Εξίσωση ενέργειας σε ανοικτούς αγωγούς

Ομοιόμορφη ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Βασικές έννοιες

Ομοιόμορφη ροή

Ταχύτητα και γραμμή ενέργειας σε ομοιόμορφη ροή, εξίσωση Manning

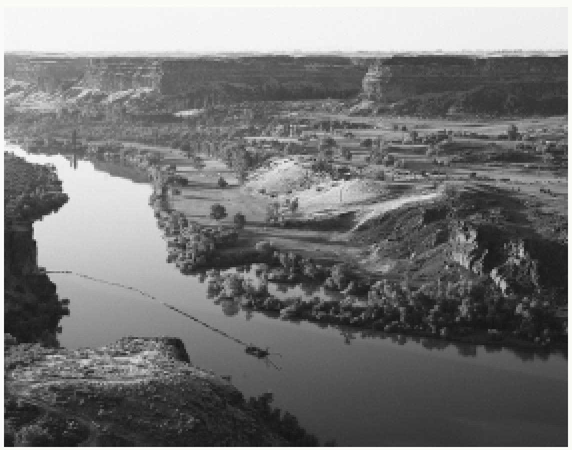
- *Διατομή αγωγού* ονομάζεται η τομή του αγωγού από κατακόρυφο επίπεδο ή από κάθετο στον πυθμένα του αγωγού επίπεδο.
- *Κύρια κατεύθυνση της ροής* θεωρείται η παράλληλη προς την κατά μήκος κλίση του πυθμένα του αγωγού.
- *Κατά μήκος κλίση του πυθμένα*, συμβολίζεται με S_0 και ορίζεται ως $S_0 = \sin\theta$.
- *Βάθος ροής διατομής*, συμβολίζεται με t και ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ του χαμηλότερου σημείου του πυθμένα μιας κάθετης σε αυτόν διατομής και της ελεύθερης επιφάνειας.
- *Βάθος ροής*, συμβολίζεται με y και ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ του χαμηλότερου σημείου του πυθμένα μιας κατακόρυφης σε αυτόν διατομής και της ελεύθερης επιφάνειας. Είναι προφανές ότι για μικρές κατά μήκος κλίσεις αγωγού είναι $\cos\theta \approx 1$ και $y \approx t$.
- *Πλάτος πυθμένα*, όπου υπάρχει, που συμβολίζεται με b.
- *Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας*, συμβολίζεται με B και ορίζεται ως το μήκος την ελεύθερη επιφάνεια στην υπόψη διατομή.
- *Εμβαδόν διατομής*, συμβολίζεται με A και ορίζεται ως το εμβαδόν της υγρής διατομής που περιβάλλεται από το στερεό όριο της διατομής και την ελεύθερη επιφάνεια.
- *Βρεχόμενη περίμετρος*, συμβολίζεται με P και ορίζεται ως το μήκος του στερεού ορίου της διατομής.
- *Υδραυλική ακτίνα*, συμβολίζεται με R και ορίζεται ως το πηλίκο A/P.
- *Υδραυλικό βάθος*, συμβολίζεται με t_μ ή y_μ και ορίζεται ως $t_\mu = A/B$ ή $y_\mu = A/B$.

Τα γεωμετρικά στοιχεία A, B, P, R και t_μ ή y_μ είναι συναρτήσεις της γεωμετρίας της διατομής και του βάθους ροής t ή y.

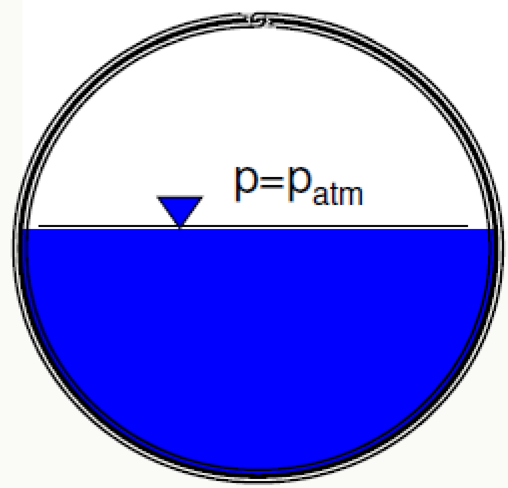
Ανοικτοί αγωγοί: σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια:

- φυσικοί
- τεχνικές κατασκευές

- Natural flows: rivers, creeks, floods, etc.



- Human-made systems: fresh-water aquaducts, irrigation, sewers, drainage ditches, etc.



1. ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑ ΠΟΤΑΜΩΝ

Διαφορές μεταξύ τεχνητών και φυσικών ανοικτών αγωγών

Τεχνητοί ανοικτοί αγωγοί

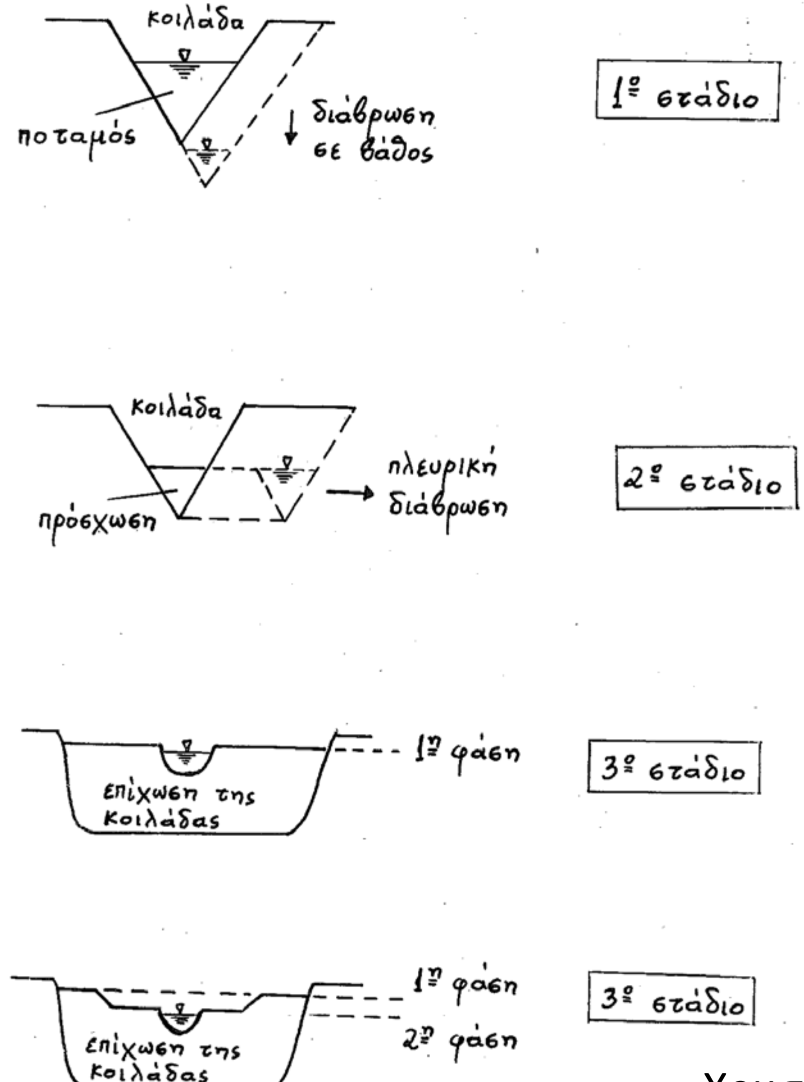
- Σταθερότητα γεωμετρίας της διατομής
- Σταθερότητα τραχύτητας παρειών
- Δεν υπόκεινται σε προσχώσεις και διαβρώσεις
- Δεν υπάρχει υδρόβια βλάστηση

Φυσικοί ανοικτοί αγωγοί

- Ο πυθμένας δεν είναι σταθερός, υπόκειται σε διαβρώσεις και εναποθέσεις φερτών υλών
- Η ροή μεταφέρει σημαντική ποσότητα στερεών υλών σε αιώρηση και ως φορτίο κοίτης

Χρυσάνθου, 2014

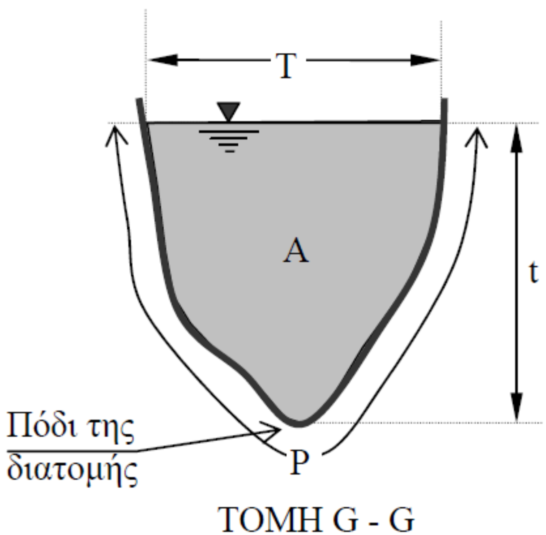
Σχηματισμός ποταμού (σε εγκάρσια τομή)

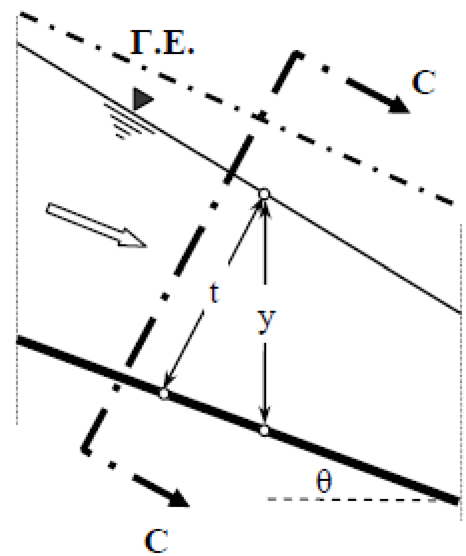


Χρυσάνθου, 2014

Πολυπλοκότητες σε ποτάμια υδραυλική

- Μεταβολή της διατομής
- Ανεπάρκεια επίλυσης μόνο με την κλασσική υδραυλική ανοικτών αγωγών
- Αλληλεπίδραση με τη λεκάνη απορροής
- **Ποτάμι: ζωντανός οργανισμός**
- Απαραίτητα γνωστικά παιδεία: υδραυλική και ειδικευμένη υδραυλική, υδρολογία, ιδιαίτερη αναφορά στο υποσύνολο των φερτών υλικών, παράμετροι ποιότητας νερού, οικολογικές παράμετροι και τελικά τεχνικές λήψης απόφασης





(Παπαϊωάννου, 2010)

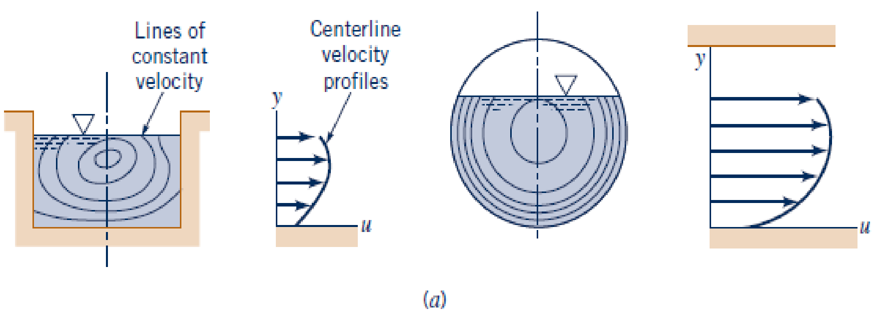
Συνήθως οι ανοικτοί αγωγοί (ιδιαίτερα στα περισσότερα τεχνικά έργα) έχουν μικρές κλίσεις, επομένως το βάθος ροής (ύψος νερού κάθετο στη μέση ταχύτητα, t) είναι περίπου ταυτόσημο με την κατακόρυφη απόσταση από τον πυθμένα έως την ελεύθερη επιφάνεια, y.

Έργα μηχανικού, ήπιες κλίσεις, t(βάθος ροής) και y περίπου ταυτίζονται

Μέση ταχύτητα, είδη διατομής και συντελεστής διόρθωσης

Πραγματικά, μεταβολής της ταχύτητας καθ΄ ύψος

- Με βάση τις οριακές συνθήκες η ταχύτητα στα τοιχώματα των αγωγών είναι μηδέν, επομένως το προφίλ ταχυτήτων αλλάζει καθ΄ ύψος ακόμη και στην ομοιόμορφη ροή



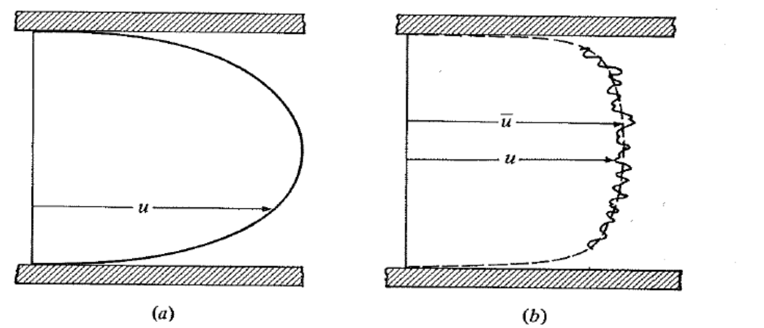
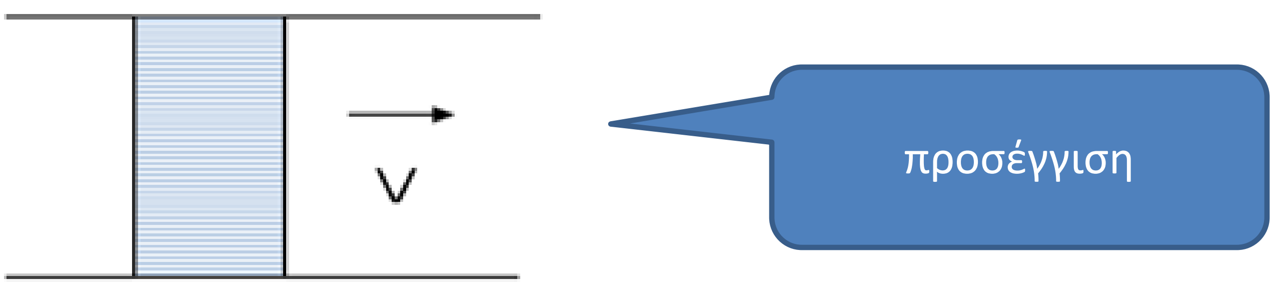


FIGURE 4-4 Laminar and turbulent flow in a pipe. (a) Laminar flow, (b) Turbulent flow.

- απλοποίηση, θεωρούμενο προφίλ ταχυτήτων (μη πραγματικό)



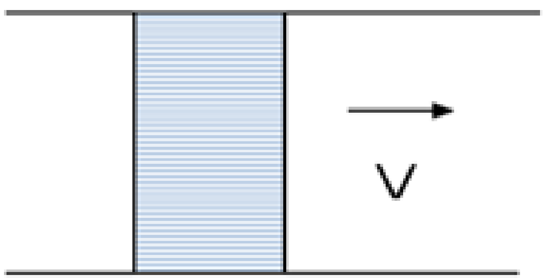
Μέση ταχύτητα

$$Q \underset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=} \overline{V} \cdot A \Leftrightarrow \overline{V} = \frac{Q}{A}$$

- Ορισμός με βάση την παροχή

μονάδα του χρόνου

V: Μέση ταχύτητα είναι η παροχή που διέρχεται ανά μονάδα επιφανείας διατομής $\overline{V} = Q/A = \frac{1}{A}\iint_A u\,dA$ όπου $\boldsymbol{u}$ σημειακή ταχύτητα



π.χ. ορθ. διατομή

$$Q = A \cdot \overline{V} = \int_0^y u(y)\,dA = \int_0^y u(y)(b \cdot dy) = b\int_0^y u(y)\,dy$$

dQ

Ωστόσο, η μέση ταχύτητα δεν είναι πάντα σωστή να τίθεται στην εξίσωση της ενέργειας……

(5)

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας (α)

- Η χρήση της μέσης ταχύτητας καταλήγει στον υπολογισμό κινητικής ενέργειας χαμηλότερης από την πραγματική.

  Γι' αυτό, για τον καθορισμό της πραγματικής κινητικής ενέργειας, ιδίως σε αγωγούς ακανόνιστης διατομής, πρέπει να εφαρμοστεί ο συντελεστής διόρθωσης α.

- $\alpha \frac{v^2}{2g}$: πραγματικό ύψος κινητικής ενέργειας (κινητική ενέργεια ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

  v : μέση ταχύτητα σε μια διατομή

  α : συντελεστής Coriolis

«στριφνό θέμα»
Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας, α

- Μη ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας καθ΄ ύψος, συντελεστής ώστε $\alpha V^2/2g$ να δίνει τη μέση κινητική ανά μονάδα βάρους. Για μόνιμη ροής με βάση την κινητικής ενέργεια που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου:

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{\kappa} &= \alpha \frac{V^2}{2g}(\gamma \cdot A \cdot V) = \alpha \frac{V^3}{2g}\gamma A \\ \dot{E}_{\kappa}' &= \int_A \frac{u^2}{2g}(\gamma \cdot dA \cdot u) = \gamma \int_A \frac{u^3}{2g} dA \end{aligned}\right\} \underset{\dot{E}_{\kappa}=\dot{E}_{\kappa}'}{\Rightarrow} \alpha \frac{V^3}{2\cancel{g}}\cancel{\gamma} A = \cancel{\gamma} \int_A \frac{u^3}{2\cancel{g}} dA \Rightarrow a = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$$

- **Τυρβώδης ροή: α=1.01-1.10, συνήθης εφαρμογές: α=1**

Εγκάρσια διαφοροποίηση ταχύτητας

$$a = \frac{1}{A}\int_{\mathrm{A}}\left(\frac{u}{V}\right)^3 dA = \frac{1}{AV^3}\int_{\mathrm{A}}(u)^3\, dA \approx \frac{1}{AV^3}\left(\sum_{i=1}^{N} A_i V_i^3\right) =$$

$$\frac{1}{QV^2}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i V_i^2\right)$$

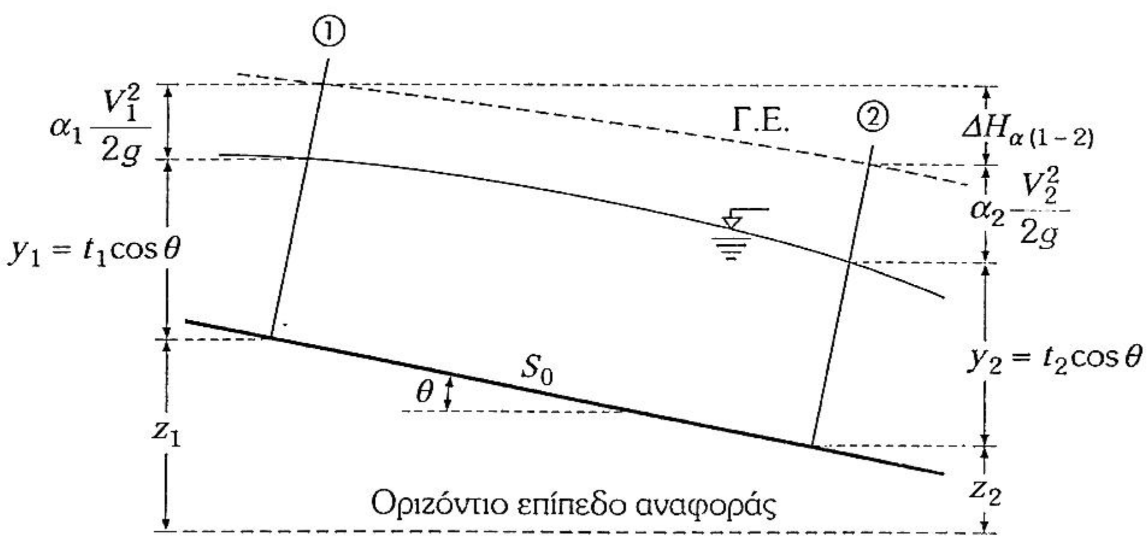
Εξίσωση Ενέργειας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, εφόσον η κατά μήκος κλίση, S_0, του πυθμένα του αγωγού είναι μικρή, ώστε να θεωρηθεί $\cos\theta = 1$, οδηγεί στην εξίσωση:

$$z_1 + y_1 + a_1(V_1^2/2g) = z_2 + y_2 + a_2(V_2^2/2g) + \Delta H_{a(1-2)} \qquad (3.5)$$

όπου: z_i = το υψόμετρο του πυθμένα και a ο συντελεστής συνόρθωσης της κινητικής ενέργειας ο οποίος ορίζεται ως:

$$a = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A V^3 dA}{QV^2} \qquad (3.6)$$



Μόνο για ομοιόμορφη ροή
$y_1 = y_2$
$V_1 = V_2$
$S_0 = S_f$

Σχ. 3.3: *Η εξίσωση ενέργειας σε επιλεγμένο όγκο αναφοράς.*

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας
Πρισματικοί αγωγοί, συνήθως μονάδα

Πίνακας 1.1

Ενδεικτικές τιμές των συντελεστών α και β

Είδος διατομής	α	β
Γεωμετρικού σχήματος	1.10 - 1.20	1.03 - 1.07
Φυσική	1.15 - 1.50	1.05 - 1.17
Ακανόνιστη	1.50 – 2.00	1.17 – 1.33

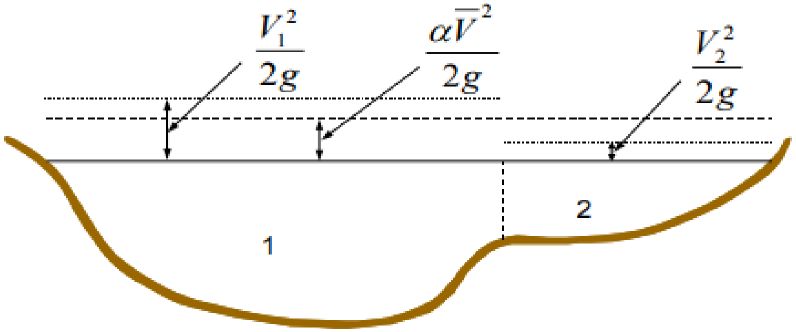
Κινητική ενέργεια   ορμή

Σε φυσικές και ακανόνιστες διατομές οι συντελεστές αυξάνουν, σε τεχνικούς αγωγούς μικρότερη τιμή. Στο μάθημα αν δεν δίνεται διευκρίνιση α = 1

Στο HEC-RAS

Evaluation of the Mean Kinetic Energy Head

Within the 1D river reach segments, only a single water surface and therefore a single mean energy are computed at each cross section. For a given water surface elevation, the mean energy is obtained by computing a flow weighted energy from the three subsections of a cross section (left overbank, main channel, and right overbank). Figure 2-5 below shows how the mean energy would be obtained for a cross section with a main channel and a right overbank (no left overbank area).



V_1 = mean velocity for subarea 1

V_2 = mean velocity for subarea 2

Figure 2-5 Example of How Mean Energy is Obtained

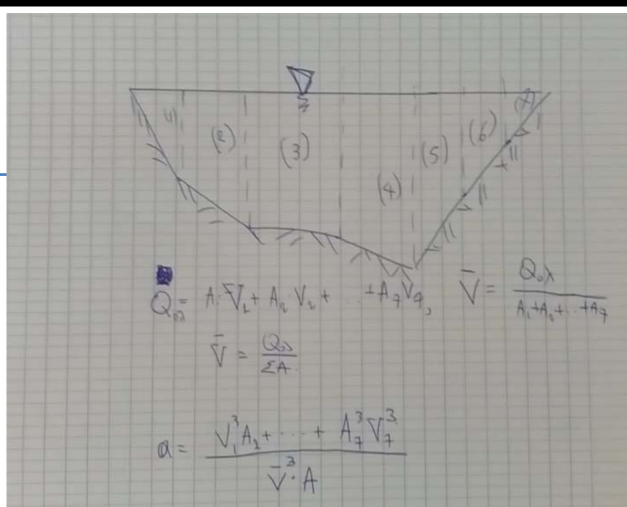
To compute the mean kinetic energy it is necessary to obtain the velocity head weighting coefficient alpha. Alpha is calculated as follows:

Mean Kinetic Energy Head = Discharge-Weighted Velocity Head

$$\alpha \frac{\overline{V}^2}{2g} = \frac{Q_1 \frac{V_1^2}{2g} + Q_2 \frac{V_2^2}{2g}}{Q_1 + Q_2} \tag{2-7}$$

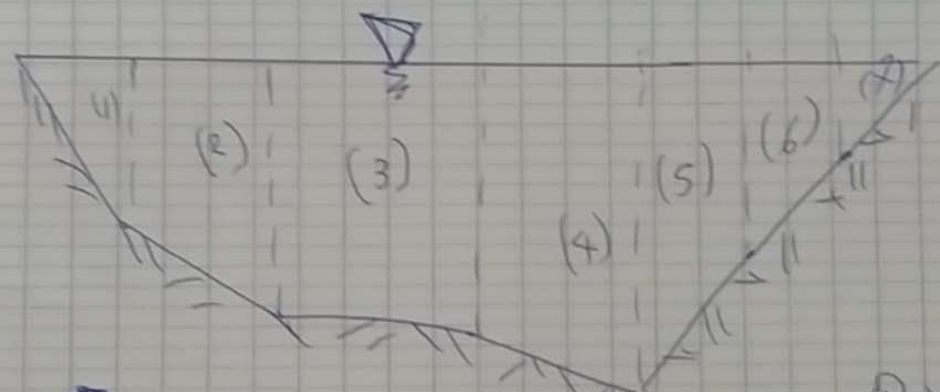
Εφαρμογή

	Διατομή		ταχύτητα		παροχή		
	A		V		V*A		V^3*A
1	11,15		0,37		4,08		0,55
2	50,17		0,44		21,87		4,15
3	81,75		0,70		57,31		28,17
4	85,47		0,74		63,04		34,30
5	74,32		0,77		57,09		33,68
6	44,59		0,59		26,10		8,94
7	7,43		0,29		2,15	VMEAN	0,18
Αολ	***354,89***			***Q***	***231,64***	***0,65***	***109,97***



ΣV^3*A/(VI

a	1,11



$$Q_{o\lambda} = A_1 V_1 + A_2 V_2 + \dots + A_7 V_7, \qquad \bar{V} = \frac{Q_{o\lambda}}{A_1 + A_2 + \dots + A_7}$$

$$\bar{V} = \frac{Q_{o\lambda}}{\Sigma A}$$

$$\alpha = \frac{V_1^3 A_1 + \dots + A_7 V_7^3}{\bar{V}^3 \cdot A}$$

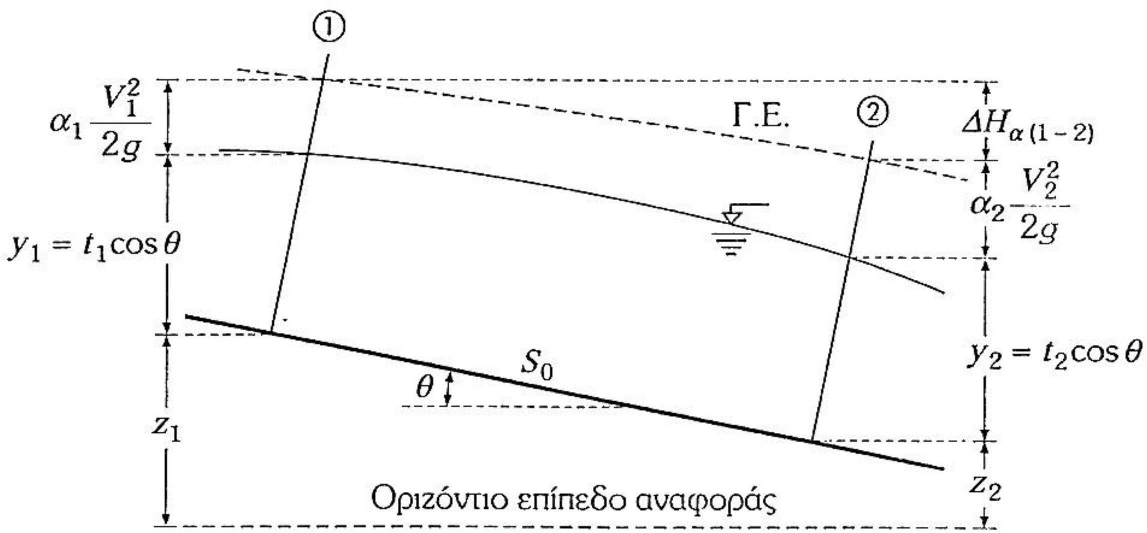
Εξίσωση Ενέργειας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, εφόσον η κατά μήκος κλίση, S_0, του πυθμένα του αγωγού είναι μικρή, ώστε να θεωρηθεί $\cos\theta = 1$, οδηγεί στην εξίσωση:

$$z_1 + y_1 + a_1(V_1^2/2g) = z_2 + y_2 + a_2(V_2^2/2g) + \Delta H_{a(1-2)} \qquad (3.5)$$

όπου: z_i = το υψόμετρο του πυθμένα και a ο συντελεστής συνόρθωσης της κινητικής ενέργειας ο οποίος ορίζεται ως:

$$a = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A V^3 dA}{QV^2} \qquad (3.6)$$



Σχ. 3.3: *Η εξίσωση ενέργειας σε επιλεγμένο όγκο αναφοράς.*

Μόνο για ομοιόμορφη ροή
$y_1 = y_2$
$V_1 = V_2$
$S_0 = S_f$

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας
Πρισματικοί αγωγοί, συνήθως μονάδα

Πίνακας 1.1

Ενδεικτικές τιμές των συντελεστών α και β

Είδος διατομής	α	β
Γεωμετρικού σχήματος	1.10 - 1.20	1.03 - 1.07
Φυσική	1.15 - 1.50	1.05 - 1.17
Ακανόνιστη	1.50 – 2.00	1.17 – 1.33

Κινητική ενέργεια   ορμή

Σε φυσικές και ακανόνιστες διατομές οι συντελεστές αυξάνουν, σε τεχνικούς αγωγούς μικρότερη τιμή. Στο μάθημα αν δεν δίνεται διευκρίνιση α = 1

Πίνακας 3.3

Επιτρεπόμενα όρια μεγίστων και ελαχίστων ταχυτήτων και κλίσεις πρανών σε διάφορες περιπτώσεις ανοιχτών αγωγών

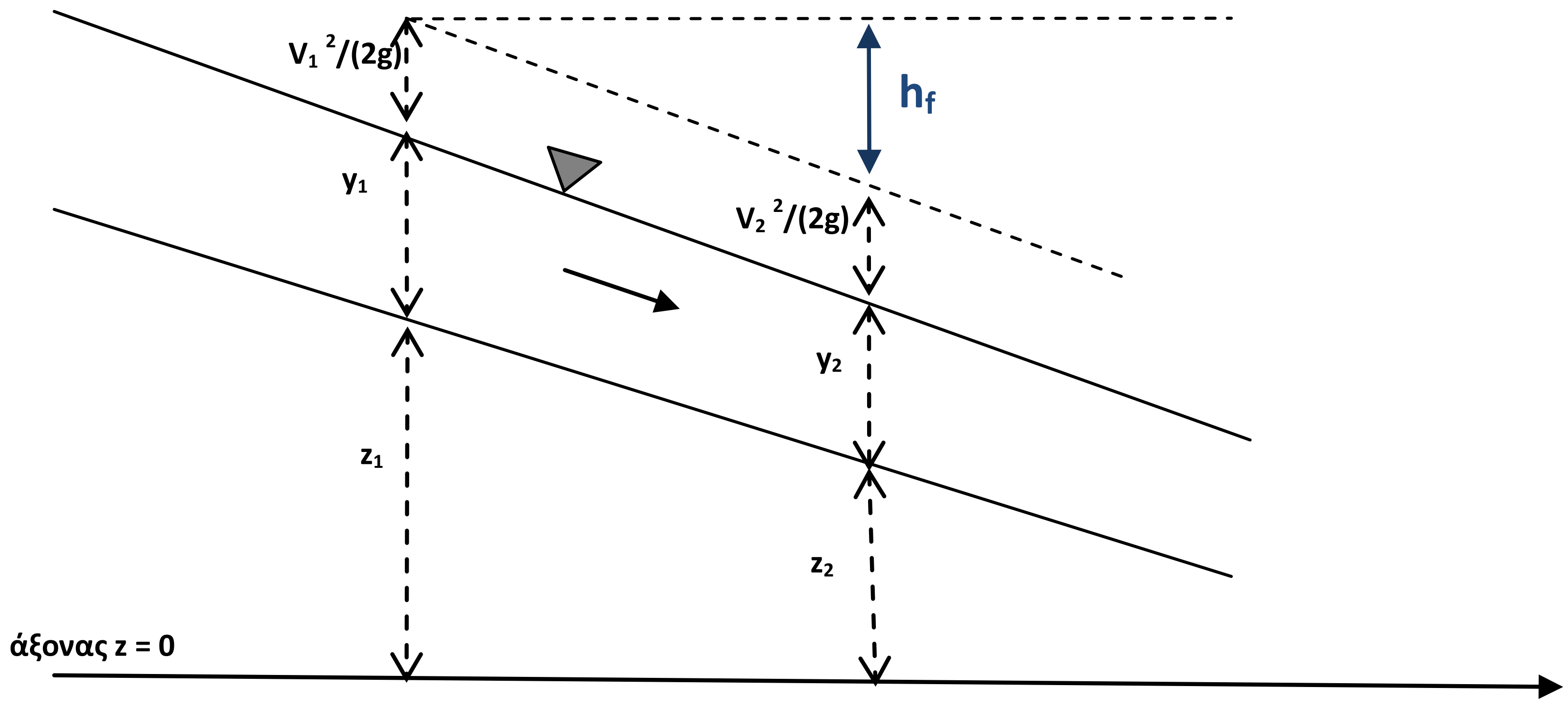
ΜΕΓΙΣΕΣ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ			
α/α	Σύσταση αρχικού υλικού κοίτης	Καθαρό νερό [m/s]	Νερό που μεταφέρει άμμο ή χαλίκια [m/s]
1	Λεπτή άμμος	0.45	0.45
2	Ιλυώδες έδαφος	0.60	0.60
3	Συμπαγής άργιλλος	0.75	0.70
4	Πολύ σκληρή άργιλλος	1.80	1.50
5	Λεπτά χαλίκια	0.75	1.15
6	Λίθοι	1.50	2.00

ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΕΣ ΤΑΧΥΤΗΤΕΣ		
α/α	Σύσταση νερού	Ταχύτητα ροής [m/s]
1	Νερά βορβορώδη	0.35-0.40
2	Νερά που μεταφέρουν λεπτή άμμο	0.60-0.65
3	Νερά πόσιμα	0.50-0.65
4	Νερά στάσιμα που αποχετεύονται	0.65-0.80

Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Ολικό ύψος ενέργειας:

- **Βάθος ροής**
- **Ύψος ταχύτητας**
- **Ύψος θέσης**

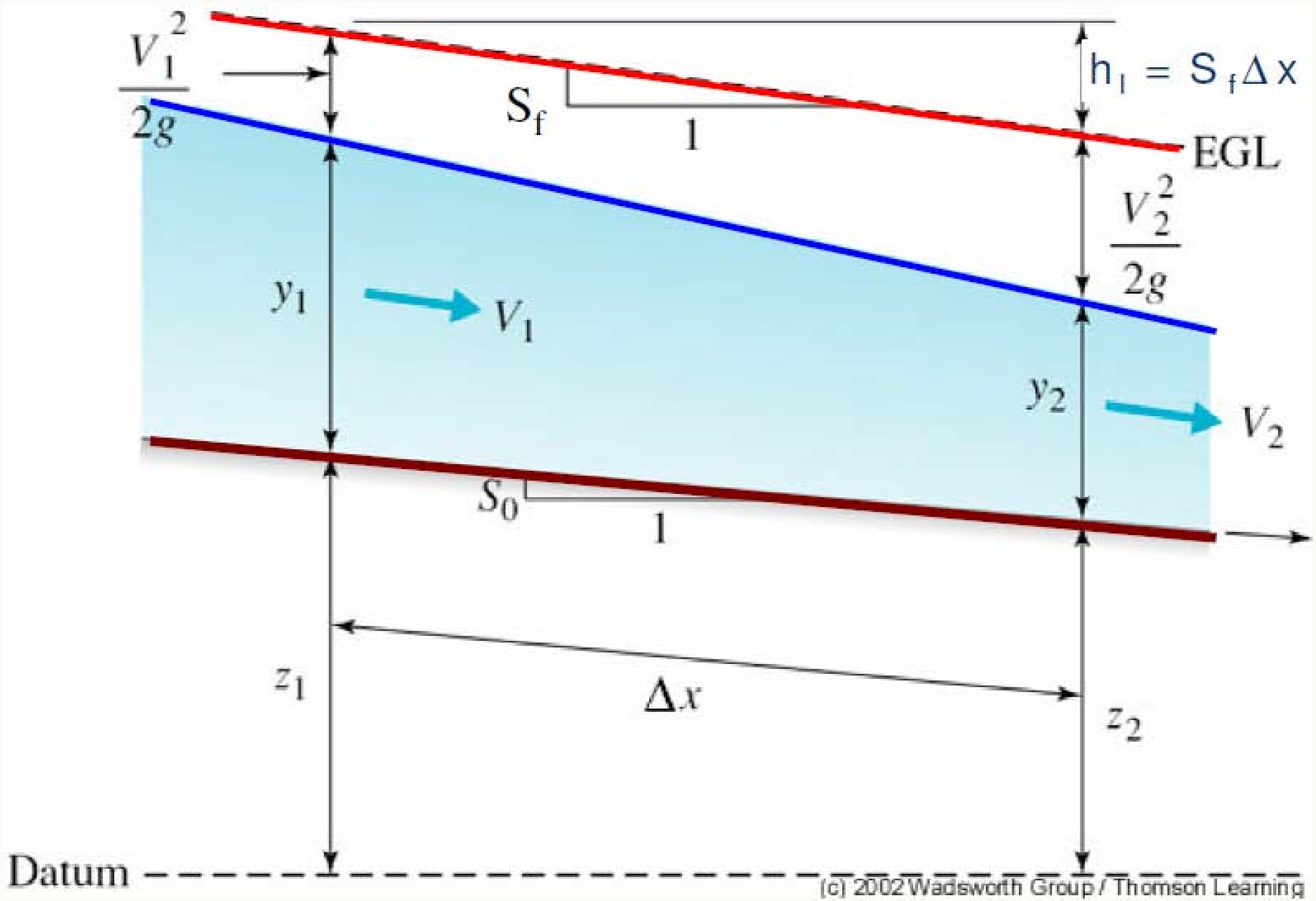


Σχ. Σκαρίφημα που δείχνει την αρχή διατήρησης της ενέργειας για ένα τμήμα του ανοικτού αγωγού αγωγού 1- 2.

Γραμμή ενέργειας: νοητή γραμμή πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια, πτωτική

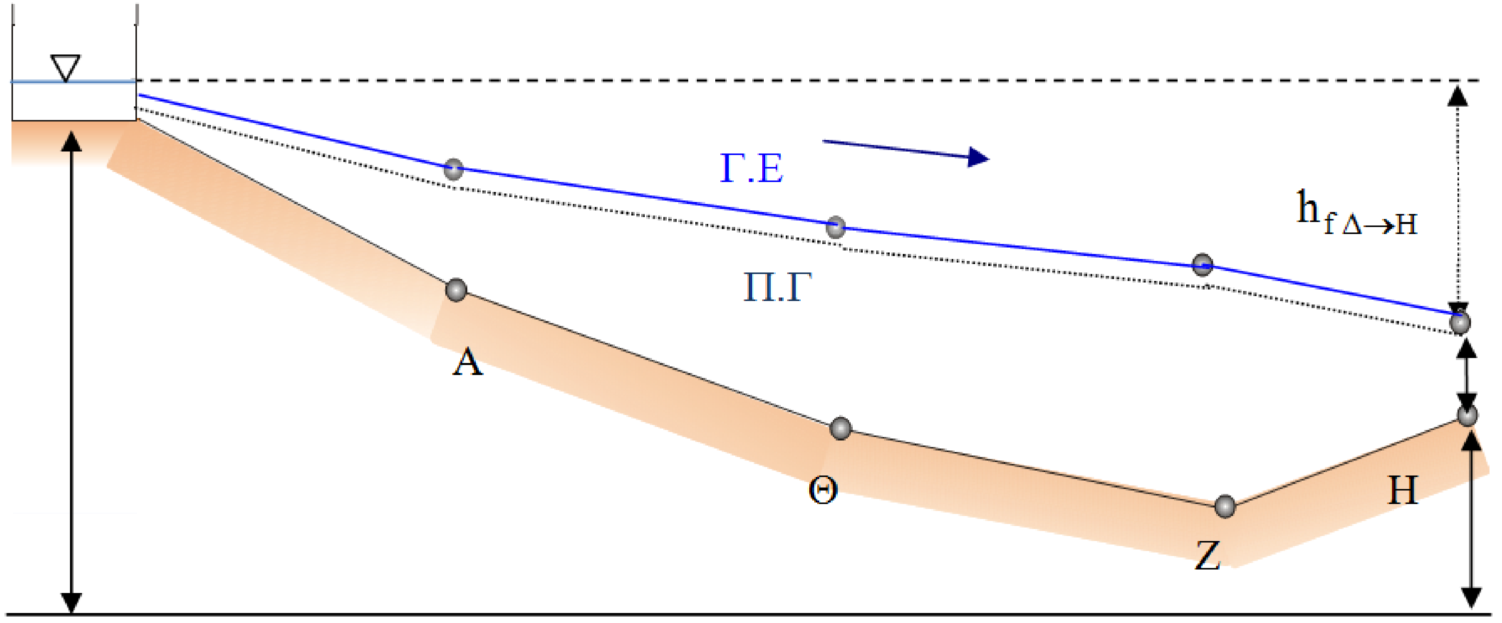
Ειδική ενέργεια= βάθος ροής + κινητική ενέργεια

Non-uniform gradually varied flow. $S_f \neq S_w \neq S_o$



Γραμμή ενέργειας σε ένα αγωγό (χωρίς αντλία)

- Γραμμή ενεργείας: ο γεωμετρικός τόπος του ύψος θέσης, του ύψους πίεσης και του ύψους κινητικής ενέργειας
- Πάντοτε πτωτική από τη διατήρηση της ενέργειας
- Δεν ισχύει πάντα το ίδιο για την Π.Γ. (βλπ. Επ. μάθημα)



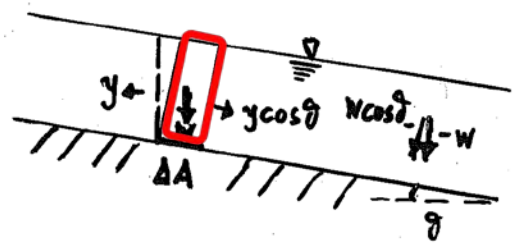
Σχ Ενεργειακή διαδρομή από την υψομετρική θέση της δεξαμενής, στο Η

Παγίδα

- Η γραμμή ενέργειας είναι πάντα πτωτική
- Η διατήρηση της ενέργειας είναι η βασική αρχή και ισχύει πάντοτε
- Η **πιεζομετρική γραμμή** των κλειστών αγωγών και η **ειδική ενέργεια** στους ανοικτούς αγωγούς διατηρείτε κάτω από ειδικές προϋποθέσεις.

Περισσότερη λεπτομέρεια για την πίεση σημαντικό για μεγάλες κλίσεις

Παράλληλη ροή σε κεκλιμένο αγωγό



w: κατακόρυφη δύναμη βάρους

Εύρεση πίεσης στο πυθμένα από ισορροπία δυνάμεων

- Όγκος νερού: $\Delta A \cdot y\cos\vartheta$
- Βάρος νερού: $w = \rho g \cdot \Delta A \cdot y\cos\vartheta$
- Συνιστώσα του βάρους κάθετη προς τον πυθμένα:

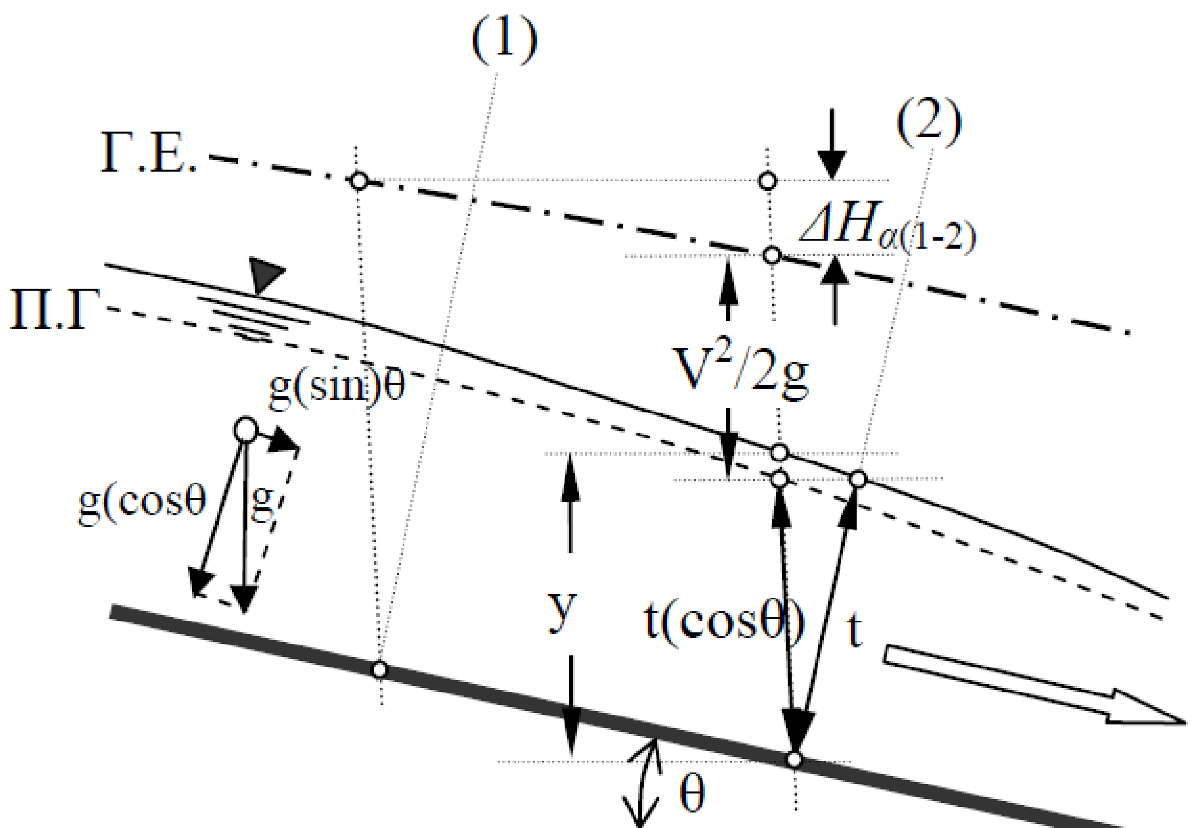
$$w\cos\vartheta = (\rho g \cdot \Delta A \cdot y\cos\vartheta)\cos\vartheta$$

- Πίεση στον πυθμένα (επιφάνεια ΔΑ) λόγω του υπερκείμενου βάρους νερού:

$$p = \frac{(\rho g \cdot \Delta A \cdot y\cos\vartheta)\cos\vartheta}{\Delta A} = \rho g y \cos^2\vartheta \qquad \boxed{p = \rho g y \cos^2\vartheta}$$

- Όταν ϑ μικρή $\Rightarrow \cos\vartheta \simeq 1.0 \Rightarrow \boxed{p = \rho g y}$

Πιεζομετρική γραμμή, διατήρηση της ενέργειας μεταξύ επιφανειών κάθετες
'



Διατήρηση της ενέργειας

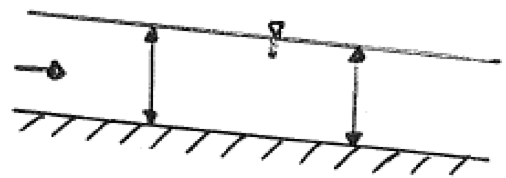
$$H_1 = H_2 + \Delta H_{a(1-2)}, \; H = \frac{p}{\rho g} + z + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

$$H = y \cos^2 \theta + z + \alpha \frac{V^2}{2g} \approx y + z + \alpha \frac{V^2}{2g} .$$

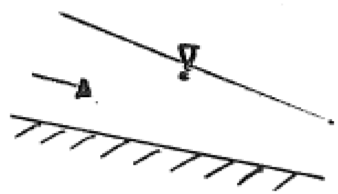
Στο μάθημα αν δεν δίνεται διευκρίνιση α= 1 (τεχνικά κανάλια) και cosθ κοντά στη μονάδα (ήπιες κλίσεις)

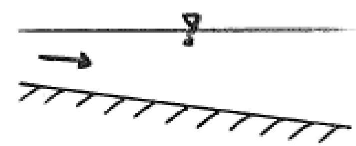
Είδη ροής

Ομοιόμορφη : Ταχύτητα του νερού σταθερή,
Βάθος νερού σταθερό
από διατομή σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού παράλληλη προς τον
πυθμένα



Ανομοιόμορφη: Μεταβαλλόμενο βάθος από διατομή
σε διατομή ⇒
Επιφάνεια νερού μη παράλληλη προς
τον πυθμένα





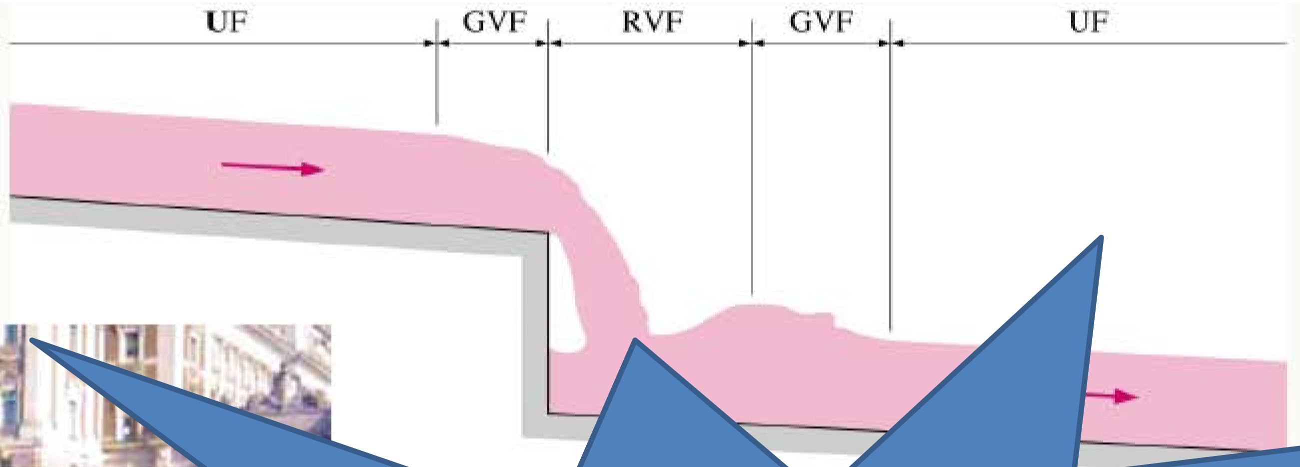
Βαθμιαία μεταβολή

Ταχεία (απότομη μεταβολή)

Στο παρακάτω σχήμα λαμβάνει χώρα:

1. Ομοιόμορφη ροή
2. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή
3. Ταχέως μεταβαλλόμενη ροή
4. Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή
5. Ομοιόμορφη ροή

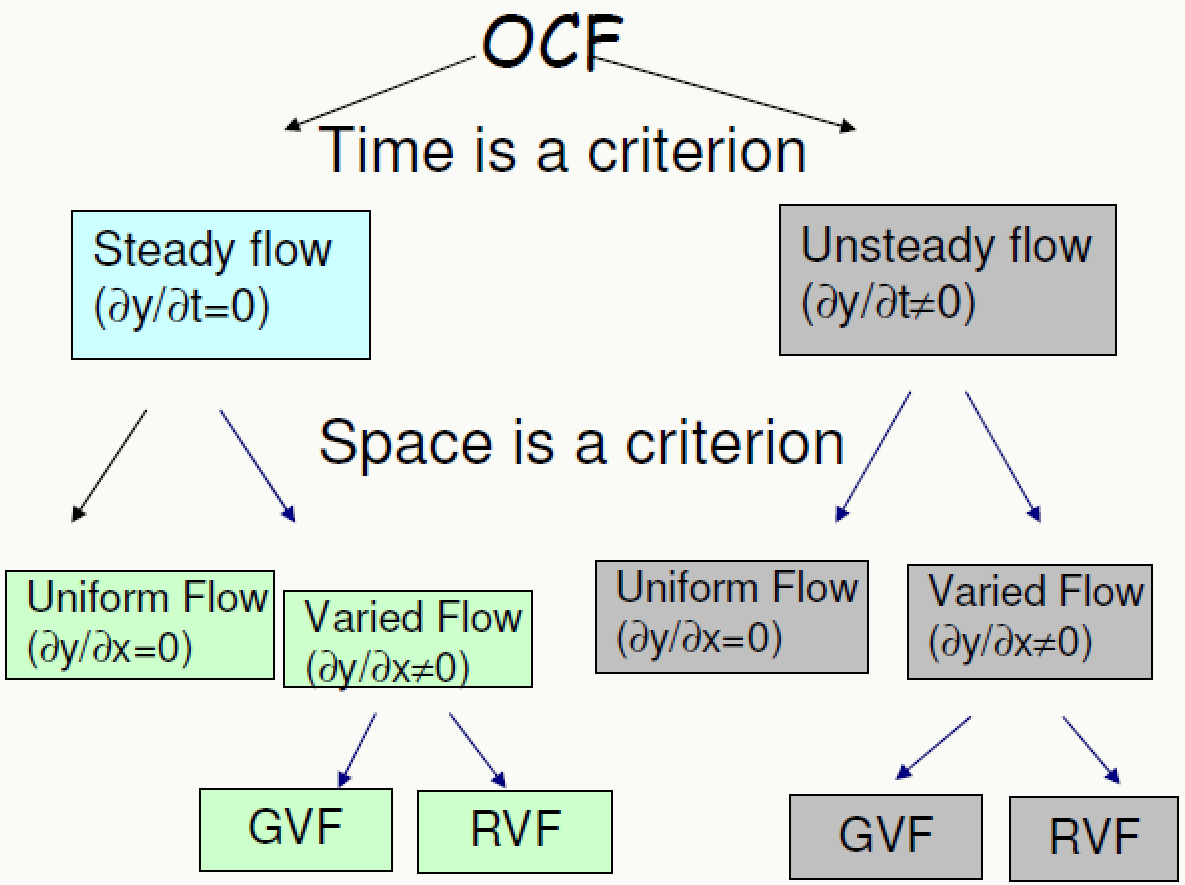
Η ροή είναι μόνιμη



Ομοιόμορφη ροή: σταθερό βάθος ροής
(άρα και ταχύτητα)
Βραδέως μεταβαλλόμενη ροή:
χαρακτηρίζεται από αργή μεταβολή προφίλ
(«ημί-ομοιόμορφη ροή»)
Ταχέως μεταβαλλόμενο προφίλ της
ελεύθερης επιφανείας στη ταχέως
μεταβαλλόμενη ροή

Types of Flow

- Criterion: Change in flow depth with respect to time and space



Ομοιόμορφη ροή

Ομοιόμορφη ροή: Σταθερό βάθος ροής και ταχύτητα σε διατομή

Ισορροπία οριζόντιας συνιστώσας του βάρους και τριβών. Μηδενική επιτάχυνση

Προσέγγιση (Μόνιμη) **Ομοιόμορφης ροής**

Προϋποθέσεις

- Ισορροπία δυνάμεων
- Μη μεταβολή της διατομής
- Μη μεταβολή της τραχύτητας των στερεών ορίων

Uniform flow

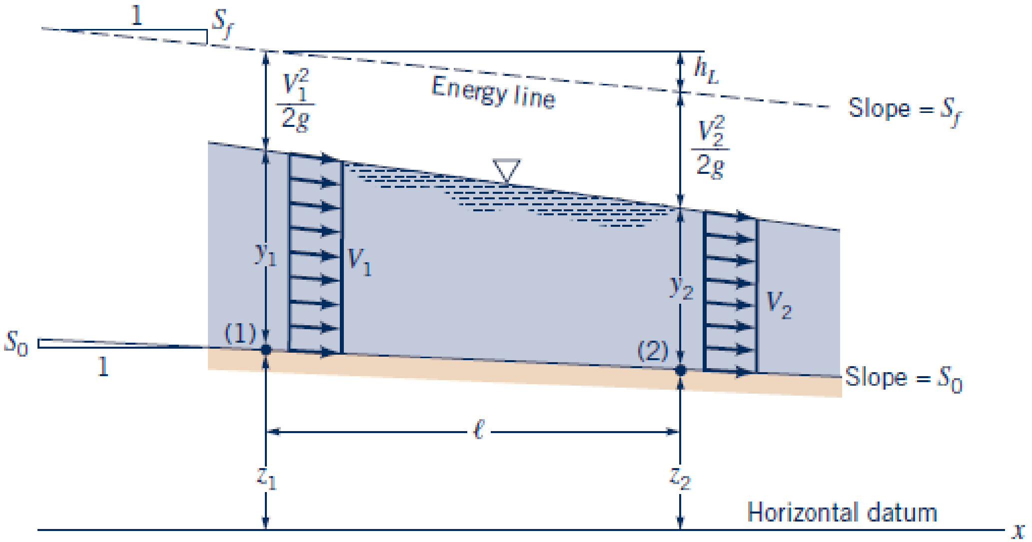


Figure 10.6 Typical open-channel geometry.

Ομοιόμορφη

ανομοιόμορφη ροή

Ομοιόμορφη ροή, ανοικτοί αγωγοί

Σύμφωνα με τον ορισμό η ροή είναι ομοιόμορφη όταν το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό κατά μέγεθος και διεύθυνση σε όλο το μήκος του αγωγού. Κατά συνέπεια ισχύει : $dV/dx = 0$. Η ομοιόμορφη ροή

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dQ}{dx}=0 \\ \text{Αλλά : } &\frac{dQ}{dx}=\frac{d(V\,A)}{dx}=V\frac{dA}{dx}+A\frac{dV}{dx}=V\frac{dA}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dA}{dx}=0$$

Για σταθερή διατομή αυτό ισχύει όταν:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{dA}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

και η **εξίσωση συνέχειας** εκφυλίζεται σε :

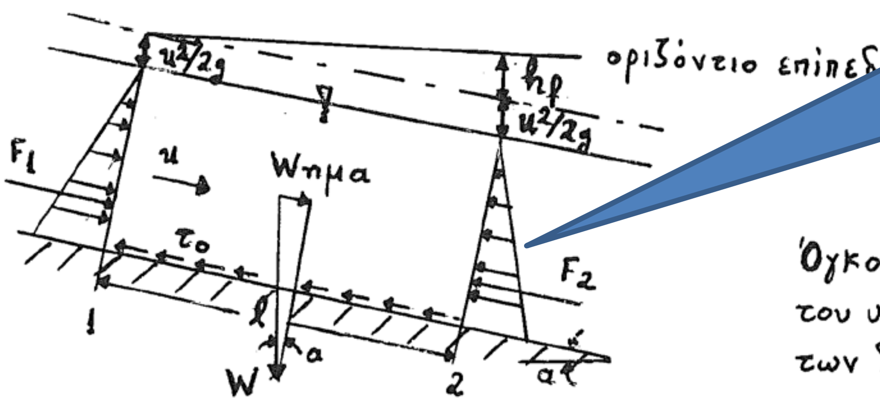
$$\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=y_o} = \text{σταθερό}$$

Το y_o ονομάζεται **ομοιόμορφο ή κανονικό βάθος** ροής.

4. ΣΤΑΘΕΡΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

- Βάθος ροής : σταθερό
- Διατομή της υγρής επιφάνειας : σταθερή
- Τραχύτητα της επιφάνειας των στερεών ορίων : σταθερή
- Κλίση πυθμένα = Κλίση ελεύθερης επιφάνειας
- Κανονικές συνθήκες (κανονικό βάθος, κανονική κλίσ

Οι δυνάμεις λόγω πίεσης αλληλοεξουδετερώνονται στην ομοιόμορφη ροή (διαφορά με κλειστούς αγωγούς)



Όγκος ελέγχου του υγρού μεταξύ των διατομών 1 και 2

F_1, F_2 : υδροστατικές δυνάμεις

W : Βάρος του υγρού

τ_o : μέση διατμητική τάση στα τοιχώματα

Χρυσάνθου, 2014

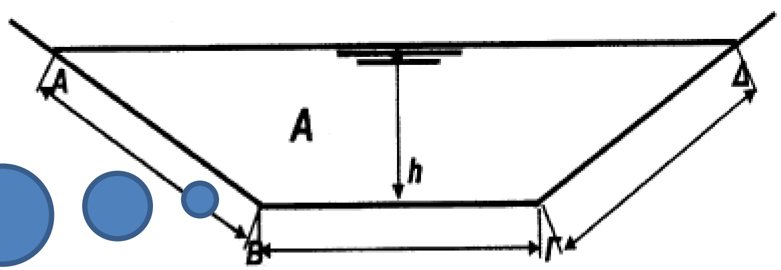
Συνθήκη

Διατμητική τάση, ανοικτή αγωγοί, ομοιόμορφη ροή

Εάν η μέση διατμητική τάσις η επενενεργούσα εις τα τοιχώματα είναι $\tau_o \, (N/m^2)$, τότε η ολική δύναμις $F_o \, (N)$ δίδεται υπό του γινομένου τ_o επί του εμβαδού της επιφανείας επί της οποίας ενεργεί, δηλαδή,

$$F_o = \tau_o P l \tag{4.1}$$

Σχόλιο:
Όλη η βρεχόμενη περίμετρος συνυπολογίζεται κατά τον προσδιορισμό της δύναμης λόγο τριβών



Σχήμα 4.2 Υγρά διατομή A, βρεχομένη περίμετρος P και υδραυλική ακτίς R

Σούλης, 2014

Διατμητική τάση πυθμένα τ_0

Συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων :

$$W \eta\mu\alpha = \tau_o P l$$

$$A l \rho g \, \eta\mu\alpha = \tau_o P l$$

$$\tau_o = \frac{A}{P} \rho g \, \eta\mu\alpha$$

$$\eta\mu\alpha = \frac{h_f}{l} = S_o$$

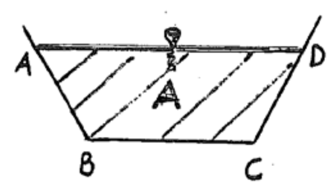
$$\tau_o = \frac{A}{P} \rho g S_o$$

$$\tau_o = \rho g R S_o$$

P : βρεχομένη περίμετρος

A : υγρή διατομή (επιφάνεια)

$R = \frac{A}{P}$ ⇒ υδραυλική ακτίνα



$P = (AB) + (BC) + (CD)$

Συνδυασμός σχέσεων για τον προσδιορισμό της ταχύτητας

- Ισχύει:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\underset{C}{\left(\frac{f}{4}\right)}\rho V^2$$

Διατμητική τάση στο πυθμένα ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας

- Επομένως

$$\rho g R S_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{4}\right)\rho V^2 \Leftrightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{8}{f} g R S_0} = \left(\sqrt{\frac{8}{f} g} \cdot\right) R^{1/2} S_0^{1/2}$$

Εξίσωση Chezy

- Ταχύτητα ροής:

$$V = C \,\acute{o}R^{1/2} \cdot S_0^{1/2}\,, \; g\pi o\upsilon C \left(\sqrt{\frac{8}{f}}\right)^{o\rho} = \qquad \left(\sqrt{\frac{8}{f}\,g\,\cdot}\right)$$

C : συντελεστής του Chézy

f = συνάρτ. $\left(Re, \frac{k}{R}\right)$

C = συνάρτ. $\left(Re, \frac{k}{R}\right)$

k : τραχύτητα των τοιχωμάτων

$\frac{k}{R}$: σχετική τραχύτητα

Chezy→ Manning (εφαρμογή σε ασκήσεις)

- Ο Manning, 1891 πρότεινε για την σταθερά του Chezy:

$$\frac{R^{1/6}}{n} = C$$

- Οπότε η εξίσωση του Chezy θα γίνει τότε:

Εξίσωση Manning

$$\boxed{u = \frac{1}{n} R^{2/3} S_o^{1/2}} \qquad C = \frac{R^{1/6}}{n}$$

n : συντελεστής Manning $\left[\frac{T}{L^{1/3}} \right]$
(από πίνακες ανάλογα με την τραχύτητα)

$K_{ST} = \frac{1}{n}$ (γερμανική βιβλιογραφία)

Λόγω της συσσωρευμένης εμπειρίας όμως, περισσότερο δημοφιλής είναι η απλοποιημένη σχέση, η οποία αποδίδεται στον R. Manning και γι' αυτό ονομάζεται και τύπος του Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} \tag{3.9}$$

όπου: n = ο συντελεστής τραχύτητας γνωστός ως συντελεστής Manning, με διαστάσεις $(s/m^{1/3})$, ο οποίος αποτελεί έκφραση της τραχύτητας του στερεού ορίου και συνδέεται με το συντελεστή f των Darcy-Weisbach με τη σχέση:

$$f = (8gn^2)/R^{1/3} \tag{3.10}$$

Οι τιμές του συντελεστή n λαμβάνονται από πίνακες που έχουν δημοσιευθεί σε πληθώρα βιβλίων. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τις τιμές του συντελεστή n για μια σειρά υλικά από τα οποία αποτελείται ο ανοικτός αγωγός. Σημειώνεται ότι επειδή ο συντελεστής n δεν είναι αδιάστατος αριθμός, κατά τη χρήση του τύπου Manning η ταχύτητα πρέπει να εκφράζεται σε m/s, η υδραυλική ακτίνα σε m και η παροχή σε m^3/s.

Το γεγονός ότι εδώ η ροή πραγματοποιείται με ελεύθερη επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα η υγρή διατομή, A, να εξαρτάται εκτός από τη γεωμετρία της διατομής και από τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή σε σχέση με τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση υπάρχει ένα επιπλέον άγνωστο μέγεθος που πρέπει να υπολογιστεί.

Ο υπολογισμός του ομοιόμορφου βάθους, y_0, γίνεται με χρήση της εξίσωσης Manning και της εξίσωσης συνέχειας, άρα:

$$Q = (1/n) A R^{2/3} S_0^{1/2} \tag{3.11}$$

Αν είναι γνωστά: η παροχή Q (m^3/s), η γεωμετρία του αγωγού, ο συντελεστής n και η κατά μήκος κλίση S_0, τότε:

Τσακίρης, 2015

$$AR^{2/3} = (nQ)/S_0^{1/2} = \text{γνωστό} \tag{3.12}$$

Συντελεστής Manning

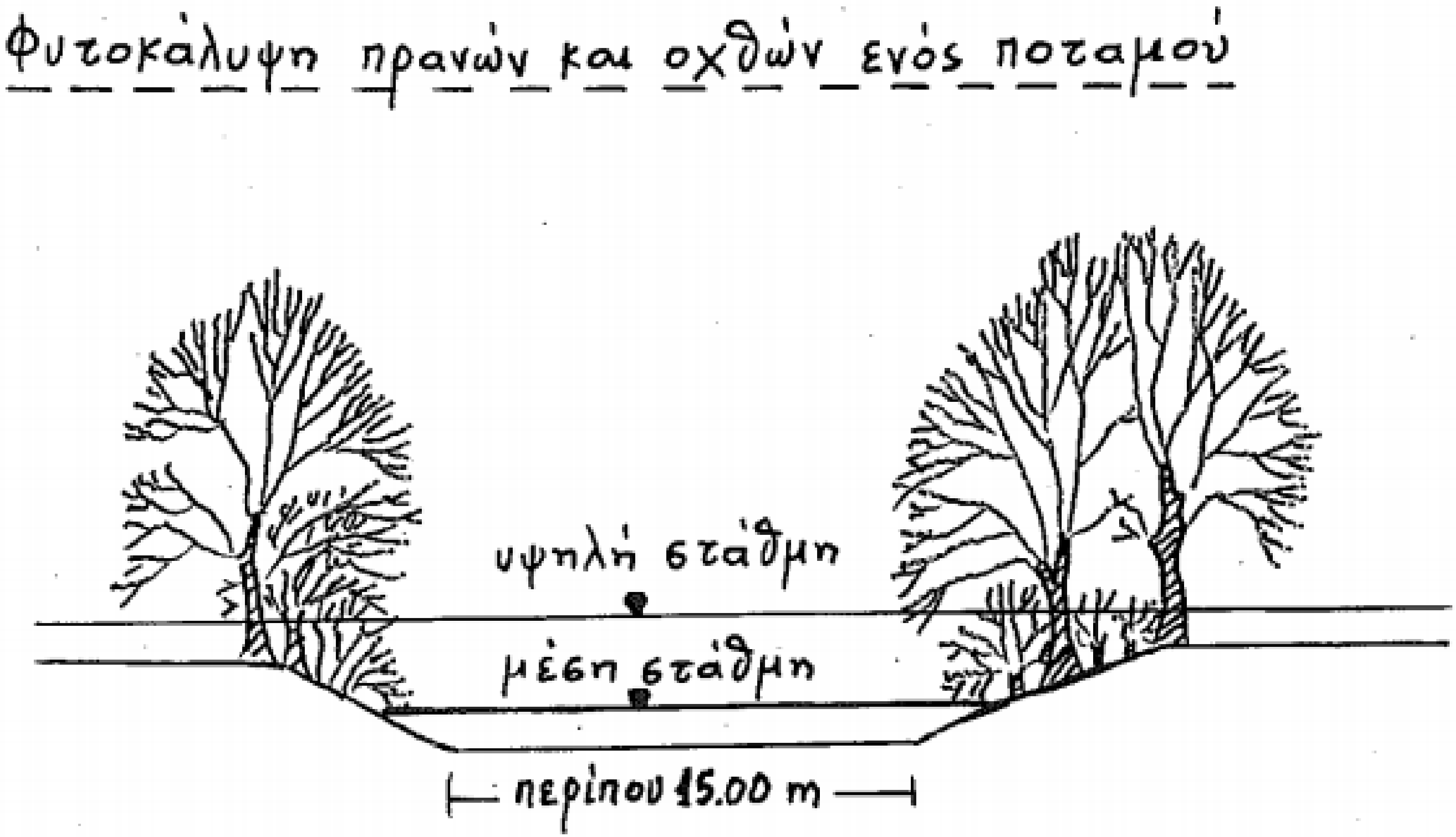
- Δεν είναι αδιάστατος
- Εξαρτάται από το ποσοστό πλήρωσης
- Εξαρτάται από το είδος της παρόχθιας βλάστησης αλλά και την ταχύτητα
- Στο μάθημα της Υδραυλικής έστω σταθερός για κάποιο πρόβλημα
- Παράγοντας αβεβαιότητας
- Κύρια επιλέγεται με βάση το υλικό πλήρωσης της διατομής, βιβλιογραφικά (από πίνακες και φωτογραφίες)
- Εναλλακτικά αρχικά θεωρούμε το n πρισματικού λείου αγωγού και κατόπιν αυξάνεται ανάλογα των ανωμαλιών του αγωγού, μεταβολή σχήματος, ύπαρξη εμποδίων στη ροή, βλάστηση, αλλαγή διευθύνσεων κ.ά

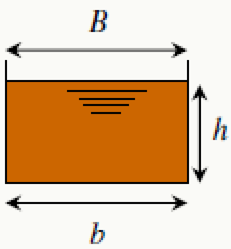
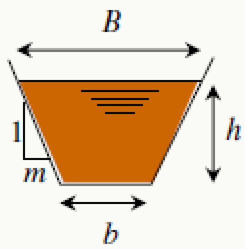
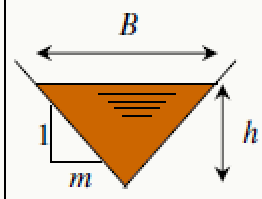
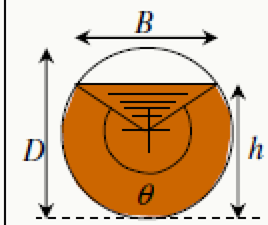
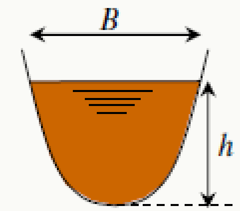
http://www.fhwa.dot.gov/bridge/wsp2339.pdf

Πίν. 3.2: *Συντελεστές Manning n για διάφορα υλικά*

Μέταλλο λείο	0.011 - 0.015
Μέταλλο, αυλακωτό	0.023 - 0.025
Ξύλο, κατεργασμένο	0.010 - 0.015
Ξύλο, ακατέργαστο	0.011 - 0.015
Τσιμέντο λείο	0.010 - 0.013
Σκυρόδεμα	0.014 - 0.016
Τσιμεντοχάλικο	0.017 - 0.030
Γρασίδι	0 > 0.020

Μεταβλητό η σε διατομή σε πλημμυρική κοίτη
δυσκολία προσδιορισμού



	rectangular	trapezoidal	triangular	circular	parabolic
					
flow area A	bh	$(b+mh)h$	mh^2	$\frac{1}{8}(\theta-\sin\theta)D^2$	$\frac{2}{3}Bh$
wetted perimeter P	$b+2h$	$b+2h\sqrt{1+m^2}$	$2h\sqrt{1+m^2}$	$\frac{1}{2}\theta D$	$B+\frac{8}{3}\frac{h^2}{B}$ *
hydraulic radius R_h	$\frac{bh}{b+2h}$	$\frac{(b+mh)h}{b+2h\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{mh}{2\sqrt{1+m^2}}$	$\frac{1}{4}\left[1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right]D$	$\frac{2B^2h}{3B^2+8h^2}$ *
top width B	b	$b+2mh$	$2mh$	$(\sin\theta/2)D$ or $2\sqrt{h(D-h)}$	$\frac{3}{2}\frac{A}{h}$
hydraulic depth D_h	h	$\frac{(b+mh)h}{b+2mh}$	$\frac{1}{2}h$	$\left[\frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta/2}\right]\frac{D}{8}$	$\frac{2}{3}h$

Μία εναλλακτική μέθοδος για την επιλογή του συντελεστή n είναι ή μέθοδος του Cowan (1956). Η μέθοδος περιλαμβάνει την επιλογή μιας αρχικής τιμής βά-

Πίνακας 6.3: *Τιμές για τον προσδιορισμό του n με τη μέθοδο Cowan (1956).*

Συνθήκες αγωγού			**Τιμή**
Υλικό	Χώμα	n_0	0.02
	Βράχος		0.025
	Λεπτό Χαλίκι		0.024
	Χοντρό Χαλίκι		0.028
Βαθμός Ανομοιομορφίας	Ήπιος	n_1	0.000
	Μέτριος		0.005
	Μέσος		0.010
	Σημαντικός		0.020
Μεταβολές στη διατομή	Βαθμιαίες	n_2	0.000
	Εναλλασσόμενες σπάνια		0.005
	Εναλλασσόμενες συχνά		0.010 - 0.015
Επίδραση εμποδίων	Αμελητέα	n_3	0.000
	Μικρή		0.010 – 0.015
	Μέση		0.025 – 0.050
	Μεγάλη		0.040 – 0.060
Βλάστηση	Χαμηλή	n_4	0.005 – 0.010
	Μέση		0.010 – 0.025
	Υψηλή		0.025– 0.050
	Πολύ Υψηλή		0.050 – 0.1
Βαθμός μαιανδρισμού	Μικρός	M_5	1.000
	Μέσος		1.150
	Μεγάλη		1.300

Προσδιορισμός n σε φυσικά υδατορέματα

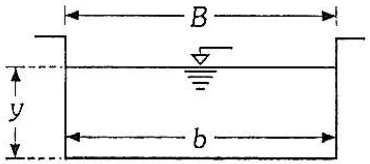
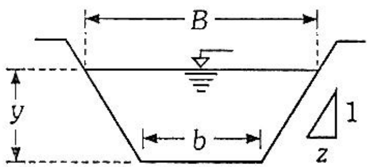
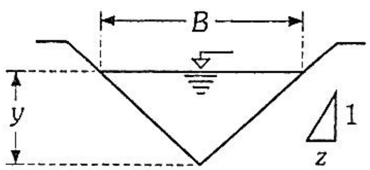
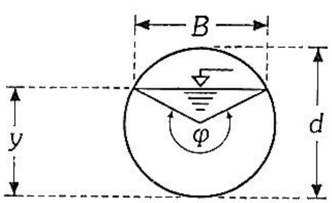
ροης και του μαιανδρισμού του αγωγού. Με τη μέθοδο αυτής ή τιμή του n υπολογίζεται όπως

$$n=(n_0+n_1+n_2+n_3+n_4)M_5$$

όπου $n_0 =$ βασική τιμή, $n_1 =$ τιμή διόρθωσης λόγω διαφορετικής τραχύτητας στον πυθμένα και στα πρανή, $n_2 =$ τιμή διόρθωσης για μεταβολή στο σχήμα και στο μέγεθος της διατομής κατά μήκος της ροής, $n_3 =$ τιμή διόρθωσης για τυχόν εμπόδια που υπάρχουν στη διατομή (βράχοι, δέντρα κλπ), $n_4 =$ τιμή διόρθωσης για τη βλάστηση και τις συνθήκες ροής, $M_5 =$ τιμή διόρθωσης για τον μαιανδρισμό του αγωγού, που ορίζεται σαν ο λόγος του μήκους κατά μήκος του κεντρικού άξονα του αγωγού (μεταξύ δύο σημείων) ως προς το μήκος της ευθείας γραμμής που ενώνει τα δύο αυτά σημεία.

Πρίνος, 2014

Πίν. 3.1: *Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών*

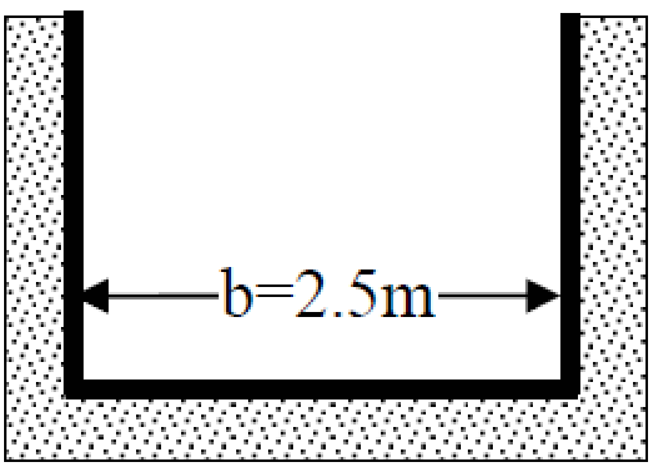
Διατομή	Επιφάνεια A	Βρεχ. περίμετρος P	Υδραυλική ακτίνα $R = A/P$	Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας B	Υδραυλικό βάθος $y_\mu = A/B$	Αριθμός Froude F
Ορθογωνική 	by	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	b	y	$\sqrt{\frac{Q^2}{b^2y^3g}}$
Τραπεζοειδής 	$(b+zy)\,y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)\,y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\frac{(b+zy)\,y}{b+2zy}$	$\sqrt{\frac{(b+2zy)\,Q^2}{(b+zy)^3y^3g}}$
Τριγωνική 	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{y}{2}$	$\sqrt{\frac{2Q^2}{z^2y^5g}}$
Κυκλική 	$\frac{d^2}{8}(\varphi - \sin\varphi)$	$d\,\frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{4}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$	$d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\frac{d}{8}\left\{\frac{\varphi - \sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right\}$	$\sqrt{\frac{512Q^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{gd^5(\varphi - \sin\varphi)^3}}$

Άσκηση 1:

Για την ορθογωνική διατομή από σκυρόδεμα (συντελεστής στο διεθνές σύστημα μονάδων Manning n = 0.015) που εικονίζεται ζητούνται:

(α) Για κατά μήκος κλίση πυθμένα 0.001 και παροχή 7 m^3/s το βάθος της ομοιόμορφης ροής.

(β) Να χαρακτηριστεί η ροή σαν υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη και να προσδιορισθεί το κρίσιμο βάθος ροής.

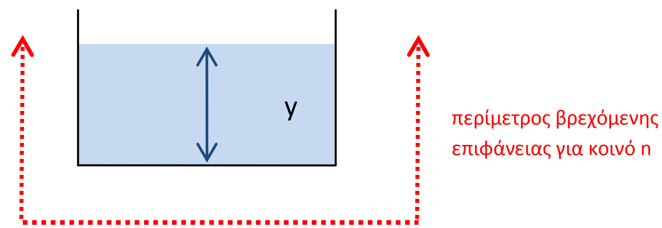


(α) Ομοιόμορφη ροή

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

A = b·y = 2.5·y (βλπ. πίνακα στο τέλος αυτών των ασκήσεων)

Π = b+2y = 2.5+2y



Εξίσωση Manning

$$Q = (2.5y)\frac{1}{n}\left(\frac{2.5y}{2.5+2y}\right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.015\cdot 7}{0.001^{1/2}} = (2.5y)\left(\frac{2.5y}{2.5+2y}\right)^{2/3} \Leftrightarrow f(y) = 3.320391543 \rightarrow$$ εύρεση βάθους ομοιομόρφου ροής με **δοκιμές** για γνωστή παροχή και κλίση (για μεγάλα y αυξάνεται η f(y))

Με δοκιμές προκύπτει ότι

y = 1.663, εφόσον πράγματι:

$$\Leftrightarrow (2.5\cdot 1.663)\left(\frac{2.5\cdot 1.663}{2.5+2\cdot 1.663}\right)^{2/3} \approx 3.32 = \frac{0.015\cdot 7}{0.001^{1/2}}$$

Παράδειγμα 1

Χωμάτινη τάφρος ($n = 0.03$) με πλάτος πυθμένα $b = 25$ m, κλίση πρανών $1:z = 1:3$ και κατά μήκος κλίση $S_0 = 0.0004$, μεταφέρει παροχή $Q = 500\ m^3/s$. Να υπολογιστεί το ομοιόμορφο βάθος.

(α) *Λύση με δοκιμές:* η εξίσωση (3.12) για τραπεζοειδή διατομή γράφεται:

$$\left(\frac{(by_0 + zy_0^2)^5}{\left(b + 2y_0\sqrt{1+z^2}\right)^2} \right)^{1/3} = \frac{nQ}{S^{1/2}} = 750$$

Αν υποτεθεί ένα βάθος ροής $y_0 = 6.00$ m, η συνάρτηση δίνει $661 < 750$.
Αν υποτεθεί ένα βάθος ροής $y_0 = 6.40$ m, η συνάρτηση δίνει $750 = 750$, άρα $y_0 = 6.40$ m.

(β) *Λύση με διαδοχικές προσεγγίσεις:* η εξίσωση (3.12) για τραπεζοειδή διατομή γράφεται:

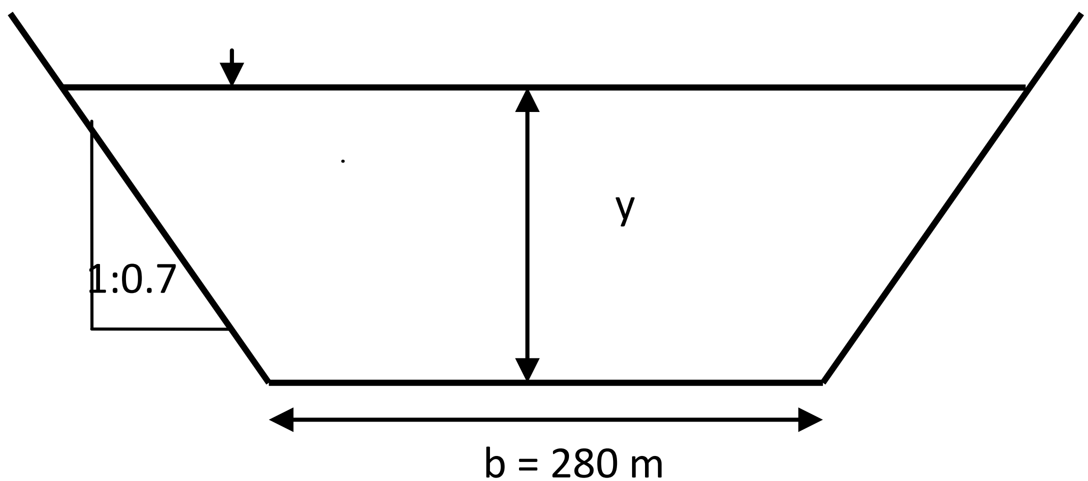
$$y_0 = \left(\frac{nQ}{S_0^{1/2}} \right) \left(\frac{1}{b + zy_0} \right) \left(\frac{b + 2y_0\sqrt{1+z^2}}{by_0 + zy_0^2} \right)^{2/3}$$

Αν υποτεθεί ένα βάθος ροής $y_0 = 6.00$ m, η συνάρτηση δίνει 6.81 m, άρα $6.00 < y_0 < 6.81$.
Αν υποτεθεί ένα βάθος ροής $y_0 = 6.40$ m, η συνάρτηση δίνει 6.41 m, άρα $y_0 = 6.40$.

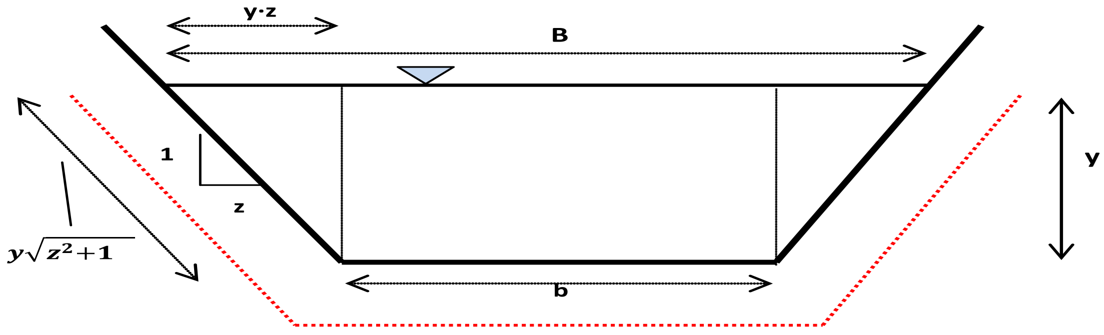
Ασκηση 2

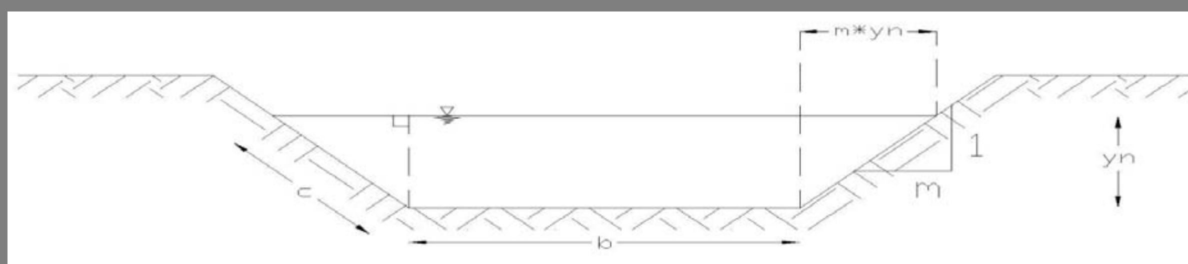
Αν η κλίση του πυθμένα είναι So = 1:240 να προσδιορισθεί η παροχή της παρακάτω τραπεζοειδούς διατομής αν ο συντελεστής Manning στο διεθνές σύστημα είναι n = 0.042 και η παροχή Q = 98,200 $m^3 s^{-1}$ να προσδιορισθεί το ομοιόμορφο το βάθος ροής. Να ελεγχθεί αν η ροή είναι κρίσιμη, υπερκρίσιμη ή υπερκρίσιμη και να προσδιοριστεί το κρίσιμο βάθος ροής.

(a)



- **Ομοιόμορφη ροή για Τραπεζοειδής (συμμετρική) διατομή**





ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΡΑΠΕΖΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Έχουμε διαδοχικά

$$c^2 = y_n^2 + (m \cdot y_n)^2 \Rightarrow c = \sqrt{y_n^2 \cdot (1+m^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = y_n \cdot \sqrt{1+m^2}$$

Το εμβαδόν της υγρής διατομής είναι:

$$A = \frac{b + (b + 2 \cdot m \cdot y_n)}{2} * y_n = \frac{2 \cdot b + 2 \cdot m \cdot y_n}{2} \cdot y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = b \cdot y_n + m \cdot y_n^2$$

n = 0.042

S_o = 1:240

Εξίσωση Manning για τραπεζοειδής διατομή

$$V=\frac{1}{n}\left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}\right)^{2/3}S_0^{1/2}\Leftrightarrow Q=((b+zy)y)\frac{1}{n}\left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}\right)^{2/3}S_0^{1/2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{n\cdot Q}{S_0^{1/2}}=((b+zy)y)\left(\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}\right)^{2/3}\Leftrightarrow$$

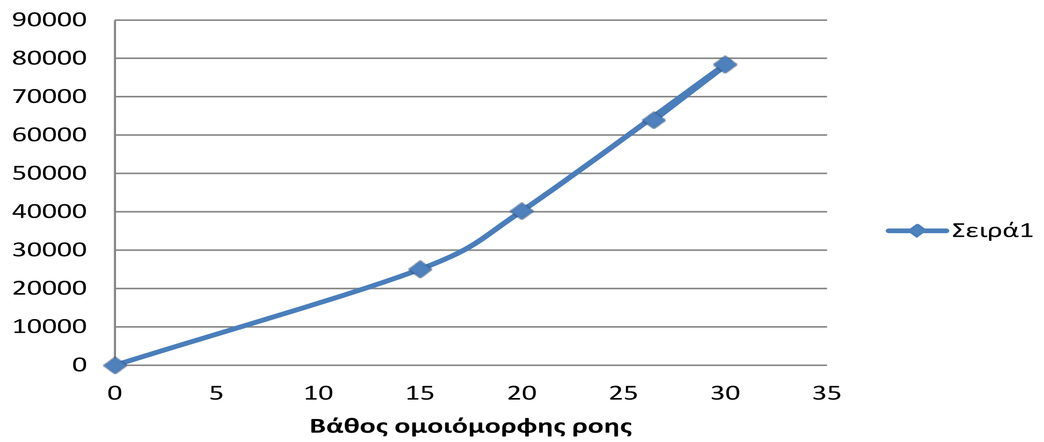
$$\frac{0.042\cdot 98,200}{(1/240)^{1/2}}=((280+0.7\cdot y)y)\left(\frac{(280+0.7\cdot y)y}{280+2\cdot y\sqrt{1+0.7^2}}\right)^{2/3}=63,894.93$$

Δοκιμές:

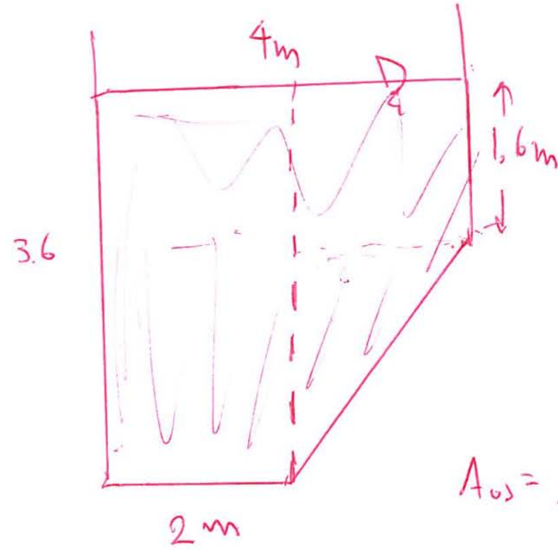
y = 20 m => f(y)= 40208.5< 63894.93 (Q = 61,800 m^3s^{-1})

y = 30 m => f(y)= 78361.04> 63894.93 (Q = 120,450 m^3s^{-1})

Καταστρώνω το παρακάτω διάγραμμα:



Τελικά Q = 98,000 m^3s^{-1} για βάθος ομοιόμορφης ροής , <u>yo = 26.5 m.</u>



Παροχή

$Q = 30 m^3/s$

$n = 0.013$

$S_0 = ?$ αναγκαία κλίση

$$A_{os} = \frac{1,6+3.6}{2} \cdot 2 + 2 \cdot 3.6 = 12.40 m^2$$

$$P_{otot} = 3.6+2+1.6+\sqrt{(4-2)^2+(3.6-1.6)^2} = 10.03 m.$$

Manning

$$Q = \frac{1}{n} A_{tot} \left(\frac{A_{tot.}}{P_{tot.}}\right)^{2/3} S_0^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_0 = \left(\frac{Q \cdot n}{A_{tot} \left(\frac{A_{tot}}{P_{tot}}\right)^{2/3}}\right)^2 = \left(\frac{30 \cdot 0.013}{12.4 \left(\frac{12.40}{10.03}\right)^{2/3}}\right)^2$$

$S_0 = 0.000741$

Μεταβολή της γραμμής ενέργειας σε ομοιόμορφη ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ομοιόμορφη ροή: στον άξονα της ροής σταθερή ταχύτητα και βάθος ροής

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Εξ. Ενέργειας: Παραγώγιση όρων ενέργειας κατά τη διεύθυνση της ροής, x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g} + z + y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g}\right) + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -S_0 < 0$$

Ομοιόμορφη ροή → **κλίση γραμμής ενέργειας = κλίση πυθμένα = κλίση ελεύθερης επιφάνειας**