Εξισώσεις Διαφορών

Στις διαφορικές εξισώσεις θεωρούμε μια σχέση της μορφής

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y) = 0$$

θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση $y = y(x)$ που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση

Στις εξισώσεις Διαφορών θεωρούμε μια σχέση

$$F(y_{n+r}, y_{n+r-1}, \dots, y_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Εδώ ζητούμε να βρούμε μια ακολουθία y_n που να ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Ο αριθμός r καλείται τάξη της εξίσωσης διαφορών.

Παράδειγμα θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+3}^2 - 3y_{n+1}y_{n+2} + y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Αυτή είναι για εξίσωση διαφορών τάξης 3.

Παρατήρηση Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = f(x,y)$$ Παίρνουμε

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \simeq f(x,y) \Rightarrow \quad y(x+h) = y(x) + hf(x,y).$$

Για $x = x_0$ παίρνουμε $y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0)$.

Για $x = x_0+h$ παίρνουμε $y(x_0+2h) = y(x_0+h) + hf(x_0+h, y(x_0+h))$

Επαγωγικά παίρνουμε:

$$y(x_0+(n+1)h) = y(x_0+nh) + hf(x_0+nh, y(x_0+nh)), \quad n=0,1,\ldots$$

Θέτουμε $y(x_0+nh) = z_n$. Τότε έχουμε:

$$z_{n+1} = z_n + hf(x_0+nh, z_n), \quad n=0,1,\ldots$$

Συμβολισμοί.

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n-1}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 0$$

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k = a_{n_0} \cdot a_{n_0+1} \cdot \cdots \cdot a_{n-1}$$

$$\prod_{k=n_0}^{n_0-1} a_k = 1$$

Γνωστά Αθροίσματα

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^{n_0}\left(\omega^{n-n_0}-1\right)}{\omega-1}, \quad \omega \in \mathbb{R}-\{1\}.$$

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \omega^k = \frac{\omega^{n_0}}{1-\omega}, \quad |\omega|<1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(1+n)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\prod_{k=n_0}^{n-1} c = c^{n-n_0}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών.

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης διαφορών r τάξεως, $r \in \mathbb{N}$ (γραμμικής) είναι

$$a_r(n) y_{n+r} + a_{r-1}(n) y_{n+r-1} + \cdots + a_1(n) y_{n+1} + a_0(n) y_n = f_n$$

όπου $a_i(n)$ γνωστές (ακολουθίες), $i = 0, 1, \ldots, r$, f_n γνωστή ακολουθία

Παραδείγματα: Η εξίσωση διαφορών

$$y_{n+2} - 2^n y_n + y_{n+1}^2 = 0$$

δεν είναι γραμμική διότι υπάρχει ο όρος y_{n+1}^2

Η εξίσωση

$$y_{n+4} - 3y_{n+3} + 2y_{n+2} + \cos(y_n) = 0$$

δεν είναι γραμμική διότι υπάρχει ο όρος $\cos(y_n)$.

Εξισώσεις Διαφορών Γραμμικές Πρώτης Τάξης

Ορισμός. Μια εξίσωση διαφορών γραμμική πρώτης τάξης έχει την μορφή:

$$y_{n+1} = p_n y_n + q_n, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1).$$

όπου p_n, q_n δοθείσες ακολουθίες.

Ορισμός. Εάν $q_n=0$, $n=0,1,\ldots$ τότε παίρνουμε την εξίσωση

$$y_{n+1} = p_n y_n \qquad (2)$$

Η (2) καλείται ομογενής γραμμική πρώτης τάξης.

Πρώτα θα ασχοληθούμε με την Ομογενή (2).

Θέλουμε να βρούμε μια λύση y_n της (2) τέτοια ώστε y_{n_0} να είναι γνωστό

Θέτουμε $n=n_0$ στην (2). Τότε $y_{n_0+1} = P_{n_0} y_{n_0}$

Ομοίως $y_{n_0+2} = P_{n_0+1} y_{n_0+1} = P_{n_0+1} P_{n_0} y_{n_0}$, $y_{n_0+3} = P_{n_0+2} \cdot P_{n_0+1} P_{n_0} y_{n_0}$

Γενικά

$$y_n = P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_{n_0} y_{n_0} \Rightarrow y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} P_j\right) y_{n_0} \quad n \geq n_0$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad y_5 = 7$$

Λύση. Ισχύει $y_n = \left(\prod_{j=5}^{n-1} 2\right) y_5 = \left(\prod_{j=5}^{n-1} 2\right) 7 \Rightarrow y_n = 2^{n-5} \cdot 7, \quad n \geq 5.$

$$\Rightarrow y_n = 7 \cdot 2^{n-5}, \quad n \geq 5$$

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα

$$y_{n+1} = \frac{n+1}{n} y_n, \quad y_1 = 2, \quad n \geq 1.$$

Λύση. Εδώ $P_n = \frac{n+1}{n}$. Ισχύει ότι

$$y_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{j+1}{j}\right) y_1 = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n}{n-1}\right) 2 = 2n$$

Άρα $y_n = 2n$

Επαλήθευση: $y_{n+1} = 2(n+1) = 2n+2$, $\frac{n+1}{n} y_n = \frac{n+1}{n} 2n = 2(n+1)$

Άρα πράγματι ισχύει $y_{n+1} = \frac{n+1}{n} y_n$.

Θεωρούμε την μη ομογενή εξίσωση γραμμική πρώτης τάξης

$$y_{n+1} - y_n = z_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

όπου z_n γνωστή ακολουθία. Θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα

$$y_{n+1} - y_n = z_n \ , \quad y_{n_0} \text{ γνωστό.}$$

Για $n = n_0$ παίρνουμε:

$$y_{n_0+1} - y_{n_0} = z_{n_0}$$

Για $n = n_0+1$: $y_{n_0+2} - y_{n_0+1} = z_{n_0+1}$

Για $n = n_0+2$: $y_{n_0+3} - y_{n_0+2} = z_{n_0+2}$

. . . . . .

Για $n-1$ $\quad y_n - y_{n-1} = z_{n-1}$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $y_n - y_{n_0} = z_{n_0} + z_{n_0+1} + \cdots + z_{n-1}$

Άρα

$$y_n = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k, \quad n \geq n_0.$$

Παράδειγμα. Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad y_4 = 3.$$

Λύση: Έχουμε $n_0 = 4$, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Άρα

$$y_n = y_4 + \sum_{k=4}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\right) \cdot 2, \quad n \geq 4.$$

$$\Rightarrow y_n = 3 + 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 4$$

Επίλυση του προβλήματος

$$y_{n+1} = p_n y_n + q_n, \quad y_{n_0} \text{ γνωστό}, \quad n = n_0+1, n_0+2, \dots$$

Υποθέτουμε $p_n \neq 0$, $n \geq n_0$. Παίρνουμε την ακολουθία

$$\prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = \frac{1}{p_{n_0}} \cdot \frac{1}{p_{n_0+1}} \cdots \frac{1}{p_n}$$

Πολ/ζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $\prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$

Έχουμε

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = p_n y_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} \Rightarrow$$

$$y_{n+1} \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1} = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} + q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$$

Θέτουμε $v_n = y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1}$. Τότε $v_{n+1} = v_n + z_n$ όπου $z_n = q_n \prod_{j=n_0}^{n} p_j^{-1}$

Από τα προηγούμενα έχουμε:

$$V_n = V_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} z_k \Rightarrow y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n_0-1} p_j^{-1} + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} = y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \Rightarrow$$

$$y_n \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j^{-1} \cdot \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \cdot \sum_{k=n_0}^{n-1} q_k \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \Rightarrow$$

$$y_n = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j \prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1} \right) \Rightarrow$$

$$y_n = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \cancel{\prod_{j=n_0}^{k} p_j} \cdot \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j \cancel{\prod_{j=n_0}^{k} p_j^{-1}} \right) \Rightarrow y_n = y_{n_0} \prod_{j=n_0}^{n-1} p_j + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j \right).$$

$n \geq n_0$.

Παρατήρηση

Έχουμε τη λύση $y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} p_j\right) y_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j\right)$

Η ομογενούς $\left(\prod_{j=n_0}^{n-1} p_j\right) y_{n_0}$ δείξαμε ότι είναι λύση της ομογενούς: $y_{n+1} = p_n y_n$. Η ομογενούς $\sum_{k=n_0}^{n-1} \left(q_k \prod_{j=k+1}^{n-1} p_j\right)$ είναι μερική λύση της μη ομογενούς: $y_{n+1} = p_n y_n + q_n$.

Άσκηση Να λυθεί το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n, \quad y_1 = C, \quad C \text{ σταθερά.}$$

Λύση: Θεωρούμε δεί $P_n = \frac{n}{n+1}$, $q_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ Παίρνουμε την ακολουθία

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j+1}\right)^{-1} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{j+1}{j}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = n+1$$

Πολ/ζουμε ακφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $n+1$:

$$y_{n+1} \cdot (n+1) = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1) y_n + n(n+1) \Rightarrow (n+1) y_{n+1} = n y_n + n^2 + n$$

Θέτουμε $V_n = n y_n$. Τότε $V_{n+1} = V_n + n^2 + n$. Άρα

$$V_n = V_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = V_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = V_1 + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Άρα

$$n y_n = y_1 + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \Rightarrow y_n = \frac{c}{n} + \frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6},\ n \geq 1$$

Η αυολουθία $\frac{c}{n}$ είναι λύση της ομογενούς: $y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n$

και η αυολουθία $\frac{n-1}{2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$ λύση της μη ομογενούς:

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n.$$

Άσκηση: Να λύσετε το πρόβλημα:

$$y_{n+1} = 2y_n + 3^n, \quad y_0 = 1$$

Λύση. Εδώ $p_n = 2$, $q_n = 3^n$, $\eta_0 = 1$. Παίρνουμε τον όρο $\prod_{j=0}^{n} p_j^{-1} =$

$= \prod_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Πολλαπλασιάζουμε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης με τον όρο $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ και έχουμε: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_{n+1} = 2 y_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Άρα

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} y_n + 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Θέτουμε $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n y_n$. Τότε

$$V_{n+1} = V_n + 3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow V_n = V_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \Rightarrow$$

$$V_n = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Άρα $V_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$. Άρα $\left(\frac{1}{2}\right)^n y_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow y_n = 3^n$.

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = f_n, \quad n=0,1,\ldots$$

Οι ακολουθίες p_n, q_n και f_n είναι γνωστές. Αυτή λέγεται γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης μη ομογενής

Θεωρούμε πρώτα την εξίσωση

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots \qquad (1).$$

Αυτή λέγεται ομογενής εξίσωση.

Ορισμός: Έστω 2 ακολουθίες x_n, y_n, $n=0,1,\ldots$ Αυτές θα λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες εάν από τη σχέση

$$\lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

προκύπτει ότι $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Οι x_n, y_n είναι γραμμικά εξαρτημένες εάν δεν είναι ανεξάρτητες δηλ. υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n = 0$, $n=0,1,\ldots$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = 3n + \frac{12}{5}$ και $y_n = 5n+4$, $n=0,1,\ldots$ Να εξετάσουμε εάν οι x_n και y_n γραμμικά ανεξάρτητες. Παίρνουμε τη σχέση

$$\lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n = 0 \Rightarrow \lambda_1\left(3n+\frac{12}{5}\right) + \lambda_2(5n+4) = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

Παίρνουμε $\lambda_1 = -5$ και $\lambda_2 = 3$. Τότε

$$-5\left(3n+\frac{12}{5}\right) + 3(5n+4) = -15n - 12 + 15n + 12 = 0, \quad n=0,1\ldots$$

Άρα x_n, y_n γραμμικά εξαρτημένες.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τις ακολουθίες $y_n = 2^n$, $z_n = 3^n$, $n=0,1,\ldots$
Να εξετάσετε εάν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Παίρνουμε τη σχέση $\lambda_1 y_n + \lambda_2 z_n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n = 0$, $n=0,1,\ldots$
Παίρνουμε για $n=0$: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Για $n=1$ έχουμε $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$.
Έχουμε $\lambda_2 = -\lambda_1$. Άρα $2\lambda_1 - 3\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, και $\lambda_2 = 0$. Άρα $y_n = 2^n$, $z_n = 3^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση (1). Θέλουμε να βρούμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1). Εάν y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1), τότε η γενική λύση της (1) δίνεται από τη σχέση

(ΣΤΟ)
$$w_n = c_1 y_n + c_2 z_n, \quad n=0,1,\ldots$$

και c_1, c_2 σταθερές

Το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι το εξής:

$$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0, \quad y_0 = a, \quad y_1 = b$$

όπου a και b σταθερές.

Ορισμός: Έστω δύο λύσεις x_n, y_n της ομογενούς (1). Τότε η ορίζουσα

$$C(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}$$

καλείται ορίζουσα του Cassorati

Πρόταση Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση (1), όπου $q_n \neq 0$, $n=0,1,\dots$
Τότε η ορίζουσα του Cassorati είναι διάφορη του μηδενός εάν και μόνο εάν $C(x_0,y_0)\neq 0$. (Θεωρούμε ότι x_n, y_n είναι λύσεις της (1)).

Απόδειξη. Θεωρούμε την $u_n = C(x_n,y_n)$, $n=0,1,\dots$ Τότε

$$u_{n+1} = C(x_{n+1},y_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} \end{vmatrix} = x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+2}\cdot y_{n+1}.$$

Εφόσον x_n, y_n είναι λύσεις της (1) έχουμε $x_{n+2} + p_n x_{n+1} + q_n x_n = 0$

$\Rightarrow x_{n+2} = -p_n x_{n+1} - q_n x_n$, Ομοίως $y_{n+2} = -p_n y_{n+1} - q_n y_n$

Άρα $u_{n+1} = x_{n+1}(-p_n y_{n+1} - q_n y_n) - (-p_n x_{n+1} - q_n x_n) y_{n+1} =$

$= -p_n x_{n+1} y_{n+1} - q_n x_{n+1} y_n + p_n x_{n+1} y_{n+1} + q_n x_n y_{n+1} = q_n(x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n) =$

$q_n C(x_n,y_n) = q_n u_n$. Άρα $u_{n+1} = q_n u_n \Rightarrow u_n = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) u_0$

Άρα $C(x_n, y_n) = \left(\prod_{s=0}^{n-1} q_s\right) C(x_0, y_0)$.

Από την υπόθεση έχουμε $q_n \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ Άρα $\prod_{s=0}^{n-1} q_s \neq 0$, $n=0,1,\ldots$

Άρα $C(x_n, y_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ εάν και μόνον εάν $C(x_0, y_0) \neq 0$

Πρόταση Θεωρούμε την ομογενή εξίσωση (1) όπου $q_n \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ Έστω y_n, z_n δυο λύσεις της (1). Τότε οι y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνον εάν η ορίζουσα $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$

Απόδειξη Έστω ότι $C(y_n, z_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ Θα δείξουμε ότι y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω αντίθετα ότι y_n, z_n είναι γραμμικά εξαρτημένες Τότε θα υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $z_n = \lambda y_n$, $n=0,1,\ldots$

Τότε

$$C(y_n, z_n) = \begin{vmatrix} y_n & z_n \\ y_{n+1} & z_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_n & \lambda y_n \\ y_{n+1} & \lambda y_{n+1} \end{vmatrix} = \lambda y_n y_{n+1} - \lambda y_n y_{n+1} = 0$$

άτοπο διότι υποθέσαμε ότι $C(y_n, z_n) \neq 0$. Άρα οι λύσεις y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Θα αποδείξουμε το αντίστροφο δηλ. υποθέτουμε ότι οι λύσεις y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες θα δείξουμε ότι $C(y_n, z_n) \neq 0$. Έστω αντίθετα $C(y_n, z_n) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0 &= 0 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (A)$$

Παίρνουμε την ορίζουσα των συντελεστών του ομογενούς συστήματος

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = C(y_0, z_0) = 0$$

Τότε το ομογενές σύστημα (A) έχει άπειρες λύσεις λ_1 και λ_2 Παίρνουμε λ_1, λ_2 διάφορες του μηδενός έτσι ώστε να ισχύει η (A).

Παίρνουμε τη $\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2$ έφόσον y_n και z_n λύσεις της εξίσωσης (1) ισχύει $y_2 = -p_0 y_1 - q_0 y_0$ και $z_2 = -p_0 z_1 - q_0 z_0$

Άρα $\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1(-p_0 y_1 - q_0 y_0) + \lambda_2(-p_0 z_1 - q_0 z_0) =$

$p_0(-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 z_1) + q_0(-\lambda_1 y_0 - \lambda_2 z_0) = p_0 0 + q_0 0 = 0$, έφόσον τα λ_1, λ_2 ικανοποιούν το σύστημα (A). Άρα δείξαμε ότι

$$\lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2 = 0$$

Επαγωγικά παίρνουμε ότι $\lambda_1 y_n + \lambda_2 z_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Άρα y_n, z_n γραμμικά εξαρτημένες λύσεις άτοπο διότι υποθέσαμε ότι y_n και z_n γραμμικά ανεξάρτητες

Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών δεύτερης τάξης Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

Θεωρούμε την εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots \qquad (2).$$

όπου $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής $y_n = \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda^n (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) = 0. \quad \text{Παίρνουμε } \lambda \neq 0$$

Άρα παίρνουμε την εξίσωση (αλγεβρική):

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \qquad (3)$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται Χαρακτηριστική εξίσωση της (2)

1η περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η (3) έχει 2 λύσεις $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Τότε έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2) $y_n = \lambda_1^n$, $z_n = \lambda_2^n$

Πράγματι $y_n=\lambda_1^n$ και $z_n=\lambda_2^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες διότι

$$C(y_n,z_n)=\begin{vmatrix}\lambda_1^n & \lambda_2^n\\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1}\end{vmatrix}=\lambda_1^n\lambda_2^{n+1}-\lambda_2^n\lambda_1^{n+1}=\lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2-\lambda_1)\neq 0$$

διότι υποθέσαμε ότι $a_2\neq 0$ και $\lambda_1\neq\lambda_2$. Τότε η γενική λύση της (2) δίνεται (Γ0)

$$w_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n,\quad n=0,1,\dots$$

c_1,c_2 σταθερές

2η περίπτωση: Έστω ότι η αλγ. εξίσωση (3) έχει μια λύση την $\lambda\in\mathbb{R}$ διπλή. Τότε οι $y_n=\lambda^n$ και $z_n=n\lambda^n$ είναι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2). Θα δείξουμε πρώτα ότι η $z_n=n\lambda^n$ είναι λύση της (2). Παίρνουμε

$$z_{n+2}+a_1z_{n+1}+a_2z_n=(n+2)\lambda^{n+2}+a_1(n+1)\lambda^{n+1}+a_2n\lambda^n=\lambda^n\left(\lambda^2(n+2)+a_1\lambda(n+1)+a_2n\right)$$
$$=\lambda^n\Big(n\underbrace{(\lambda^2+a_1\lambda+a_2)}_{0}+2\lambda^2+a_1\lambda\Big)=\lambda^n(2\lambda^2+a_1\lambda)=\lambda^{n+1}(2\lambda+a_1)$$

Η λ είναι διπλή ρίζα της $\lambda^2+a_1\lambda+a_2$. Επομένως

$$\lambda+\lambda=-\frac{a_1}{1}=-a_1 \Rightarrow 2\lambda+a_1=0, \text{ Άρα}$$

$z_{n+2}+a_1 z_{n+1}+a_2 z_n=\lambda^{n+1}\cdot 0=0$. Επομένως η $z_n=n\lambda^n$ είναι λύση της (2). Θα δείξουμε ότι οι $y_n=\lambda^n$, $z_n=n\lambda^n$ είναι και γραμμικά ανεξάρτητες. Παίρνουμε την ορίζουσα

$$C(y_n,z_n)=\begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2n+1}(n+1)-n\lambda^{2n+1}=\lambda^{2n+1}\left(n+1-n\right)=\lambda^{2n+1}\neq 0$$

Άρα y_n, z_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Τότε η γενική λύση της (2) δίνεται

$$w_n^{(\Gamma\Omega)} = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n, \quad n=0,1,\ldots$$

c_1, c_2 σταθερές

3η περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η αλγ. εξίσωση (3) έχει 2 μιγαδικές λύσεις τις $\lambda_1 = a+ib$ και $\lambda_2 = a-ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Τότε έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς:

$$y_n = \lambda_1^n = (a+ib)^n \quad \text{και} \quad z_n = \lambda_2^n = (a-ib)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Γράφουμε τον $a+ib$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\lambda_1 = a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

θέτουμε $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\theta = \arg z$. Επομένως $\lambda_1 = (a^2+b^2)^{1/2}(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$

$$\lambda_1^n = (a^2+b^2)^{n/2}(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Αλλά $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i(\sin(n\theta))$

Άρα $\lambda_1^n = (a^2+b^2)^{n/2}(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = (a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta) + i(a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta)$

Αποδεικνύουμε ότι οι $y_n = (a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta)$ και $z_n = (a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta)$ είναι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης διαφορών (2).

Μπορούμε να δείξουμε ότι $C(Y_n, Z_n) \neq 0$, $n=0,1,\ldots$ Άρα είναι και γραμμικά ανεξάρτητες

$$C(Y_n, Z_n) = \begin{vmatrix} (a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta) & (a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta) \\ (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}\cos((n+1)\theta) & (a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}\sin((n+1)\theta) \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta) - (a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}\cos((n+1)\theta)\sin(n\theta) =$$

$$= (a^2+b^2)^{n+\frac{1}{2}}\left[\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta)\cos((n+1)\theta)\right] \neq 0.$$

Η γενική λύση της ομογενούς (2) δίνεται

$$W_n^{(\Gamma\Omega)} = c_1(a^2+b^2)^{n/2}\cos(n\theta) + c_2(a^2+b^2)^{n/2}\sin(n\theta),\ n=0,1,\ldots$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\theta = \arg\lambda_1$, $\lambda_1 = a+ib$.

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 2.$$

Λύση. Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση:

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = 4$$

Άρα έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0$

α) $y_n = (-3)^n$ και $z_n = 4^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Άρα η γενική λύση $w_n^{(\gamma\sigma)}$ δίνεται

$$w_n^{(\gamma\sigma)} = c_1(-3)^n + c_2 4^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Για $n=0$ έχουμε $c_1(-3)^0 + c_2 4^0 = 1$
Για $n=1$ » $c_1(-3)^1 + c_2 4^1 = 2$

$\Rightarrow$ $\begin{matrix} c_1 + c_2 = 1 \\ -3c_1 + 4c_2 = 2 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} c_2 = \frac{5}{7} \\ c_1 = \frac{2}{7} \end{matrix}$

Άρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η $\frac{2}{7}(-3)^n + \frac{5}{7}4^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση: Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 = 0$$

Άρα έχουμε την $\lambda=3$ διπλή. Επομένως έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $y_n = 3^n$ και $z_n = n3^n$, $n=0,1,\ldots$

Άρα η γενική λύση $w_n^{(\text{γο})} = c_1 3^n + c_2 n 3^n$, $n=0,1,\ldots$

Άσκηση. Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση. Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1+i \text{ και } \lambda_2 = -1-i$$

Γράφουμε τον μιγαδικό αριθμό $\lambda_1 = -1+i$ σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\lambda_1 = \sqrt{(-1)^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Άρα οι 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης διαφορών είναι οι

$$y_n = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right), \quad z_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άρα η γενική λύση $w_n^{(ro)} = c_1(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + c_2(\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right), \quad n = 0, 1, \ldots$

c_1, c_2 σταθερές

Παρατήρηση: Έστω ότι έχουμε την ομογενή εξίσωση διαφορών

$$y_{n+r} + a_{r-1} y_{n+r-1} + a_{r-2} y_{n+r-2} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \quad (B)$$

όπου $a_i \in \mathbb{R}$ Εδώ η χαραχτ. εξίσωση είναι

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + a_{r-2}\lambda^{r-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Έστω ότι η χαραχτ. εξίσωση έχει μια πραγμ. λύση την λ πολλαπλότητας m. Τότε στην λ αντιστοιχούν οι εξής γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς (B)

$$y_n^{(1)} = \lambda^n, \quad y_n^{(2)} = n\lambda^n, \quad y_n^{(3)} = n^2\lambda^n, \dots \quad y_n^{(m)} = n^{m-1}\lambda^n$$

Τέλος έστω ότι η χαραχτ. εξίσωση έχει τη μιγαδική λύση $\lambda = a+ib$ που επαναλαμβάνεται m φορές. Τότε έχουμε $2m$ λύσεις της (B):

$|\lambda|^n \cos(n\theta)$, $n|\lambda|^n \cos(n\theta)$, $n^2|\lambda|^n \cos(n\theta)$, ..., $n^{m-1}|\lambda|^n \cos(n\theta)$

$|\lambda|^n \sin(n\theta)$, $n|\lambda|^n \sin(n\theta)$, $n^2|\lambda|^n \sin(n\theta)$, $n^{m-1}|\lambda|^n \sin(n\theta)$

όπου $|\lambda| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\theta = \arg(a+bi)$.

Άσκηση. Να βρείτε τη γενική λύση της

$$y_{n+3} - 2y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = 0, \quad n=0,1,\ldots$$

Λύση: Παίρνουμε την χαρακτ. εξίσωση:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-1) + 2(-\lambda^2+1) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda^2-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$$

Άρα έχουμε τις τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις

$y_n^{(1)} = 1^n$, $y_n^{(2)} = (-1)^n$, $y_n^{(3)} = 2^n$. Επομένως η γενική λύση δίνεται

$$w_n^{(ro)} = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 \cdot 2^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Μη ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n \,, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (4).$$

Ισχύει ότι Γενική λύση της Μη Ομογενούς = Γενική λύση Ομογενούς + μια μερική λύση της Μη Ομογενούς. Άρα το πρόβλημα είναι να βρούμε μια μερική της Μη Ομογενούς (4). Αυτό μπορεί να γίνει εάν η f_n έχει την μορφή:

$$f_n = P_n \beta^n \left(A\cos(\gamma n) + B\sin(\gamma n) \right)$$

όπου P_n γνωστό πολυώνυμο, $\beta \in \mathbb{R}$, $A, B, \gamma \in \mathbb{R}$. Τότε η μερική λύση $y_n^{(\mu\mu o)}$ έχει την μορφή: $y_n^{(\mu\mu o)} = n^p \beta^n \left(C(n)\cos(\gamma n) + D(n)\sin(\gamma n) \right)$ $C(n), D(n)$ πολυώνυμα ίδιου βαθμού με το P_n στην γενική τους μορφή.

Υπολογισμός του ρ: Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $\lambda = \varrho(\cos\gamma + i\sin\gamma)$. Τότε εάν ο λ δεν είναι λύση της χαραντ. εξίσωσης, έχουμε ότι $p=0$. Εάν ο λ είναι απλή λύση της χαραντ. εξίσωσης έχουμε ότι $p=1$. Τέλος εάν ο λ είναι διπλή λύση της χαραντ. εξίσωσης παίρνουμε $p=2$.

Παρατήρηση: Έστω $\lambda = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\sin\theta \neq 0$. Τότε ο λ δεν μπορεί να είναι διπλή λύση της χαραντ εξίσωσης διότι η χαραντ. εξίσωσης θα έχει λύση και την $\varrho(\cos\theta - i\sin\theta)$.

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 3 \cdot 3^n.$$

Λύση.

Εδώ $f_n = 3 \cdot 3^n$. Πρώτα θα βρούμε την γενική λύση της ομογενούς

$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$: Χαραντ. Εξίσωση: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$

$\Rightarrow$ έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς:

$y_n = 2^n$ και $z_n = 5^n$. Τότε η γενική λύση της ομογενούς δίνεται

$$y_n^{(ΓΟ)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 5^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Πρέπει να βρούμε και μια μερική λύση της μη Ομογενούς

Έχουμε $f_n = 3 \cdot 3^n$. Έχουμε $p_n = 3$, $\theta = 3$, $\gamma = 0$, $A = 1$.

Άρα η μερική λύση της μη ομογενούς έχει την μορφή

$$y_n^{(ΜΜΟ)} = n^p \cdot 3^n C(n), \quad C(n) \text{ πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το } p_n$$

Άρα $y_n^{(ΜΜΟ)} = n^p \cdot C \cdot 3^n$

Υπολογισμός του ρ: Θεωρούμε τον αριθμό $3(\cos\gamma + i\sin\gamma)$
$= 3$ δεν είναι λύση της χαραιτ. εξίσωσης, άρα $\rho \neq 0$

Επομένως $y_n^{(\text{ΜΟ})} = C\,3^n$. Πρέπει να υπολ. το C

Ισχύει $y_{n+2}^{(\text{ΜΟ})} - 7y_{n+1}^{(\text{ΜΟ})} + 10y_n^{(\text{ΜΟ})} = 3\cdot 3^n \Rightarrow$

$$C3^{n+2} - 7C3^{n+1} + 10C3^n = 3\cdot 3^n \Rightarrow 9C - 21C + 10C = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2C = 3 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}. \quad \text{Επομένως } y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = -\frac{3}{2}\,3^n$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς δίνεται

$$y_n = c_1 2^n + c_2 5^n - \frac{3}{2}\,3^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y_{n+2} - 10 y_{n+1} + 25 y_n = 4 \cdot 5^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση. Πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς. Παίρνουμε χαρακτ. εξίσωση: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \Rightarrow$ $\lambda = 5$ διπλή. Τότε έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς οι οποίες είναι: $y_n^{(1)} = 5^n$, $y_n^{(2)} = n\,5^n$. Άρα η γενική λύση της ομογενούς είναι η $y_n^{(\text{ΓΟ})} = c_1 5^n + c_2 n 5^n$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(\text{ΜΜ})}$. Έχουμε $f_n = 4 \cdot 5^n$. Εδώ $P_n = 4$, $\beta = 5$, $A = 1$, $\gamma = 0$. Άρα η μερική λύση $y_n^{(\text{ΜΜ})} = n^p 5^n \left(C\cos(\theta n) + D\sin(\theta n) \right) = C n^p \cdot 5^n$, C σταθερά που πρέπει να την υπολογίσουμε. Πρέπει να υπολογίσουμε το p: Παίρνουμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 5(\cos 0 + i\sin 0) = 5$ είναι διπλή ρίζα της χαρακτ.

Εξίσωση της ομογενούς Άρα $p=2$. Επομένως $y_n^{(\text{ΜΟ})} = Cn^2 5^n$.

Έχουμε:

$$C(n+2)^2 5^{n+2} - 10C(n+1)^2 5^{n+1} + 25Cn^2 5^n = 4\cdot 5^n \Rightarrow$$

$$25C(n^2+4n+4) - 10C\cdot 5(n^2+2n+1) + 25Cn^2 = 4 \Rightarrow$$

$$25C(\cancel{n^2}+4n+4-2\cancel{n^2}-4n-2+\cancel{n^2}) = 4 \Rightarrow 50C = 4 \Rightarrow C = \frac{2}{25}.$$ Άρα

$$y_n^{(\text{ΜΟ})} = \frac{2}{25} n^2 \cdot 5^n$$ Επομένως

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1 5^n + c_2 n 5^n + \frac{2}{25} n^2 \cdot 5^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση. Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 6n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Λύση. Γενική λύση ομογενούς: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow$ $\lambda = 1$ διπλή. Άρα η γενική λύση της ομογενούς:

$$y_n^{(\Gamma\Omega)} = c_1 1^n + c_2 n 1^n = c_1 + c_2 n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Πρέπει να βρούμε και μια μερική λύση της ομογενούς. Έχουμε $f_n = 6n$. Άρα $P_n = 6n$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $A = 1$. Επομένως η μερική λύση της μη ομογενούς $y_n^{(\mu\Pi\Theta)} = n^p \cdot 1^n (a_1 n + a_2)$.

Υπολογισμός του p: Παίρνουμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 1$ είναι διπλή ρίζα της χαραχτ. εξίσωσης. Άρα $p = 2$. Επομένως

$$y_n^{(\mu\Pi\Theta)} = a_1 n^3 + a_2 n^2.$$

Άρα:

$$a_1(n+2)^3 + a_2(n+2)^2 - 2a_1(n+1)^3 - 2a_2(n+1)^2 + a_1 n^3 + a_2 n^2 = 6n \Rightarrow$$

$$a_1(n^3+3n^2 2+3n\,2^2+2^3) + a_2(n^2+4n+4) - 2a_1(n^3+3n^2+3n+1) - 2a_2(n^2+2n+1)$$

$$+ a_1 n^3 + a_2 n^2 = 6n \Rightarrow \quad 6a_1 n + 6a_1 + 2a_2 = 6n. \quad \text{Άρα}$$

$6a_1 = 6$ και $6a_1 + 2a_2 = 0$. Άρα $a_1 = 1$, $a_2 = -3$. Άρα

$y_n^{(\text{ΜΟ})} = n^3 - 3n^2$. Επομένως η γενική λύση της δοθείσας Ομογενούς:

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = c_1 + c_2 n + n^3 - 3n^2, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Άσκηση Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} + y_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Λύση. Πρώτα θα βρούμε την γενική λύση της Ομογενούς:

Χαρακτ. Εξίσωση: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ Ισχύει $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

Επομένως έχουμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της Ομογενούς:

$y_n^{(1)} = 1^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $y_n^{(2)} = 1^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Άρα

$$y_n^{(\text{ΓΟ})} = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n = 0, 1, \ldots \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Πρέπει να βρούμε και μια μερική λύση της μη Ομογενούς:

$f_n = -2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Άρα $P_n = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $A = 1$. Άρα

$$y_n^{(\text{ΜΟ})} = n^p \cdot 1^n \cdot \left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = n^p \left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

Υπολογισμός του ρ: Παίρνουμε τον αριθμό $6(\cos\gamma+i\sin\gamma)=$
$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ είναι απλή ρίζα της χαραχτ. εξίσωσης. Άρα $p=1$.

Επομένως $y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = n\left(C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$, $n=0,1,\dots$.

Θα υπολ. τις σταθερές C και D. Έχουμε:

$$C(n+2)\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)+D(n+2)\sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right)+Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -C(n+2)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-D(n+2)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+Cn\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+Dn\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -2C\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2D\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow -2C=-2 \text{ και } -2D=0$$

Άρα $C=1$. Επομένως $y_n^{(\text{ΜΜΟ})} = n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Άρα

$$y_n^{(\text{ΓΜΟ})} = C_1\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)+C_2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),\quad C_1, C_2 \text{ σταθερές}$$

Παρατήρηση. Έστω ότι έχουμε την εξίσωση:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \dots + f_n^{(K)} \qquad (A)$$

όπου $K=1,2,\dots$ και οι $f_n^{(i)} = P_n^{(i)} \theta_i^n \left(A_i \cos(\gamma_i n) + B_i \sin(\gamma_i n) \right)$, $i=1,2,\dots,K$,

$P_n^{(i)}$ πολυώνυμο, $\theta_i, A_i, B_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$

Τότε εξισώνουμε τις μερικές λύσεις των

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = f_n^{(i)}, \quad i=1,2,\dots,K$$

Έστω $y_n^{(\mu\mu o, i)}$, $i=1,2,\dots,K$ οι μερικές λύσεις. Τότε

$$y_n^{(\mu\mu o)} = y_n^{(\mu\mu o,1)} + y_n^{(\mu\mu o,2)} + \dots + y_n^{(\mu\mu o,K)}.$$

Θα είναι η μερική λύση της (A).

Άσκηση: Να βρείτε την γενική λύση της

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 5 + 2\cdot 2^n$$

Λύση. Γενική λύση Ο.Ε.: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5$

Άρα $y_n^{(ro)} = C_1 2^n + C_2 5^n$, C_1, C_2 σταθερές

Θα υπολ. τώρα και την μερική λύση της μη Ο.Ε.:

Έχουμε $f_n = 5 + 2\cdot 2^n$. Εδώ παίρνουμε $f_n^{(1)} = 5$ και $f_n^{(2)} = 2\cdot 2^n$

Παίρνουμε τις εξισώσεις

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 5 \quad (i)$$

$$y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 2\cdot 2^n \quad (ii)$$

Θα βρούμε την μερική λύση της (i). $f_n^{(1)} = 5$, άρα

$P_n^{(1)} = 5$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $A_1 = 1$ Επομένως

$y_n^{(\text{ΜΜΟ},1)} = n^{P_1} C$ Υπολ του P_1 Παίρνουμε τον αριθμό $\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 1$

δεν είναι ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης, άρα $P_1 = 0$. Επομένως $y_n^{(\text{ΜΜΟ},1)} = C$

Από την (i) εξίσωση έχουμε $C - 7C + 10C = 5 \Rightarrow 4C = 5 \Rightarrow C = \frac{5}{4}$

Άρα $y_n^{(\text{ΜΜΟ},1)} = \frac{5}{4}$, $n = 0, 1, \ldots$

Θα βρούμε και μια μερική λύση $y_n^{(\text{ΜΜΟ},2)}$ της εξίσωσης (ii)

Έχουμε $f_n^{(2)} = 2 \cdot 2^n$. Άρα $P_n = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $A = 1$, Άρα

$y_n^{(\text{ΜΜΟ},2)} = n^{P_2} \cdot 2^n D$. Υπολογισμός του P_2: Παίρνουμε τον αριθμό

$\beta(\cos\gamma + i\sin\gamma) = 2$, αυτή ρίζα της χαρακτ. εξίσωσης, άρα $p = 1$. Επομένως

$y_n^{(\text{ΜΜΟ},2)} = n 2^n \cdot D$. Θα υπολ. την σταθερά D.

Από την (ii) έχουμε:

$$D(n+2)\cdot 2^{n+2} - 7D(n+1)2^{n+1} + 10Dn\,2^n = 2\cdot 2^n \Rightarrow$$

$$4nD + 8D - 14Dn - 14D + 10Dn = 2 \Rightarrow -6D = 2 \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$$

Άρα $y_n^{(\text{μμο},2)} = -\frac{1}{3} n\, 2^n$. Επομένως η μερική λύση της αρχικής μη ομογενούς δίνεται

$$y_n^{(\text{μμο})} = y_n^{(\text{μμο},1)} + y_n^{(\text{μμο},2)} = \frac{5}{4} - \frac{1}{3} n\, 2^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς δίνεται:

$$y_n^{(\text{ομο})} = c_1 2^n + c_2 5^n + \frac{5}{4} - \frac{1}{3} n\, 2^n, \quad n=0,1,\ldots$$

Ειδικές Μορφές Μη γραμμικών Εξισώσεων διαφορών.

Θεωρούμε την εξίσωση πρώτης τάξης:

$$y_{n+1} = \frac{a y_n + b}{c y_n + d}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

και $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $ad - cb \neq 0$. Παίρνουμε την αλγεβρική εξίσωση:

$$\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \Rightarrow c\lambda^2 + \lambda d = a\lambda + b \Rightarrow c\lambda^2 + \lambda(d-a) - b = 0$$

1η περίπτωση: Έστω ότι η αλγ. εξίσωση έχει δύο πραγμ. ρίζες λ_1, λ_2 $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Θεωρούμε τον λόγο:

$$\frac{y_{n+1} - \lambda_1}{y_{n+1} - \lambda_2}$$ ισχύει $\lambda_1 = \frac{a\lambda_1 + b}{c\lambda_1 + d}$, $\lambda_2 = \frac{a\lambda_2 + b}{c\lambda_2 + d}$

Έχουμε $$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_1+b}{c\lambda_1+d}}{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_2+b}{c\lambda_2+d}} = \frac{(ay_n+b)(c\lambda_1+d)-(cy_n+d)(a\lambda_1+b)}{(cy_n+d)(c\lambda_1+d)} \cdot \frac{(cy_n+d)(c\lambda_2+d)}{(ay_n+b)(c\lambda_2+d)-(cy_n+d)(a\lambda_2+b)}$$

$$= \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\,\frac{(y_n-\lambda_1)(ad-cb)}{(y_n-\lambda_2)(ad-cb)} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\cdot\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}.$$ Άρα έχουμε

Την εξίσωση:

$$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\cdot\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2},\quad n=0,1,\ldots$$

Θέτουμε $K=\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}$ και $V_n=\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}$

Άρα έχουμε την εξίσωση $V_{n+1}=KV_n \Rightarrow V_n=K^n\cdot V_0 \Rightarrow$

$$\frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}=\left(\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\right)^n\left(\frac{y_0-\lambda_1}{y_0-\lambda_2}\right),\ n=0,1,\dots$$

Άσκηση. Να λύσετε το πρόβλημα $y_{n+1}=\frac{12y_n-2}{9y_n+3}$, $n=0,1,\dots$

Λύση. Έχουμε $12\cdot 3+2\cdot 9\neq 0$. Παίρνουμε την εξίσωση

$$\lambda=\frac{12\lambda-2}{9\lambda+3}\Rightarrow 9\lambda^2+3\lambda-12\lambda+2=0\Rightarrow 9\lambda^2-9\lambda+2=0\Rightarrow$$

$$\lambda_1=\frac{1}{3},\ \lambda_2=\frac{2}{3}\quad \text{Άρα } \lambda_1\neq\lambda_2$$

Παίρνουμε τον λόγο $\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2}=\frac{y_{n+1}-\frac{1}{3}}{y_{n+1}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12y_n-2}{9y_n+3}-\frac{1}{3}}{\frac{12y_n-2}{9y_n+3}-\frac{2}{3}}=$

$$=\frac{\frac{36y_n-6-9y_n-3}{3\cdot(9y_n+3)}}{\frac{36y_n-6-18y_n-6}{3(9y_n+3)}}=\frac{27y_n-9}{18y_n-12}=\frac{27}{18}\,\frac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}}\Rightarrow\frac{y_{n+1}-\frac{1}{3}}{y_{n+1}-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\,\frac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}}$$

Άρα $$\frac{y_n-\frac{1}{3}}{y_n-\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{y_0-\frac{1}{3}}{y_0-\frac{2}{3}},\quad n=0,1,\dots$$

2η περίπτωση Έστω ότι η εξίσωση $\lambda=\frac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$ έχει διπλή πραγματική ρίζα την λ. Παίρνουμε τον τύπο

$$\frac{1}{y_{n+1}-\lambda}=\frac{1}{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\lambda}=\frac{cy_n+d}{ay_n+b-\lambda cy_n-\lambda d}=$$

$$=\frac{cy_n+d}{(a-\lambda c)y_n+b-\lambda d}=\frac{1}{a-\lambda c}\cdot\frac{cy_n+d}{y_n+\frac{b-\lambda d}{a-\lambda c}}$$

Ισχύει ότι $\frac{b-\lambda d}{a-\lambda c}=-\lambda$. Άρα $\frac{1}{y_{n+1}-\lambda}=\frac{1}{a-\lambda c}\cdot\frac{cy_n+d}{y_n-\lambda}$.