0 - \bar{x}| < |x_0 - \bar{x}| < \epsilon$

Άρα το $\bar{x}$ είναι και ευσταθές. Άρα το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Υποθέτουμε τώρα ότι $|f'(\bar{x})|>1$. Θα δείξουμε ότι το $\bar{x}$ είναι ασταθές:

$(\exists \epsilon>0)$: $\forall \delta>0$ να υπάρχει x_0 : $|x_0-\bar{x}|<\delta$ τέτοιο ώστε

$|x_n-\bar{x}|\geq\epsilon$ για κάποιο n.

Από την υπόθεση η f' είναι συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(\bar{x})|>M>1$ Τότε θα υπάρχει περιοχή $I=(\bar{x}-c, \bar{x}+c)$ έτσι ώστε για κάθε $x\in I$ να έχουμε $|f'(x)|>M>1$. Εφόσον $M>1$ τότε $\lim_{n\to\infty} M^n=\infty$ Άρα εάν $x_0\in I$ θα υπάρχει κάποιο $K\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $M^K|x_0-\bar{x}|>c$

Παίρνουμε την ακολουθία $x_n=x_n(x_0)$ Υποθέτουμε πρώτα ότι τα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}\in I$. Έχουμε πάλι με το θεώρημα μέσης τιμής:

$x_1-\bar{x}=f(x_0)-f(\bar{x})=f'(\xi_1)(x_0-\bar{x})$, ξ_1 σημείο μεταξύ του x_0 και του $\bar{x}$.

Άρα $|x_1-\bar{x}|=|f'(\xi_1)|\cdot|x_0-\bar{x}|$ Εφόσον το ξ_1 μεταξύ του x_0 και του $\bar{x}$, ισχύει $\xi_1\in I$

Άρα $|x_1-\bar{x}| = |f(\xi_1)||x_0-\bar{x}| > M|x_0-\bar{x}|$. Ομοίως

βρίσκουμε ότι $|x_2-\bar{x}| > M|x_1-\bar{x}| > M^2|x_0-\bar{x}|$ επαγωγικά

βρίσκουμε ότι $|x_k-\bar{x}| = |f(x_{k-1})-f(\bar{x})| > M^k|x_0-\bar{x}| > C$

Εδώ παίρνουμε $\epsilon = C$ και $n=k$ άρα εάν $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in I$

έχουμε αστάθεια του $\bar{x}$ Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει κάποιο

$j \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ τέτοιο ώστε $x_j \notin I$ Τότε έχουμε $|x_j-\bar{x}| \geq C$

πάλι έχουμε αστάθεια με $\epsilon = C$, και $n=j$.

Άσκηση Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \,, \quad \lambda \in (0, 2]$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους.

Λύση. Εδω $f(x) = 1 - \lambda x^2$. Θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας:

Θέτουμε $x = 1 - \lambda x^2 \Rightarrow \lambda x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$ και $\bar{x}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$

Παίρνουμε πρώτα το $\bar{x}_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$. Παίρνουμε την $f'(x) = -2\lambda x$

Άρα $f'(\bar{x}_1) = -2\lambda \left(\frac{-1 - \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \right) = 1 + \sqrt{1+4\lambda} > 1$. Άρα το $\bar{x}_1$ ασταθές.

Παίρνουμε τώρα το $\bar{x}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda}$. Έχουμε ότι $f'(\bar{x}_2) = -2\lambda \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4\lambda}}{2\lambda} \right)$

$= 1 - \sqrt{1+4\lambda}$. Για να ευσταθές το $\bar{x}_2$ θα πρέπει $|f'(\bar{x}_2)| < 1$

άρα $|1 - \sqrt{1+4\lambda}| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1 \Rightarrow -2 < -\sqrt{1+4\lambda}$ και $1 - \sqrt{1+4\lambda} < 1$

άρα θέλουμε $-2 < -\sqrt{1+4\lambda} \Rightarrow \sqrt{1+4\lambda} < 2 \Rightarrow 1 + 4\lambda < 4 \Rightarrow \lambda < \frac{3}{4}$

Άρα εάν $0<\lambda<\frac{3}{4}$ το $\bar{x}_2$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Εαν $\lambda>\frac{3}{4}$ τότε το $\bar{x}_2$ αστάθες.

Πρόταση Έστω η εξίσωση $x_{n+1}=f(x_n)$ και $\bar{x}$ ένα σημείο ισορροπίας. Θεωρούμε ότι $f'(\bar{x})=1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι f', f'' και f''' και είναι και συνεχείς συναρτήσεις

Τότε

α) εάν $f''(\bar{x})\neq 0$ τότε το $\bar{x}$ αστάθες

β) εάν $f''(\bar{x})=0$ και $f'''(\bar{x})<0$ τότε το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

γ) εάν $f''(\bar{x})=0$ και $f'''(\bar{x})>0$ τότε το $\bar{x}$ αστάθες

Άσκηση Έστω η εξίσωση $x_{n+1} = x_n - x_n^3$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους.

Λύση Πρώτα θα βρούμε τα σημεία ισορροπίας: Παίρνουμε

$x = x - x^3 \Rightarrow \bar{x} = 0$ έχουμε μοναδικό σημείο ισορροπίας το $\bar{x} = 0$.

Παίρνουμε $f(x) = x - x^3 \Rightarrow f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(\bar{x}) = 1$.

Παίρνουμε $f''(x) = -6x \Rightarrow f''(\bar{x}) = 0$. Παίρνουμε $f'''(x) = -6 \Rightarrow$

$f'''(\bar{x}) = -6 < 0$, άρα το $\bar{x} = 0$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Τέλος υποθέτουμε ότι $f'(\bar{x}) = -1$. Ορίζουμε για την $f(x)$ την παράγωγο του Schwarz ως εξής:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \Rightarrow Sf(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2 \text{ όταν}$$

$f'(\bar{x}) = -1$.

Πρόταση: Έστω η επίσωση $x_{n+1} = f(x_n)$ και $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας της επίσωσης. Υποθέτουμε ότι $f'(\bar{x}) = -1$ και υπάρχουν οι f', f'', f''' και είναι και συνεχείς συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα εξής:

a) Εάν $Sf(\bar{x}) < 0$ το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές

b) Εάν $Sf(\bar{x}) > 0$ τότε το $\bar{x}$ αστατθές.

..... Θα αποδείξουμε ότι εάν $Sf(\bar{x})<0$ τότε το $\bar{x}$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Θα χρειασθούμε το παρακάτω λήμμα

Λήμμα Έστω η εξίσωση

$$x_{n+1}=f(x_n). \qquad (A)$$

όπου η f συνεχής συνάρτηση. Έστω ότι η (A) έχει σημείο ισορροπίας το $\bar{x}$ δηλ $\bar{x}=f(\bar{x})$. Παίρνουμε τη συνάρτηση $g=fof=f^{(2)}$ και την εξίσωση

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad (B)$$

Έχουμε α) Το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (B)

β) Εάν το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B) θα είναι ευσταθές και για την (A).

Απόδειξη Το $\bar{x}$ είναι σημείο ισορροπίας για την (A) δηλ $\bar{x}=f(\bar{x})$. Θα δείξουμε ότι το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (B) δηλ. $g(\bar{x})=\bar{x}$ Παίρνουμε $g(\bar{x})=fof(\bar{x})=f(f(\bar{x}))=f(\bar{x})=\bar{x}$ άρα το $\bar{x}$ σημείο ισορροπίας για την (B).

Υποθέτουμε ότι το $\bar{x}$ είναι ευσταθές για την (B): $x_{n+1}=g(x_n)$

Τότε ισχύει

$(\forall \varepsilon>0)(\exists\, \delta(\varepsilon))$: $\forall x_0$: $|x_0-\bar{x}|<\delta$ να έχουμε $|f^{(2n)}(x_0)-\bar{x}|<\varepsilon$.

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$(\forall \varepsilon>0)(\exists\, \eta(\varepsilon))$: $\forall x_0$: $|x_0-\bar{x}|<\eta$ να έχουμε $|f^{(2n+1)}(x_0)-\bar{x}|<\varepsilon$

Έχουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα για το $\delta>0$ υπάρχει κάποιο $\eta>0$ τέτοιο ώστε για x_0: $|x_0-\bar{x}|<\eta$ να έχουμε $|f(\bar{x})-f(x_0)|<\delta$

Παίρνουμε $\theta = \min\{\delta, \eta\}$. Τότε ισχύει

$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\ \theta = \min\{\delta, \eta\})$: $|x_0 - \bar{x}| < \theta$ να έχουμε

$$|f^{(2n)}(f(x_0)) - \bar{x}| < \epsilon \Rightarrow |f^{(2n+1)}(x_0) - \bar{x}| < \epsilon$$

Άρα εάν πάρουμε $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\ \zeta = \min\{\theta, \delta\})$ τέτοιο ώστε

για κάθε x_0: $|x_0 - \bar{x}| < \zeta$ να έχουμε $|f^{(1)}(x_0) - \bar{x}| < \epsilon$

άρα το $\bar{x}$ ευσταθές για την (A)

Απόδειξη: α) Εάν $f'(\bar{x}) < 0$ τότε το $\bar{x}$ ευσταθές

Θεωρούμε την $x_{n+1} = g(x_n) = fof(x_n) = f^{(2)}(x_n)$

Παίρνουμε την $g(x) = f(f(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(\bar{x}) = f'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$

$= f'(\bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) = (-1)^2 = 1$

Παίρνουμε $g''(x) = f''(f(x)) \cdot f'(x)\ f'(x) + f'(f(x))\ f''(x) \Rightarrow g''(\bar{x}) = f''(f(\bar{x}))\,(f'(\bar{x}))^2 + f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x})$

$\Rightarrow g'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) - f''(\bar{x}) = 0$

Παίρνουμε $g''(x) = f'''(f(x)) f'(x) (f'(x))^2 + 2f''(x) f'(x) f''(x) +$

$+ f''(f(x)) f'(x) f''(x) + f'(f(x)) \cdot f'''(x) \Rightarrow$

$g'''(\bar{x}) = f'''(\bar{x}) f'(\bar{x}) (f'(\bar{x}))^2 + 2f''(\bar{x}) f'(\bar{x}) f''(\bar{x}) + f''(\bar{x}) f'(\bar{x}) f''(\bar{x})$

$+ f'(\bar{x}) f'''(\bar{x}) = -f'''(\bar{x}) - 2(f''(\bar{x}))^2 - (f''(\bar{x}))^2 - f'''(\bar{x}) =$

$-2f'''(\bar{x}) - 3f''(\bar{x})^2 = 2\left(-f'''(\bar{x}) - \frac{3}{2}(f''(\bar{x}))^2\right) = 2Sf(\bar{x}) < 0$

Άρα $g'''(\bar{x}) < 0$ επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το $\bar{x}$ ευσταθές για την $x_{n+1} = f^{(2)}(x_n)$.

Σύμφωνα με το πόρισμα το $\bar{x}$ ευσταθές για την $x_{n+1} = f(x_n)$

Άσκηση. Δίνεται η εξίσωση

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$$

Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να εξετάσετε την ευστάθεια τους.

Λύση. Σημεία ισορροπίας: $x = x^2 + 3x \Rightarrow \bar{x}_1 = 0$ και $\bar{x}_2 = -2$

Παίρνουμε πρώτα το $\bar{x}_1 = 0$: Έχουμε $f(x) = x^2 + 3x \Rightarrow$

$f'(x) = 2x + 3 \Rightarrow |f'(\bar{x}_1)| = 3 > 1$, άρα το $\bar{x}_1 = 0$ είναι ασταθές

Παίρνουμε το $\bar{x}_2 = -2$. Παίρνουμε $f'(\bar{x}_2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$

Παίρνουμε την $f''(x) = 2 \Rightarrow f'''(x) = 0$. Παίρνουμε

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}(f''(x))^2 = -\frac{3}{2}\,4 = -6 \Rightarrow Sf(\bar{x}_2) = -6 < 0$$

Άρα το $\bar{x}_2 = -2$ τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές