

Υδραυλικό άλμα
ισορροπία ροής ορμής-
συνισταμένης δυνάμεων
ειδική δύναμη

Δρ Μ.Σπηλιώτη

Στόχοι και ύλη παρουσίασης

- Υδραυλικό άλμα (κλειδί: διατήρηση ορμής)(για κάθε διατομή και για ορθογωνική διατομή ειδικά)
- Ειδική δύναμη (για κάθε διατομή και για ορθογωνική διατομή ειδικά)
- Γενίκευση στην εφαρμογή της διατήρησης της ορμής (π.χ. εμπόδιο)
- Ασκήσεις

Υδραυλικό άλμα

ΠΑΝΤΑ συμβαίνει όταν: ροή από

υπερκρίσιμη μεταβαίνει σε υποκρίσιμη

(το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει)

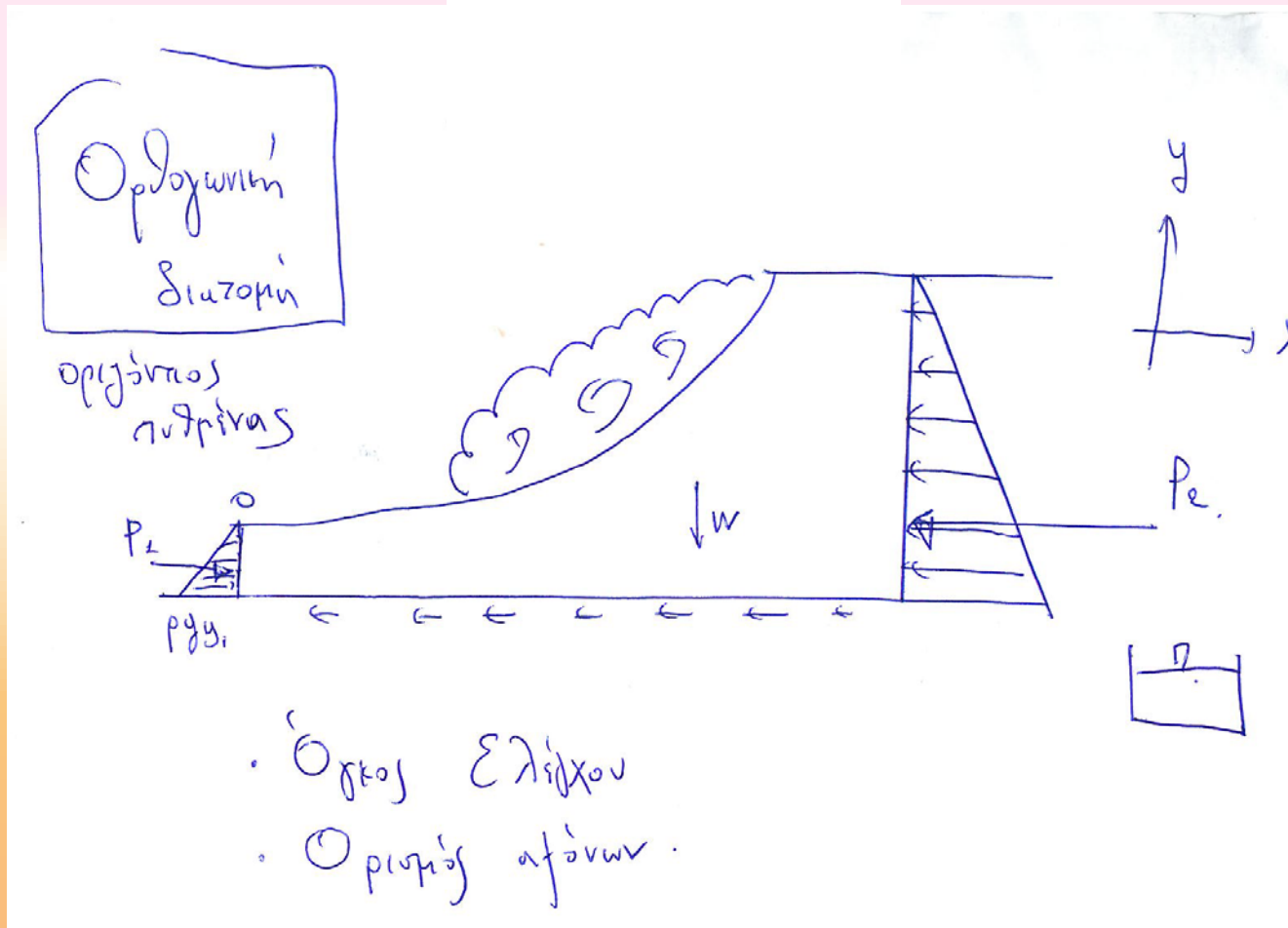
Υδραυλικό άλμα



- Χρησιμοποιείται για καταστροφή ενέργειας
- Γενικά δεν επιθυμείτε στο σχεδιασμό
- **ΠΑΝΤΑ συμβαίνει όταν: ροή από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη**
 - υπερχειλιστής
 - Από απότομη κλίση σε ήπια
- **Δαπάνη ενέργειας**
- Περιορισμένο μήκος
- Επιδράσεις στον αγωγό από ανάντη και κατάντη
- Ποια εξίσωση, Ενέργειας η ορμής?



Όγκος ελέγχου, εξίσωση ορμής



Διατήρηση της ορμής

- Όγκος ελέγχου
- Διατομές κάθετες στην ταχύτητα
- Δυνάμεις λόγω πίεσης πάντα θλιπτικές, κάθετες στην επιφάνεια
- Σχεδιάζω τις δυνάμεις και ελέγχω τη φορά τους με βάση το θεωρούμενο σύστημα αξόνων
- **Η συνισταμένη των δυνάμεων εξισορροπεί τη (καθαρή) διαφορά ορμής εκροής- εισροής για μόνιμη ροή**
- Οι ταχύτητες ελέγχονται ως προς τη φορά με το θεωρούμενο σύστημα αξόνων

$$\Sigma F_x = \dot{\rho} Q \left(W_x \text{ εκροής} - V_x \text{ εισροής} \right)$$

$\begin{matrix} V_{\text{εκροής}} & V_{\text{εισροής}} \\ \text{σύγκριση φοράς} & \text{σύγκριση φοράς} \\ \text{με άξονες} & \text{με άξονες} \end{matrix}$

Μόνιμη
μονοδιάστατη
ροή χωρίς
διακλαδώσεις

7.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Οι εξισώσεις Navier-Stokes προκύπτουν από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και είναι η διαφορική έκφρασή του. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική έκφραση του νόμου αυτού για κινούμενο ρευστό εκφράζεται από την παρακάτω διανυσματική εξίσωση

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho \vec{V} dU + \iint_{CS} (\rho \vec{V}) (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (7.1)$$

Η εξίσωση (7.1) είναι η μαθηματική έκφραση του θεωρήματος διατήρησης της ορμής. Το θεώρημα αυτό ορίζει ότι η συνισταμένη δύναμη \vec{F} των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται σ' έναν όγκο αναφοράς ενός ρευστού, ισούται με τη μεταβολή της ορμής του όγκου αναφοράς στη μονάδα του χρόνου συν την εισροή και εκροή της ορμής από την επιφάνεια που περιβάλλει τον όγκο αναφοράς.

Η εξίσωση (7.1) σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται

$$\Sigma F_x = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho V_x dU + \iint_{CS} (\rho V_x) (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (7.2)$$

$$\Sigma F_y = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho V_y dU + \iint_{CS} (\rho V_y) (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (7.3)$$

$$\Sigma F_z = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} \rho V_z dU + \iint_{CS} (\rho V_z) (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (7.4)$$

Παντοκράτορας,
Μηχ Ρευστών

μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Για μόνιμη ροή οι τρεις εξισώσεις μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\Sigma F_x = \sum_{\text{ΕΞ}} \rho Q V_x - \sum_{\text{ΕΙΣ}} \rho Q V_x \quad (7.5)$$

$$\Sigma F_y = \sum_{\text{ΕΞ}} \rho Q V_y - \sum_{\text{ΕΙΣ}} \rho Q V_y \quad (7.6)$$

$$\Sigma F_z = \sum_{\text{ΕΞ}} \rho Q V_z - \sum_{\text{ΕΙΣ}} \rho Q V_z \quad (7.7)$$

Οι εξισώσεις αυτές εφαρμόζονται ως εξής: Επιλέγεται ο κατάλληλος όγκος αναφοράς και σχεδιάζονται όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτόν. Συνήθως πρόκειται για δυνάμεις πίεσης, βαρύτητας και τριβής. Σε πολλές περιπτώσεις οι δυνάμεις τριβής αγνοούνται. Επίσης στον όρο ΣF περιλαμβάνεται και η αντίδραση που ασκεί ο αγωγός στον όγκο αναφοράς του ρευστού. Κατόπιν υπολογίζονται οι κατά x συνιστώσες των δυνάμεων αυτών και τέλος υπολογίζεται η ΣF_x . Ο όρος $\sum_{\text{ΕΞ}} \rho Q V_x$ υπολογίζεται ως εξής: Σε κάθε τμήμα της επιφάνειας του όγκου αναφοράς που υπάρχει έξοδος ρευστού υπολογίζεται η παροχή Q . Υπολογίζεται η κατά x συνιστώσα της ταχύτητας V που έχει το ρευστό στην επιφάνεια εξόδου. Η συνιστώσα αυτή V_x πολλαπλασιάζεται με την πυκνότητα και την παροχή του τμήματος της επιφάνειας εξόδου. Κατόπιν υπολογίζεται το άθροισμα των γινομένων $\rho Q V_x$ για όλα τα τμήματα του όγκου αναφοράς, όπου υπάρχει έξοδος ρευστού. Το κάθε γινόμενο λαμβάνει το κατάλληλο πρόσημο που εξαρτάται από το πρόσημο της συνιστώσας V_x . Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για τον υπολογισμό του όρου $\sum_{\text{ΕΙΣ}} \rho Q V_x$ στις επιφάνειες, όπου υπάρχει είσοδος ρευστού στον όγκο αναφοράς.

Διατήρηση ορμής
μόνιμη
μονοδιάστατη ροή
Παντοκράτορας,
Μηχανική Ρευστών

ΔΙΑΛΛΕΙΜΑ

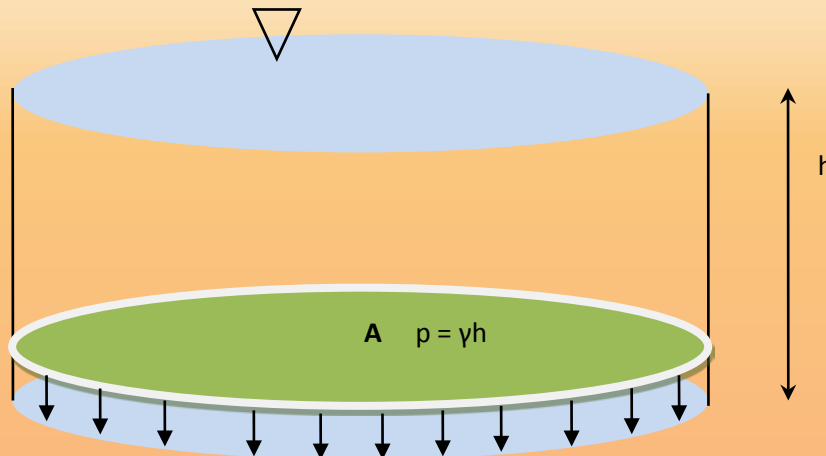
ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΛΟΓΩ
ΠΙΕΣΗΣ σε κεκλιμένα επίπεδα

Ανάλυση δυνάμεων λόγω πίεσης

- Υδροστατική κατανομή
- Θλιπτική πάντα
- Η πίεση αλλάζει με το βάθος κατακόρυφη επιφάνεια
- Λύση: Κατακόρυφη επιφάνεια, δύναμη από πιέσεις = πίεση στο κέντρο βάρους επί επιφάνεια (για υδροστατική κατανομή των πιέσεων)
- «άσχετο»: η δύναμη λόγω πίεσης ασκείται σε μεγαλύτερο βάθος στο κέντρο πίεσης

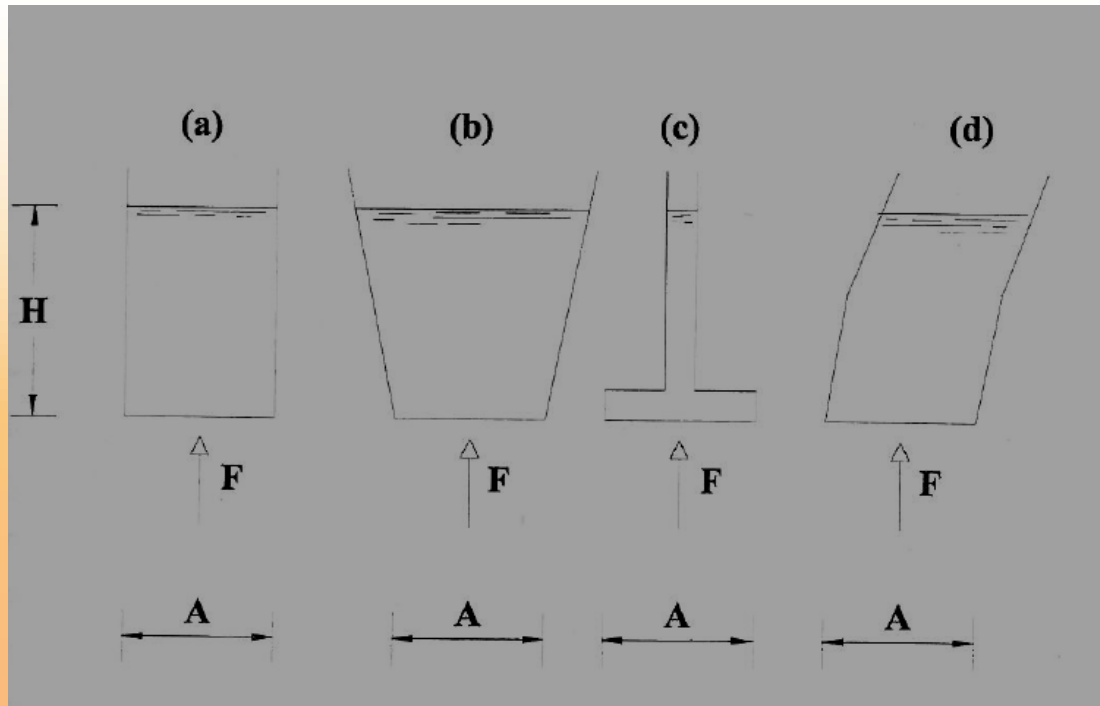
Επανάληψη

- 1) Συνισταμένη πίεσης σε οριζόντια επιφάνεια (π.χ. πυθμένας δεξαμενής). Σε αυτήν την περίπτωση η πίεση είναι παντού ίδια $p = \gamma h = \text{σταθ.}$
- Η δύναμη πίεσης που εξασκείται στο πυθμένα είναι $F = \gamma h A$
 - Το κέντρο πίεσης (σημείο εφαρμογής της συνισταμένης πίεσης) ταυτίζεται με το κέντρο βάρους της επιφάνειας



Συνισταμένη πίεσης σε οριζόντια επιφάνεια (συνέχεια)

- Υδροστατικό παράδοξο: Η πίεση που ασκείται στον πυθμένα ενός δοχείου είναι ανεξάρτητη από το σχήμα του δοχείου ενώ για μερικά δοχεία η δύναμη αυτή μπορεί να είναι πολλαπλάσια από το βάρος του υπερκείμενου ρευστού



- 2) Συνισταμένη πίεσης σε κεκλιμένη ή κατακόρυφη επιφάνεια που κείται σε επίπεδο. (Στην υδραυλική στα τοιχώματα συνήθως $\theta=90^0$)
 - Προσδιορίζω την κατακόρυφη απόσταση από το κέντρο βάρους h_c (μοναδική κατακόρυφη απόσταση που χρησιμοποιώ επιφάνεια). Η δύναμη πίεσης θα είναι:

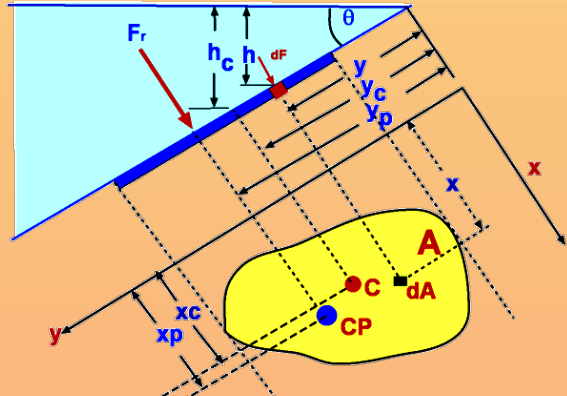
$$F = \bar{p}A = \gamma h_c \text{ (κατάκ. απόσταση από κ.β ρους)}$$

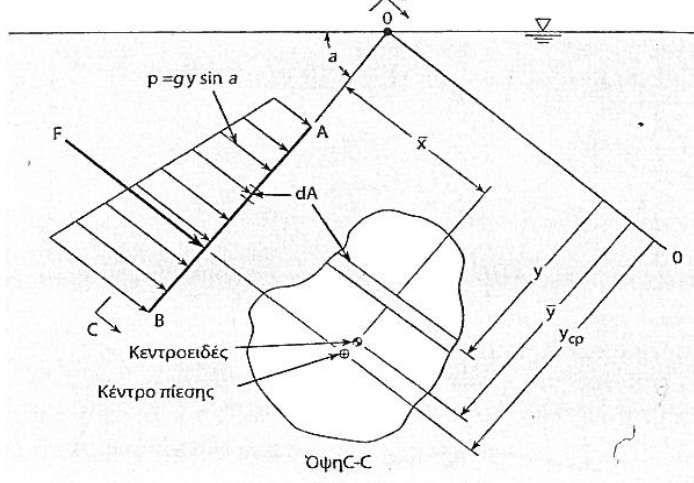
- Στην υδραυλική στα τοιχώματα συνήθως $\theta=90^0$

$$y_c = h_c$$

$$F_p = (\rho g y_c) A$$

$\theta=90$
 $y_c=h_c$





Από επιφάνεια

ΣΧΗΜΑ 3.20 Κατανομή της υδροστατικής πίεσης σε επίπεδη επιφάνεια.

ως τον οριζόντιο άξονα μέσω του κεντροειδούς συμβολίζεται με \bar{y} . Η απόσταση από το 0 – 0 έως τη διαφορική επιφάνεια dA είναι ίση με y .

Η δύναμη που οφείλεται στην πίεση δίνεται από την Εξίσωση (3.23) η οποία απλοποιείται ως

$$F_p = \int_A p dA$$

Στην Εξίσωση (3.24), η πίεση μπορεί να βρεθεί από την υδροστατική εξίσωση

$$p = \gamma \Delta z = \gamma y \sin \alpha$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (3.24) και (3.25) θα λάβουμε

$$F_p = \int_A p dA = \int_A \gamma y \sin \alpha dA = \gamma \sin \alpha \int_A y dA \tag{3.26}$$

Επειδή το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της Εξίσωσης (3.26) είναι η πρώτη ροπή της επιφάνειας, ας αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα με την ισοδύναμη τιμή του $\bar{y}A$. Θα είναι λοιπόν

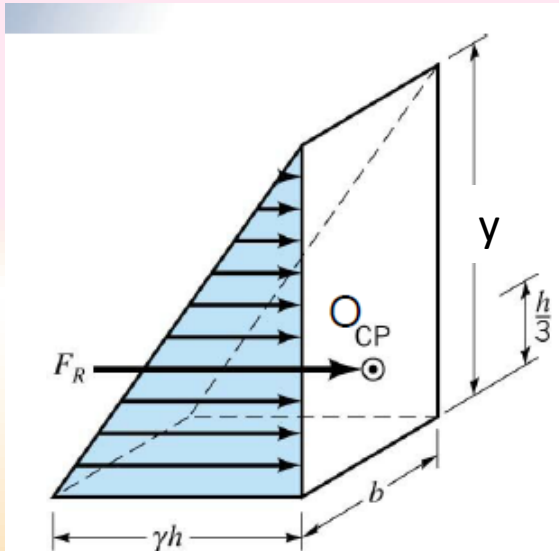
$$F_p = \gamma \bar{y} \sin \alpha = (\gamma \bar{y} \sin \alpha) A \tag{3.27}$$

Χρησιμοποιώντας την υδροστατική εξίσωση μπορούμε να δείξουμε πως οι μεταβλητές μέσα στις παρενθέσεις στο δεξί μέλος της Εξίσωσης (16.27) είναι η πίεση στο κεντροειδές της επιφάνειας. Θα είναι λοιπόν

$$F_p = \bar{p} A \tag{3.28}$$

Σε κατακόρυφες επιφάνειες $\alpha=90$

Για ορθογωνική διατομή μόνο

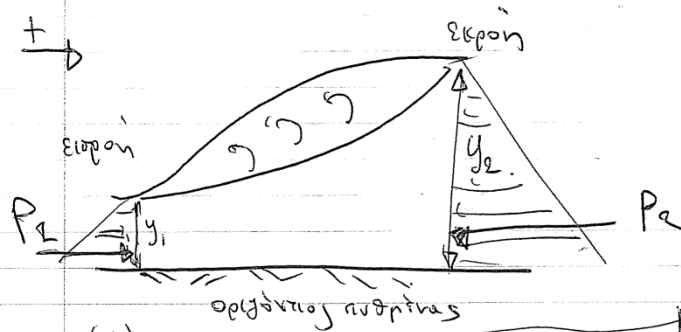


$$F_p = (\rho g y / 2) A = (\rho g y / 2) (b y) = 1/2 \rho g y^2 b$$

Τέλος διαλλείματος

**Υδραυλικό άλμα (διατήρηση
ποσότητας κίνησης)**

$$F_{P_1} - F_{P_2} = \rho Q (V_2 - V_1)$$



$$\sum F_x = P_1 - P_2 = \beta \rho Q (V_2 - V_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{αρθρώσιμος} \\ \beta \approx 1 \\ \text{απλ. διαρροή } \rho \text{ ορμής} \end{array} \right.$$

$$\rho g \bar{y}_1 A_1 - \rho g \bar{y}_2 A_2 = \rho Q \left(\frac{Q}{A_2} - \frac{Q}{A_1} \right)$$

$$\bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2 = \frac{Q^2}{g A_2} - \frac{Q^2}{g A_1}$$

$$\bar{y}_1 A_1 + \frac{Q^2}{g A_1} = \bar{y}_2 A_2 + \frac{Q^2}{g A_2}$$

|| ||
 M_1 M_2

$$M = \bar{y} A + \frac{Q^2}{g A}$$

Διατήρηση της ορμής
(όγκος ελέγχου)

Δύναμη λόγω
πίεσης = πίεση
στο κέντρο
βάρους της
επίπεδης
επιφάνειας επί
την επιφάνεια

Υδραυλικό άλμα

- $M1 = M2$ (ειδική δύναμη, συζυγή βάθη)
- Επίλυση με δοκιμές

Ορθογώνια Σιατόμια

$$\bar{y} = \frac{y}{2}, \quad A = by$$

$$M = \frac{Q^2}{gby} + \frac{by^3}{2}$$

Η ειδική Σημείωση αλλαζει από Σιατόμια σε Σιατόμια:

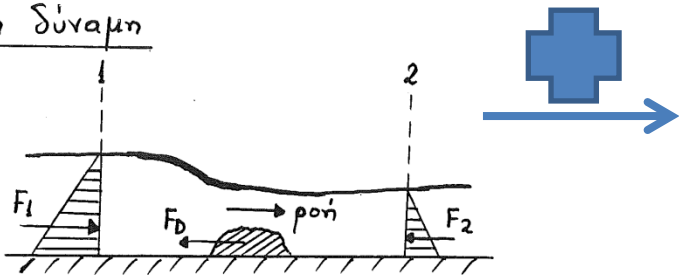
Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|--------------|---|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |
| Τραπεζοειδής | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gh(B+zh)}$ <div data-bbox="1275 442 1564 578" style="border: 1px solid blue; border-radius: 50%; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 20px;"> Είς το τετράγωνο τυπογραφικό λάθος </div> |
| Τριγωνική | $\frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gzh^2}$ |
| Κυκλική | $\left[3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{D^3}{24} + \frac{Q^2}{gD^2(\theta - \sin\theta)}$ $\left(\theta = 2\cos^{-1}\left[1 - 2\left(\frac{h}{D}\right) \right] \right)$ |

Οριζόντιο άλμα χωρίς εμπόδιο:
 $M1=M2$ για όλα τα είδη της διατομής

Γενίκευση χρήσης ειδικής δύναμης
(εξίσωση ορμής)

Ειδική Δύναμη



Νόμος της διατήρησης της ποσότητας κινήσεως (ορμής):

$$-F_{\tau} + F_g + F_1 - F_2 - F_D = \rho Q (u_2 - u_1)$$

- F_{τ} : Δύναμη τριβής στον πυθμένα και παρειές του αγωγού
- F_g : συνιστώσα στη διεύθυνση του πυθμένα του βάρους του νερού
- F_1 : υδροστατική δύναμη στη διατομή 1
- F_2 : υδροστατική δύναμη στη διατομή 2
- F_D : δύναμη ασκούμενη από το εμπόδιο στο νερό
- $\rho Q u_1$: ώθηση (ποσότητα κινήσεως στη μονάδα χρόνου) στη διατομή 1
- $\rho Q u_2$: ώθηση στη διατομή 2

$$F_1 = \rho g \bar{h}_1 A_1 \quad F_2 = \rho g \bar{h}_2 A_2$$

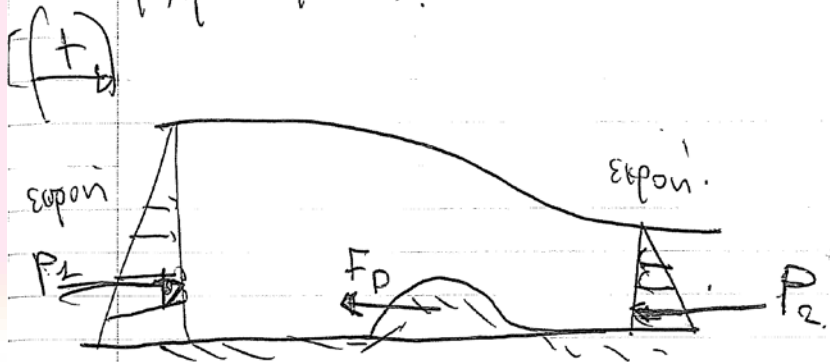
$$\frac{-F_{\tau} + F_g - F_D}{\rho g} = \left(\frac{Q u_2}{g} + A_2 \bar{h}_2 \right) - \left(\frac{Q u_1}{g} + A_1 \bar{h}_1 \right)$$

$$u = Q/A \Rightarrow \frac{-F_{\tau} + F_g - F_D}{\rho g} = \left(\frac{Q^2}{g A_2} + A_2 \bar{h}_2 \right) - \left(\frac{Q^2}{g A_1} + A_1 \bar{h}_1 \right)$$

Εμπόδιο στην κίνηση του ρευστού :
οριζόντια δύναμη αντίστασης στη ροή

αρνητικές οι δυνάμεις που είναι σε άλλη φορά από τη ροή

Επίπεδο σε (αέριος) οριζόντιο πυθμένα
 κεντρού μήκους.



Διατήρηση ποσότητας κίνησης:

$$\boxed{\frac{-F_D}{\rho g} = M_2 - M_1}$$

όπου $M = \frac{Q^2}{gA} + A\bar{y} =$ ειδική δύναμη

εννοείται τα υδροστατικά ορμή και πίεση.

$$M = \frac{Q^2}{gA} + A\bar{h}$$

\bar{h} : απόσταση κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια

M : ειδική δύναμη [δύναμη/ειδ. βάρος]

$$\frac{F_g - F_\tau - F_D}{\rho g} = M_2 - M_1$$

Εμπόδιο στην κίνηση του ρευστού : οριζόντια δύναμη αντίστασης στη ροή

αρνητικές οι δυνάμεις που είναι σε άλλη φορά από

Γενικά: Ειδική δύναμη γενίκευση

$$M = \frac{Q^2}{gA} + A\bar{h}$$

\bar{h} : απόσταση κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια

M : ειδική δύναμη [δύναμη/ειδ. βάρος]

$$\frac{F_g - F_\tau - F_D}{\rho g} = M_2 - M_1$$

Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

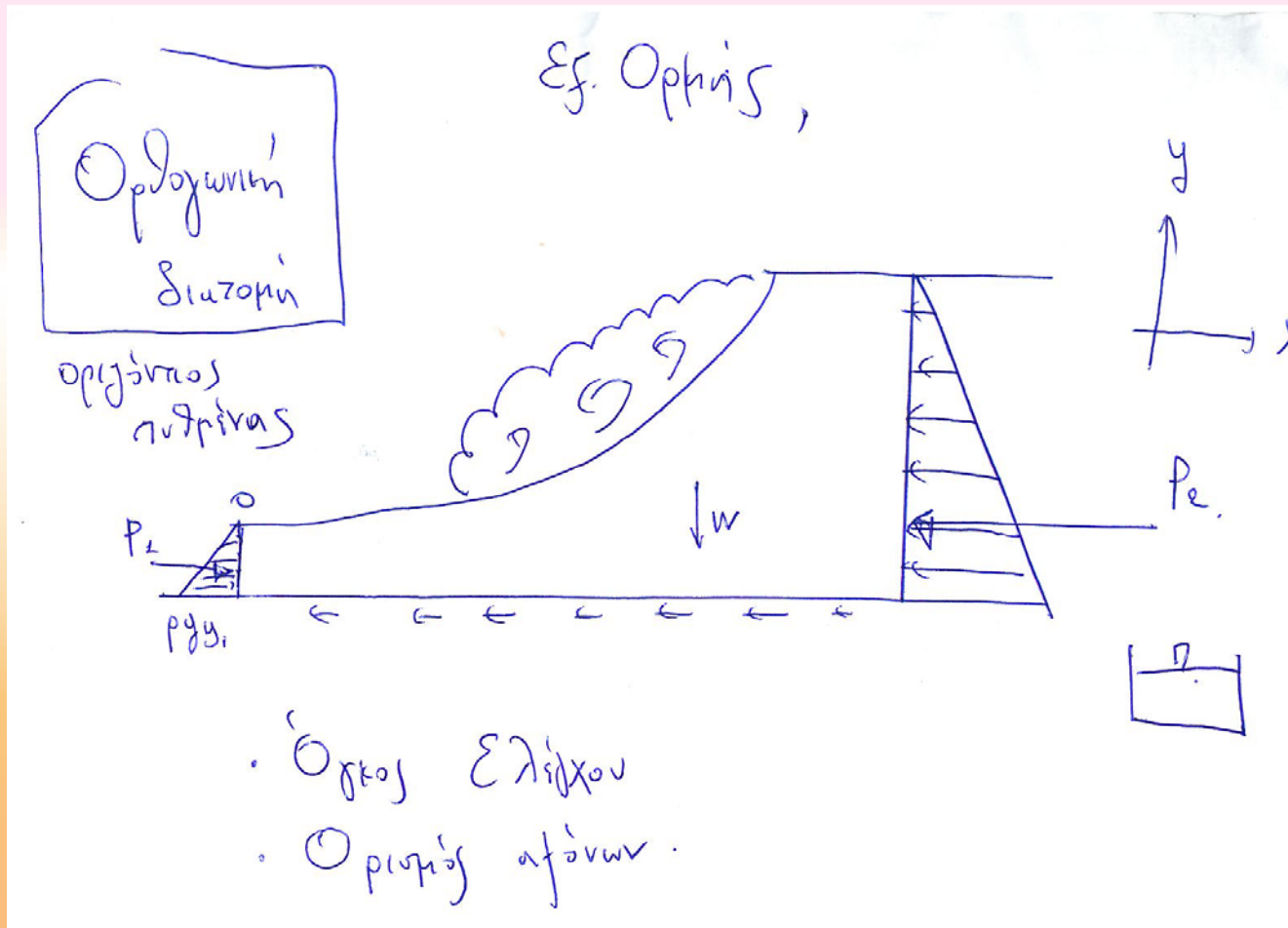
| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|--------------|---|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |
| Τραπεζοειδής | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gh(B+zh)}$ |
| Τριγωνική | $\frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gzh^2}$ |
| Κυκλική | $\left[3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{D^3}{24} + \frac{Q^2}{gD^2(\theta - \sin\theta)}$ $\left(\theta = 2\cos^{-1}\left[1 - 2\left(\frac{h}{D}\right) \right] \right)$ |

Εις το τετράγωνο τυπογραφικό λάθος

Οριζόντιο άλμα χωρίς εμπόδιο:
 $M_1 = M_2$ για όλα τα είδη της διατομής

Για ορθογωνική διατομή...

Όγκος ελέγχου, εξίσωση ορμής



Δ. ορμής, σε οριζόντιο άλμα, ορθ. Διατομή, αμελητέες τριβές

$$\sum F_x = \rho Q (V_{1x}^{\text{εξροή}} - V_x^{\text{εισροή}}) (=)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P_1 - P_2}_{\text{πίεσις}} + \cancel{W_{\text{μηδ}}^g} + \cancel{F_{T, \text{μικρ. μήκος}}} = \rho Q V_2 - \rho Q V_1$$

μεταβολή ορμής

$$b \frac{\rho g \gamma_1^2}{2} - b \frac{\rho g \gamma_2^2}{2} = \rho Q \left(\frac{Q}{b \gamma_2} \right) - \rho Q \left(\frac{Q}{b \gamma_1} \right) (=)$$

$$\Leftrightarrow b \frac{\rho g \gamma_1^2}{2} + \rho \frac{Q^2}{b \gamma_1} = \frac{\rho g \gamma_2^2}{2} b + \rho \frac{Q^2}{b \gamma_2} \quad \Leftrightarrow$$

Ορισμός εικονικού μεγέθους της
 ειδικής δύναμης με βάση την ορμή
 και την πίεση --- εξαρτάται από την
 διατομή

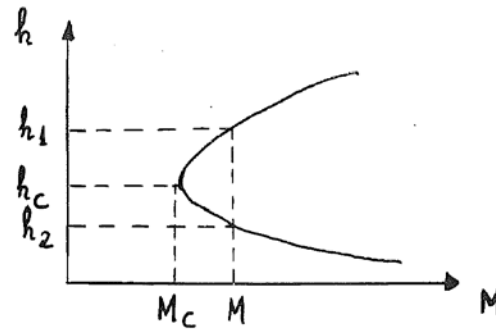
$$\frac{b\gamma_1^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma_1 g} = \frac{b\gamma_e^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma_e g}$$

|| op
|| op

M_1
 M_e

$$M_{oe} \text{ ειδική δύναμη} = \frac{b\gamma^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma g} \left\{ \begin{array}{l} \text{εικονικό} \\ \text{μέγεθος.} \end{array} \right\}$$

Ορθογωνική διατομή



(49)

q : δεδομένο

- Ανάλογο προς το διάγραμμα ειδικής ενέργειας

$$h \rightarrow \infty \quad M \rightarrow \infty$$

$$h \rightarrow 0 \quad M \rightarrow \infty$$

$$\frac{dM}{dh} = -\frac{q^2}{gh^2} + h = 0 \quad \Rightarrow \quad h = h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad \Rightarrow \quad M_{\min}$$

h_1, h_2 : συζυγή βάθη

Στο κρίσιμο
βάθος
ελάχιστη
ειδική δύναμη

Συμπέρασμα
που
γενικεύεται
για κάθε
διατομή

Ορισμός εικονικού μεγέθους της
 ειδικής δύναμης με βάση την ορμή
 και την πίεση --- εξαρτάται από την
 διατομή

$$\frac{b\gamma_1^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma_1 g} = \frac{b\gamma_e^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma_e g}$$

|| op
|| op

M_1
 M_e

$$M_{oe} \text{ ειδική δύναμη} = \frac{b\gamma^2}{2} + \frac{Q^2}{b\gamma g} \left\{ \begin{array}{l} \text{εικονικό} \\ \text{μέγεθος.} \end{array} \right\}$$

Δύο τρόποι επίλυσης για ορθογωνική διατομή

Δύο τρόποι επίλυσης υδραυλικού άλματος για ορθογωνική διατομή:

α) Από διατήρησης ορμής για οριζόντιο άλμα: $M_1=M_2$

β) Από έτοιμες εξισώσεις που ισχύουν για οριζόντιο πυθμένα ορθογωνικής (μόνο) διατομής αγωγού

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} * \left(-1 + \sqrt{1 + 8 * F_1^2} \right), \quad F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{g * y_1}}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} * \left(-1 + \sqrt{1 + 8 * F_2^2} \right), \quad F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g * y_2}}$$

Η εξ. (8.2-6) στην περίπτωση του ορθογωνικού αγωγού, βλ. εξ. (8.2-8), γράφεται ως εξής

$$\frac{Q^2}{gby_1} + \frac{1}{2}by_1^2 = \frac{Q^2}{gby_2} + \frac{1}{2}by_2^2 \quad \text{ή} \quad \frac{(V_1by_1)^2}{gby_1} + \frac{1}{2}by_1^2 = \frac{(V_2by_2)^2}{gby_2} + \frac{1}{2}by_2^2 \quad \text{ή}$$

$$\frac{V_1^2}{gy_1} + \frac{1}{2} = \frac{V_2^2}{gy_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \quad \text{ή} \quad F_1^2 + \frac{1}{2} = \frac{F_1^2}{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \quad \text{ή}$$

$$-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + 2F_1^2 = 0$$

$$\text{όπου } F_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gy_1}}$$

είναι ο αριθμός Froude στην ανάντη διατομή 1, όπου η ροή είναι υπερκρίσιμη.
Λύνοντας την εξ. (8.4-1) προκύπτει η εξ. (8.4-3)

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right) \quad (8.4-3)$$

Η εξ. (8.4-3) μπορεί να γραφτεί και με την ακόλουθη μορφή

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 8F_2^2} - 1 \right) \quad (8.4-4)$$

$$\text{όπου } F_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gy_2}} \quad (8.4-5)$$

είναι ο αριθμός Froude στην κατάντη διατομή 2, όπου η ροή είναι υποκρίσιμη.

Οι απώλειες ενέργειας μπορεί να υπολογιστούν από την εξ. (6.3-2) που γράφεται για περίπου οριζόντιο αγωγό με την ακόλουθη μορφή

$$\Delta H_{1-2} = y_1 - y_2 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1y_2} \quad (8.3-6)$$

Μόνο για
οριζόντια
άλματα,
ορθογωνική
διατομή

Απόδειξη: β '
εξίσωση με
μεταβλητή y_2/y_1

Στάμου, 2014

Υδραυλικό άλμα

+οριζόντιος
κυθμένας

- Για ορθογωνική διατομή:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad M = \frac{q^2}{gy} + \frac{y^2}{2}$$

E: ειδική ενέργεια [m]

M: ειδική δύναμη ανά μονάδα πλάτους [m²]

M1=M2

- Για τα συζυγή βάθη ροής y₂, y₃ ισχύει:

$$y_3 = \frac{y_2}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2})$$

$$Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gy_2}} = \frac{q}{\sqrt{gy_2^3}}$$

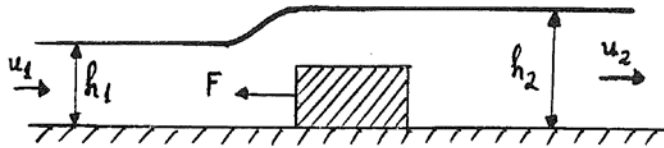
$$dE = E_2 - E_3$$

dE: ύψος απωλειών ενέργειας στο υδραυλικό άλμα

$$dE = \frac{(y_3 - y_2)^3}{4y_3y_2}$$

**ΕΜΠΟΔΙΟ ΣΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ
ΚΑΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ**

Παράδειγμα (Νόμος διατήρησης ποσότητας κίνησης)



- Εύρεση δύναμης F που ασκεί ένα εμπόδιο (βάθρο γέφυρας, αγκυροβολημένο πλοίο) πάνω στο νερό.
- Αμελητέες δυνάμεις τριβής με τα τοιχώματα
- Μοναδιαίο πλάτος αγωγού

$$\rho g \frac{h_1}{2} h_1 - F - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 = \rho Q (u_2 - u_1)$$

$$\rho g \frac{h_1}{2} h_1 - F - \rho g \frac{h_2}{2} h_2 = \rho q (u_2 - u_1)$$

- Εάν η ανάντη ροή είναι ποτάμια, τότε $h_2 < h_1$
- Εάν η ανάντη ροή είναι χειμαρρώδης, τότε $h_2 > h_1$

(Αποστέλεσμα της δύναμης F)

- Για οριζόντιο αγωγό $F_g = 0$
- Για μικρή απόσταση των διατομών 1 και 2 $F_z \approx 0$

$$-\frac{F_D}{\rho g} = M_2 - M_1$$

- Για ορθογωνική διατομή $q = \frac{Q}{b}$ $\bar{h} = \frac{h}{2}$

$$M = \frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2}$$

M : ειδική δύναμη ανά μονάδα πλάτους

Παγίδα, δίνει δύναμη ανά μονάδα πλάτους σε ορθ. διατομή

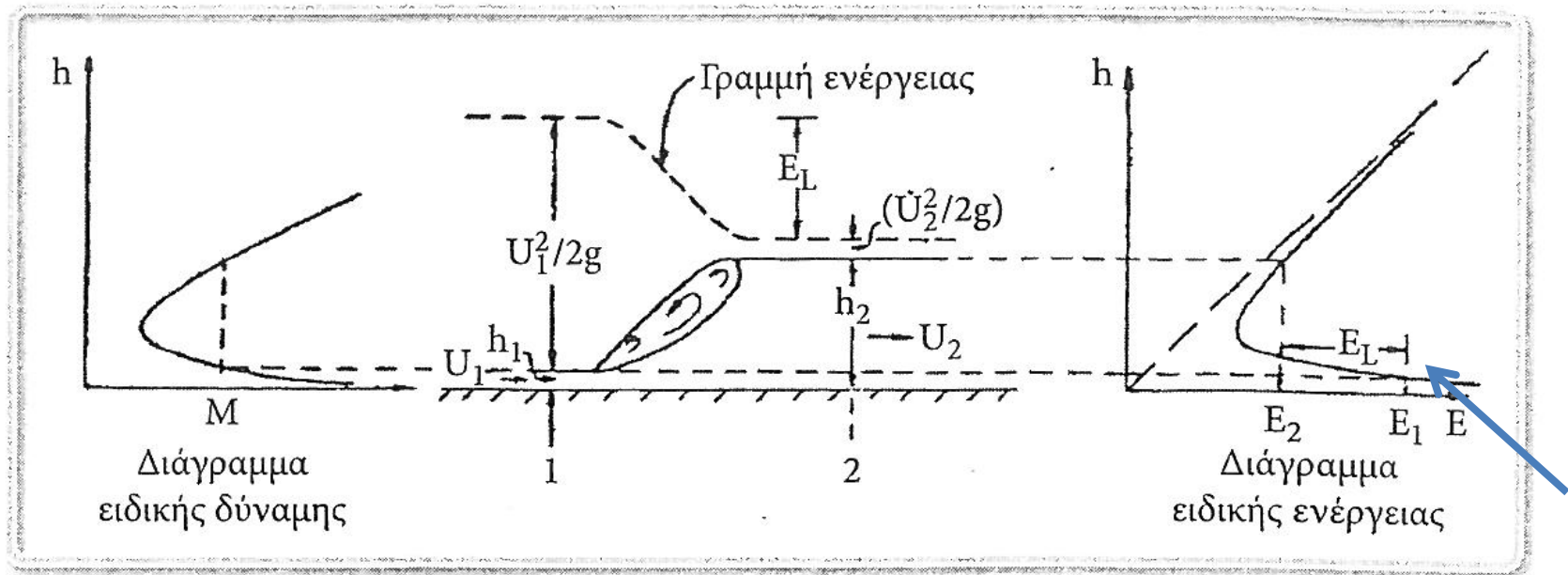
Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|------------|------------------------------------|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |

- Σε αντίθεση με το υδραυλικό άλμα, για τον προσδιορισμό δύναμης από ακανόνιστο εμπόδιο, μπορούμε να υποθέσουμε διατήρηση της ενέργειας προσεγγιστικά...

Άλλα στοιχεία θεωρίας υδραυλικού άλματος...

Οριζόντιο υδραυλικό άλμα



Πρίνος, 2013

Σχήμα 3.7: Διαγράμματα ειδικής ενέργειας και ειδικής δύναμης για το υδραυλικό άλμα

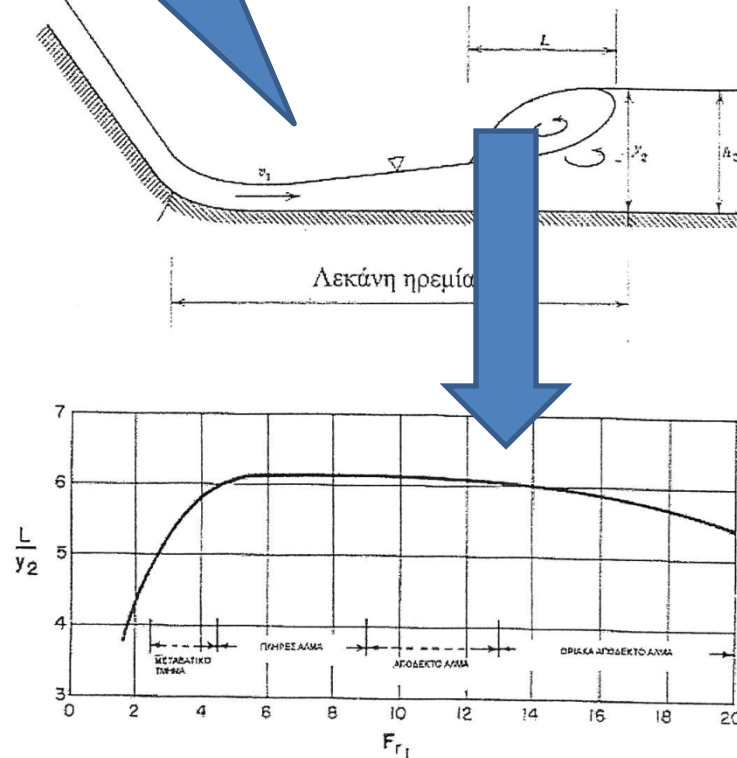
Υδραυλικό άλμα (οριζόντιο):

- Κοινή ειδική δύναμη (καμπύλη M συζυγή βάθη)
- Μείωση ενέργειας και κατά συνέπεια και της ειδικής ενέργειας (οριζόντιος πυθμένας). Ωστόσο η μεταβολή γίνεται εκτός διαγράμματος ειδικής ενέργειας (κατά το άλμα δεν υπάρχει ενιαία ταχύτητα καθ' ύψος)

Μήκος άλματος περιορισμένο, $L \approx 6y_2$

προσαρμογή

$$4.5 \leq Fr_1 \leq 13$$

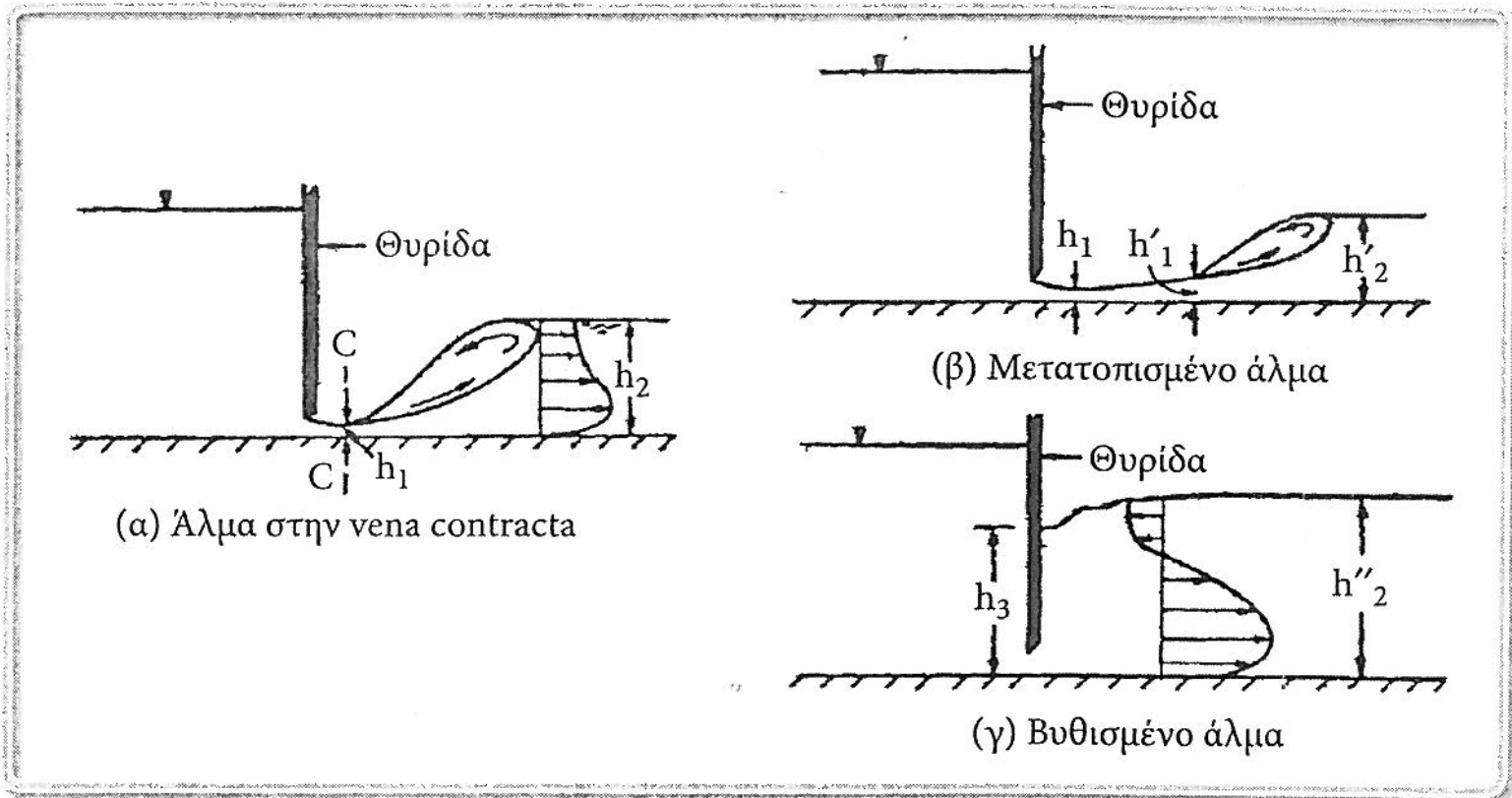


Σχ. Π2.8 Μήκος υδραυλικού άλματος

Περιπτώσεις Υδραυλικού άλματος

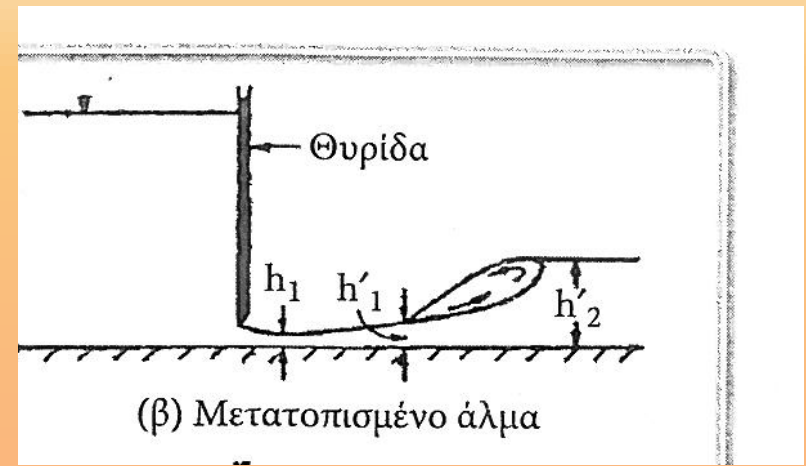
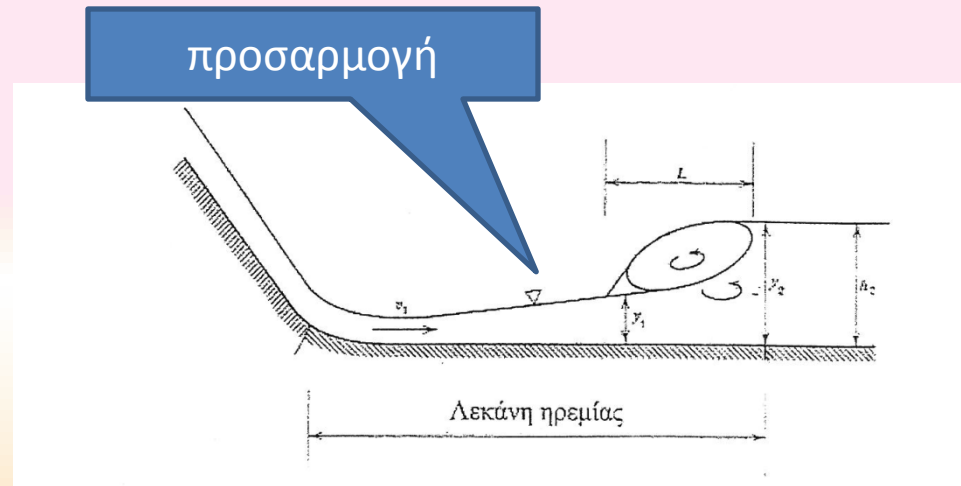
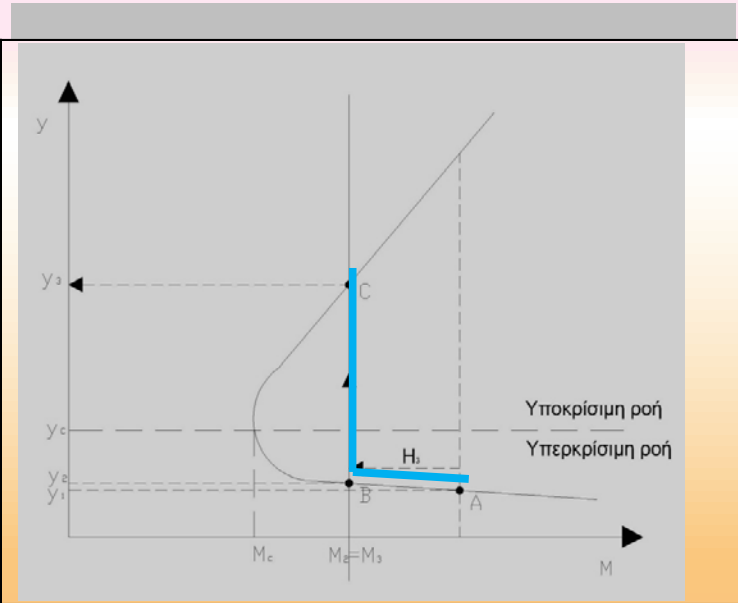
1. Όταν μειώσουμε απότομα την κλίση του πυθμένα του αγωγού από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη, οπότε και η ροή μεταβαίνει από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη.
2. Όταν σε ένα αγωγό με υποκρίσιμη ροή τοποθετήσουμε θυρόφραγμα μικρού ανοίγματος (y_c), τότε αναγκάζουμε τη ροή να γίνει πρώτα υπερκρίσιμη αμέσως κατάντη του θυροφράγματος ($y_1 > y_c$) και στη συνέχεια υποκρίσιμη ($y_2 < y_c$), βλ. Παράδειγμα 9.3-1.
3. Όταν σε ένα αγωγό με υπερκρίσιμη ροή αναγκάσουμε τη ροή να ανέλθει σε σχετικά μεγάλο ύψος αποκτώντας μεγάλο βάθος ροής ($> y_c$). Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε τοποθετώντας στη ροή υψηλό υπερχειλιστή ή εμπόδιο ή όταν η ροή πρέπει να καταλήξει σε υψηλό υπόμετρο, π.χ. της επιφάνειας του νερού ενός ταμιευτήρα, βλ. Παράδειγμα 9.3-1.

Υδραυλικό άμα μετά από θυρίδα, περίπτωση 2

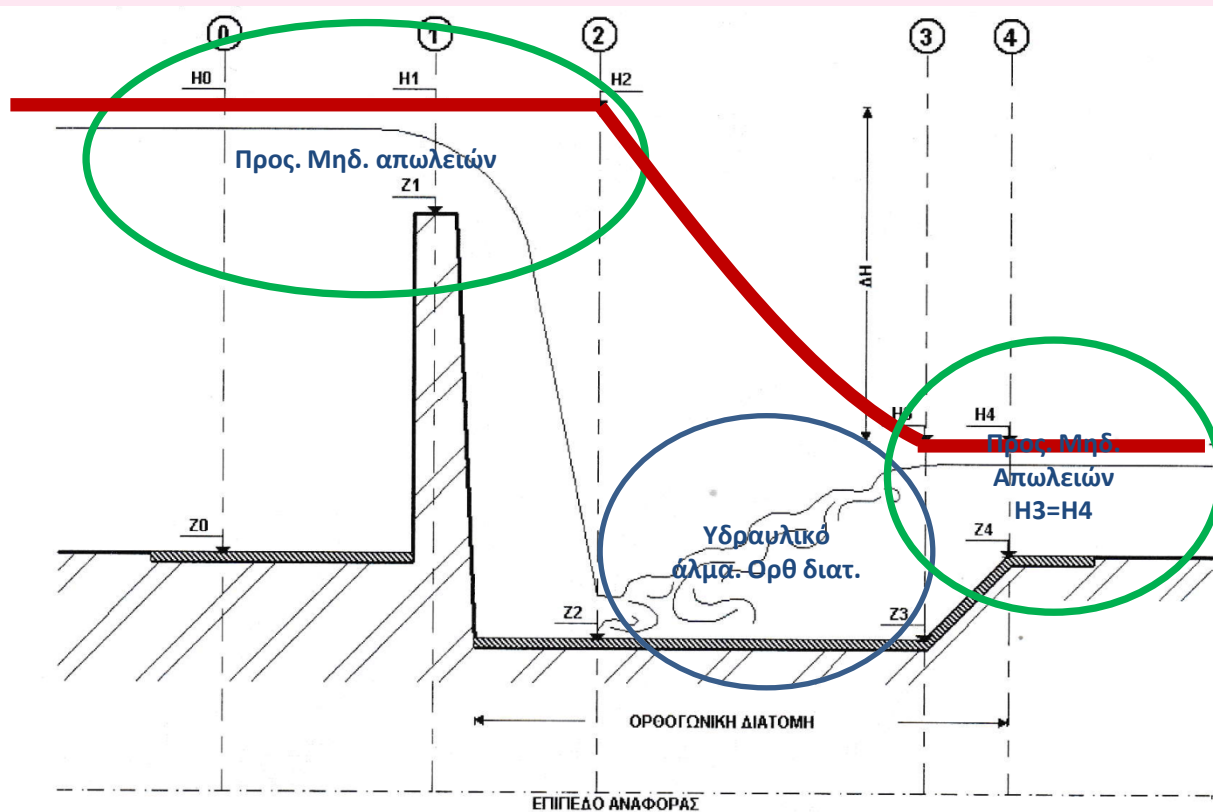


Σχήμα 3.5: Ελεύθερο και Βυθισμένο άμα

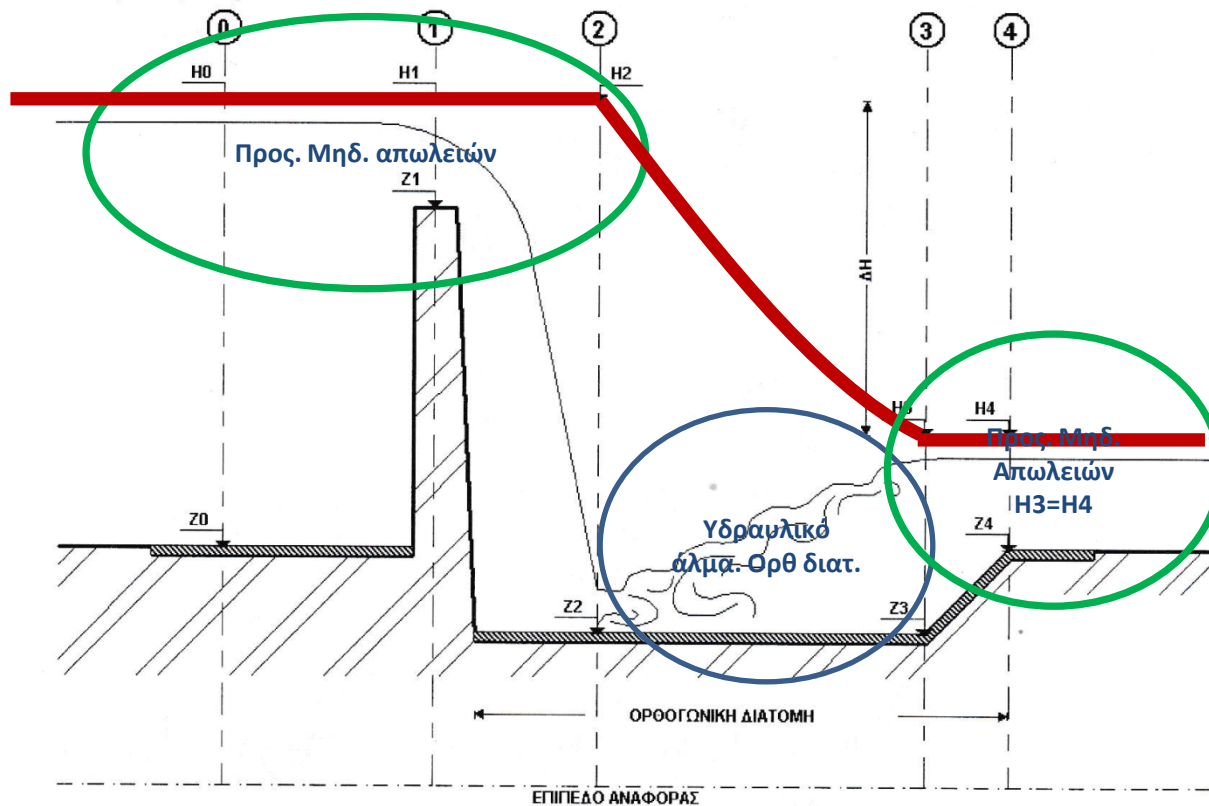
Μετατοπισμένο υδραυλικό άλμα



Άλλες εφαρμογές αναβαθμός συγκράτησης φορτίου με συρση, προσοχή κατάλληλο σκάμμα



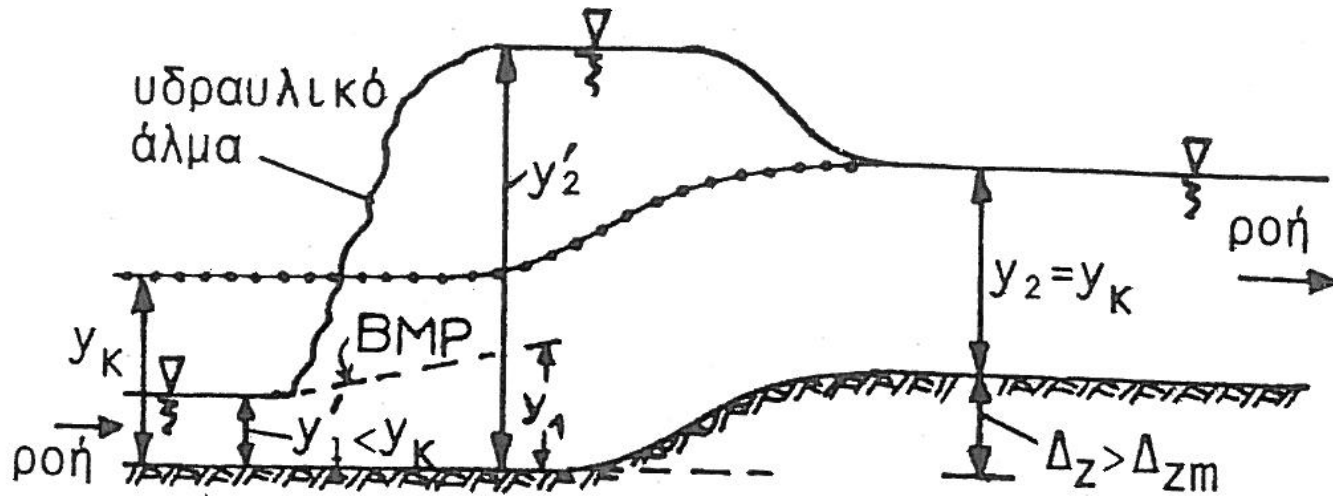
Άλλες εφαρμογές σκάμα ώστε 2, 3 συζυγή βάθη



Συζυγές βάθη για το υδραυλικό άλμα

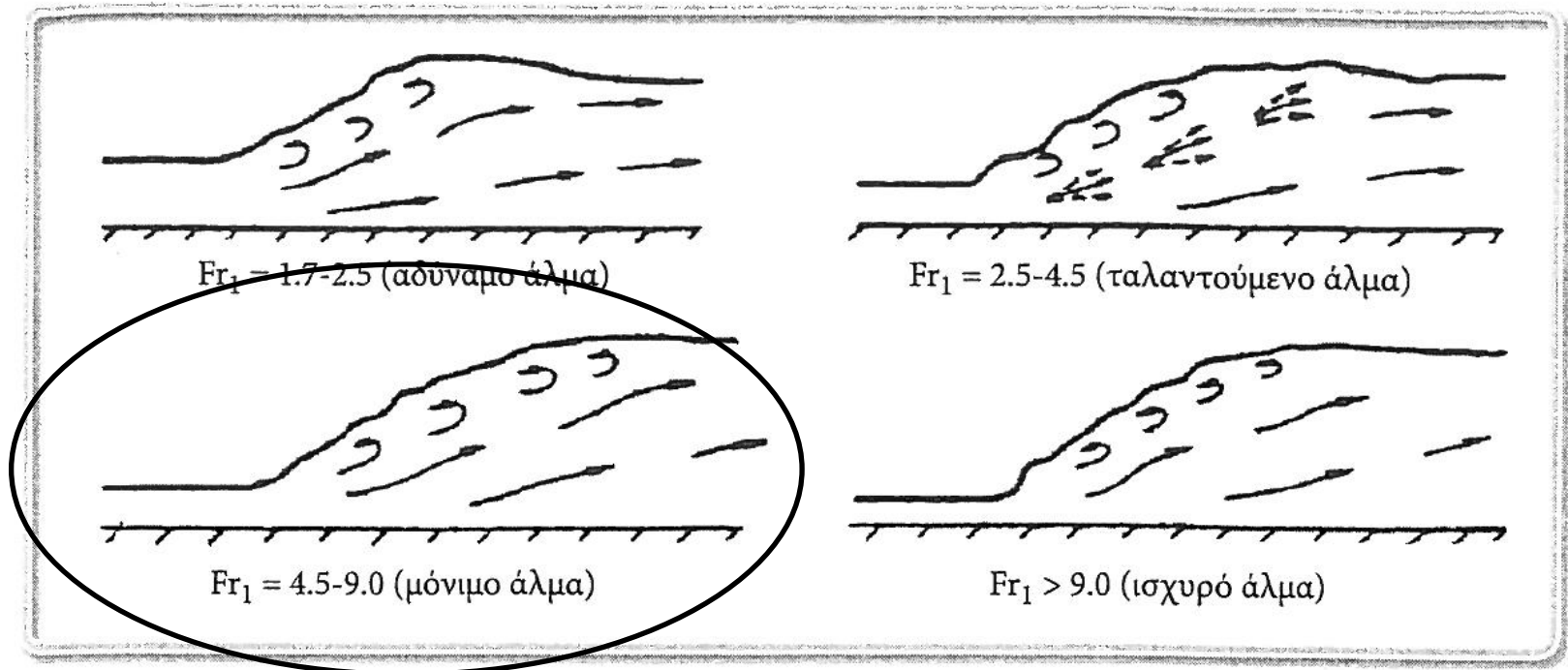
- Συνήθως, από τις κατάντη συνθήκες αμέσως μετά το υδραυλικό άλμα
- Από διατήρηση ορμής (άρα από την ειδική δύναμη) προκύπτει το συζυγές βάθος ροής αμέσως πριν το άλμα.
- Μπορεί να προϋπάρξει μία καμπύλη προσαρμογής που αυξάνει το μήκος της λεκάνης ηρεμίας

Υπερκρίσιμη ροή σε υψηλό εμπόδιο, περίπτωση (3), Δημητρίου...



Σχήμα 104

Είδη άλματος



Σχήμα 8.6: Επίδραση του αριθμού Froude στο τύπο του άλματος

Εφαρμογή

- Υδραυλικό άλμα εμφανίζεται σε αγωγό τραπεζοειδούς διατομής πλάτους πυθμένα $b_0=5$ m, κλίση πρανών 2:1. Το συζυγές βάθος ανάντη του άλματος είναι $y_1=1$ m και η παροχή $Q=50$ m³/s. Ποιο είναι το συζυγές βάθος y_2 κατάντη του άλματος; Ο πυθμένας να θεωρηθεί περίπου οριζόντιος.



Λύση:

Α τρόπος

$M1=M2$, για οριζόντιο υδραυλικό άλμα,
προσοχή στην άσκηση μη ορθογωνική
διατομή, επίλυση με δοκιμές

(Υδραυλικό άλμα σε μη ορθογωνική διατομή)

Α' τρόπος (με βάση την ισότητα στις ειδικές ενέργειες, δοκιμές):

Σε τραπεζοειδή διατομή η ειδική δύναμη θα είναι

$$M_i = \frac{by_i^2}{2} + \frac{zy_i^3}{3} + \frac{Q^2}{gy_i(b + zy_i)}$$

και επειδή ο πυθμένας είναι οριζόντιος από τη διατήρηση της ορμής ισχύει για οριζόντιο άλμα: $M_1 = M_2$

Οριζόντιο
άλμα $M_1 = M_2$

Ειδική
δύναμη με
βάση την
εξίσωση της
ορμής,
διαφέρει από
διατομή σε
διατομή

M1=M2, ΔΟΚΙΜΕΣ

και επειδή ο πυθμένας είναι οριζόντιος από τη διατήρηση της ορμής ισχύει για οριζόντιο υδραυλικό άλμα:
 $M_1=M_2$

Οπότε:

$$M_1 = \frac{5 * 1^2}{2} + \frac{2 * 1^3}{3} + \frac{50^2}{9.81 * 1 * (5 + 2 * 1)} \quad \text{και}$$

$$M_i = \frac{b * y_i^2}{2} + \frac{2 * y_i^3}{3} + \frac{Q^2}{g * y_i * (b + 2 * y_i)}$$

Επιλύοντας με δοκιμές τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει $y_2 = 2.66m$

Απώλειες ενέργειας σε υ.α: έμμεσα από ΑΔΕ

Η απώλεια ενέργειας θα προσδιοριστούν από την εξίσωση της ενέργειας:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_2 + \sum h_{\text{Loss}} \\ \sum h_{\text{Loss}} &\cong \sum h_{\text{υδρ.αλματος}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_1 + y_2 + \frac{u_1^2}{2g} = z_1 + y_2 + \frac{u_2^2}{2g} + \sum h_{\text{υδρ.αλματος}}$$

$$\left(\begin{aligned} \Rightarrow \cancel{z_1} + E_1 &= \cancel{z_2} + E_2 + \sum h_{\text{υδρ.αλματος}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum h_{\text{υδρ.αλματος}} &= E_1 - E_2 \Rightarrow \end{aligned} \right)$$

$$\Rightarrow \sum h_{\text{υδρ.αλματος}} = \frac{Q^2}{2 * g * ((b + zy_1) y_1)^2} + y_1 - \left(\frac{Q^2}{2g ((b + zy_2) y_2)^2} + y_2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum h_{\text{υδρ.αλματος}} = 0.77m$$

Οι απώλειες ενέργειας λόγω άλματος δεν πρέπει να συγχέονται με τις απώλειες λόγω τριβών πυθμένα. Τάξη μεγέθους μπορεί να προκύψει μόνο από πειραματικά δεδομένα (δεν υπάρχει μ αντίστοιχη σχέση σαν του Darcy-Weisbach).

Λόγω άλματος, δευτερεύουσες ροές δίνες κλπ καταστροφή ενέργειας πάντα, δεν ισχύει η εξίσωση Darcy-Weisbach, manning κλπ

Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|--------------|---|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |
| Τραπεζοειδής | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gh(B+zh)}$ |
| Τριγωνική | $\frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gzh^2}$ Πρίνος, 2014 |
| Κυκλική | $\left[3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{D^3}{24} + \frac{Q^2}{gD^2(\theta - \sin\theta)}$ $(\theta = 2\cos^{-1}\left[1 - 2\left(\frac{h}{D}\right)\right])$ |

Οριζόντιο άλμα χωρίς εμπόδιο:
 $M_1 = M_2$ για όλα τα είδη της διατομής

Λύση:

β τρόπος

$M1=M2$, για οριζόντιο υδραυλικό άλμα,
γραφική επίλυση από διάγραμμα

Β' τρόπος (με βάση την ισότητα στις ειδικές ενέργειες, διάγραμμα):

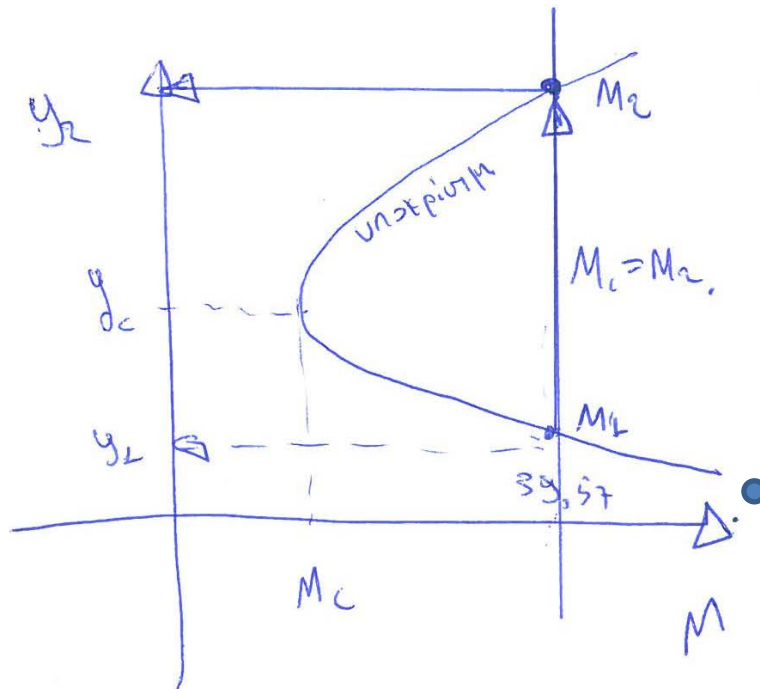
Καταστρώνουμε την καμπύλη $M(y)$

$$M(y) = \frac{by^2}{2} + \frac{zy^3}{3} + \frac{Q^2}{gy(b+zy)} = \frac{5y^2}{2} + \frac{2y^3}{3} + \frac{50^2}{gy(5+2y)}$$

$$M(y_1) = 39.57m^3 \text{ (θα είναι "κάτω" στην υπερκρίσιμη περιοχή)}$$

$M_1 = M_2 \rightarrow$ φέρνουμε κατακόρυφη \rightarrow προκύπτει το y_2 που θα είναι "πάνω" στην υποκρίσιμη περιοχή

Υδραυλικό άλμα: υπερκρίσιμη \rightarrow υποκρίσιμη ροή, πάντα υδραυλικό άλμα με απώλειες ενέργειας, το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει.



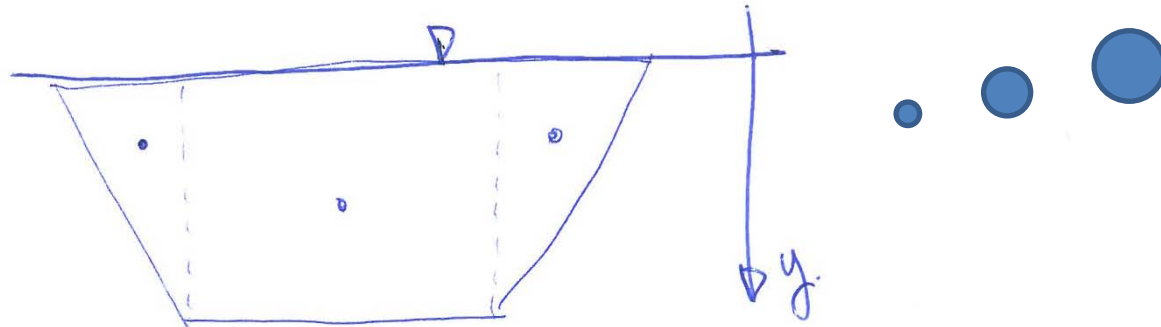
Β' τρόπος
γραφική
επίλυση

Λύση:
γ τρόπος

Απολύτως ισοδύναμος, εφαρμόζω την εξίσωση της ορμής, αναλύω την επιφάνεια και η δύναμη λόγω πίεσης σε κάθε υπό-επιφάνεια θα είναι ίση με τη πίεση στο κέντρο βάρους επί το εμβαδόν

2' Τρόπος:

Εφαρμογή Δ.ορμής:



Προσέχουμε αρχικά αφ' ότου στην ελεύθερη επιφάνεια
βρίσκουμε κέντρο βάρους σύνθετης διατομής

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Τότε F_p (δύναμη πίεσης) = $\rho (k \cdot \text{Βόρος}) \cdot A \left(\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right) =$

Γ τρόπος
απολύτως
ισοδύναμος
με αυτόν
της ειδικής
δύναμης
για
διδασκικούς
λόγους

Δύναμη από πίεση: πίεση στο κ.β. επί επιφάνεια για κατακόρυφη επιφάνεια

Κ.β από επιφάνεια νερού

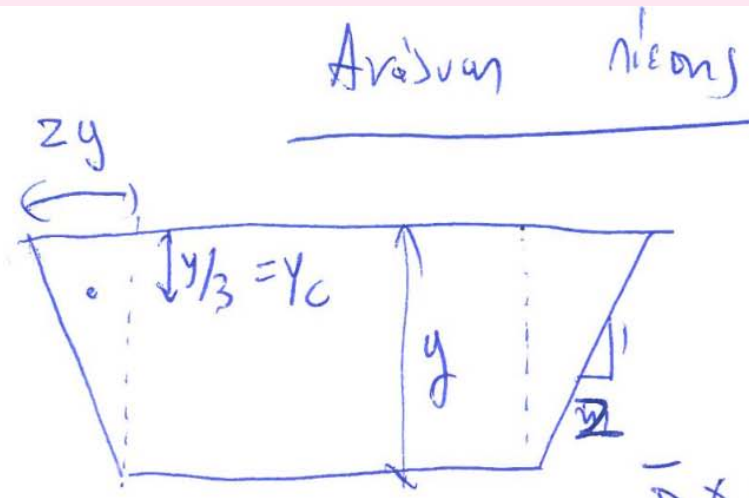
Στατική ορμή

Εκροή εισροή

$$\rho g \gamma_{c_1} A_1 - \rho g \gamma_{c_2} A_2 = \rho Q (v_2 - v_1)$$

αμειωτέρες: οριζόντια ομοιογενή το βόρρα
τριβή αυτημένα

Ανάλυση σε σύνθετες διατομές απλά αθροίζω τις δυνάμεις λόγω πίεσης σε κάθε επιφάνεια



$$\bar{p} \times A = F_D$$

Δύναμη πίεσης = πίεση σε κ.βύρος \times $A_{\text{ολ}}$.

$$F = \bar{p} \cdot A_{\text{ολ}} = \rho g y_c \cdot A_{\text{ολ}} = \rho g \frac{y_c A_1 + y_c A_2 + y_c A_3}{A_1 + A_2 + A_3} (A_1 + A_2 + A_3) =$$

$$F_{P_2} = \rho g y_{c1} A_1 + \rho g y_{c2} A_2 + \rho g y_{c3} A_3 =$$

$$= \bar{p}_1 A_1 + \bar{p}_2 A_2 + \bar{p}_3 A_3 \left(\begin{array}{l} \text{χωρίς τις} \\ \text{επιφάνειες στ} \\ \text{ζμήματα} \end{array} \right) =$$

Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|--------------|---|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |
| Τραπεζοειδής | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{zh^3}{3} + \frac{Q}{gh(B+zh)}$ |
| Τριγωνική | $\frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gzh^2}$ |
| Κυκλική | $\left[3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{D^3}{24} + \frac{Q^2}{gD^2(\theta - \sin\theta)}$ $(\theta = 2\cos^{-1}\left[1 - 2\left(\frac{h}{D}\right)\right])$ |

Οριζόντιο άλμα χωρίς εμπόδιο:
 $M1=M2$ για όλα τα είδη της διατομής

$$= \left(\rho g \frac{y_1}{3} \right) \frac{y_1^2 \cdot 2}{2} + \rho g \frac{y_1}{2} (yb) + \rho g \frac{y_1}{3} \left(\frac{y_1^2 \cdot 2}{2} \right) =$$

$$= \rho g \left(\frac{y_1^3 \cdot 2}{3} + b \frac{y_1^2}{2} \right) =$$

$$= \rho g \left(\frac{1^3 \cdot 2}{3} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} \right)$$

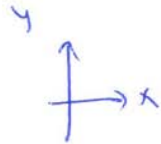
Όμοια

$$F_{P_2} = - \rho g \left(\frac{\gamma_2 \cdot 2}{3} + \frac{5 \cdot \gamma_2^2}{2} \right)$$

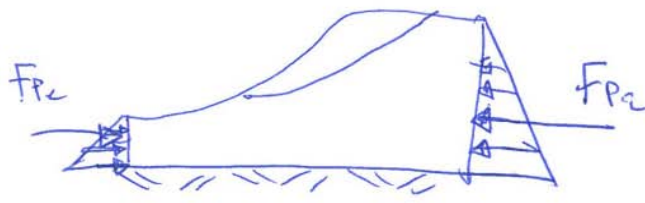
Στισιμη ορμή

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Εξροή} > 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{V} > 0 \quad \vec{n} \parallel \vec{V} \\ \text{Εισροή} < 0 \quad \vec{n} \cdot \vec{V} < 0 \quad \vec{n} \nparallel \vec{V} \end{array} \right.$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \rho Q (\vec{V}_{\text{εξροή}} - \vec{V}_{\text{εισοή}})_x$$



ως από τυχαία σύστημα αξόνων.



Μεταβολή στην πίεση εξισορροπεί τη δύναμη αδράνειας

Πίνακας 8.1: Ειδική Δύναμη M για αγωγούς διαφόρων διατομών

| Διατομή | Ειδική Δύναμη M |
|--------------|---|
| Ορθογωνική | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{Q^2}{gBh}$ |
| Τραπεζοειδής | $\frac{Bh^2}{2} + \frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gh(B+zh)}$ |
| Τριγωνική | $\frac{zh^3}{3} + \frac{Q^2}{gzh^2}$ |
| Κυκλική | $\left[3\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \frac{D^3}{24} + \frac{Q^2}{gD^2(\theta - \sin\theta)}$ $\left(\theta = 2\cos^{-1}\left[1 - 2\left(\frac{h}{D}\right) \right] \right)$ |

Οριζόντιο άλμα χωρίς εμπόδιο:
 $M1=M2$ για όλα τα είδη της διατομής

$$F_{p_1} - F_{p_2} = \rho Q \left(\frac{Q}{(b + zy_2)y_2} - \frac{Q}{(b + zy_1)y_1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\rho g \left(\frac{1^3 * 2}{3} + \frac{1^2 * 5}{2} \right) - \rho g \left(\frac{y_2^3 * 2}{3} + \frac{y_2^2 * 5}{2} \right) = \rho 50 \left(\frac{50}{(5 + 2 * y_2)y_2} - \frac{50}{(5 + 2 * 1)1} \right)$$

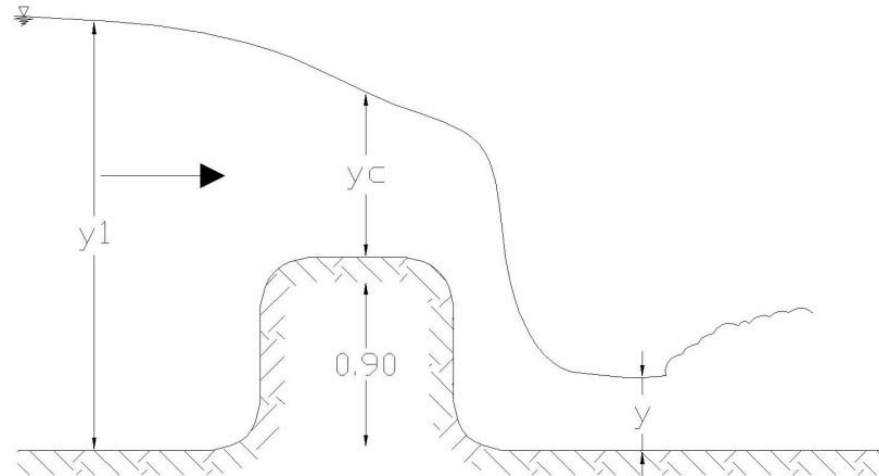
$$\rightarrow y_2 = 7.5$$

Άσκηση

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε ορθογωνική διατομή, με πλάτος 3.00 m, παρεμβάλλεται εμπόδιο ύψους 90 cm. Η ροή αρχικά είναι υποκρίσιμη. Το βάθος ροής πάνω από το εμπόδιο είναι 0.61 m όπου και η ροή είναι κρίσιμη. Να προσδιορισθεί:

- 1) η ειδική παροχή
- 2) το βάθος ροής στη θέση (1), ανάντη του εμποδίου, και το βάθος ροής κατάντη του εμποδίου (η άσκηση συνεχίζεται)(Τερζίδης, 1997)



Κρίσιμη ροή

1) Όπως είναι γνωστό όταν παρουσιάζεται κρίσιμη ροή ο αριθμός Froude γίνεται ίσος με τη μονάδα. Για ορθογωνική διατομή ισχύει:

$$F_r = 1 \Rightarrow \left[\frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \Rightarrow \frac{q}{\sqrt{gy_c^3}} = 1 \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q = \sqrt{g \cdot y_c^3} = \sqrt{9.81 \cdot 0.61^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q = 1.49 m^3 / s / m$$

Επομένως:

$$V_c = \frac{q}{y_c} = \frac{1.49}{0.61} = 2.44 m / s$$

Αρχή διατ. ενέργειας

1) Α' Τρόπος:

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας και θεωρώντας αμελητέες της απώλειες ενέργειας, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_1^2}{2g} + y_1 \right) + z_1 &= \left(\frac{V_c^2}{2g} + y_c \right) + z_2 = \left(\frac{V_3^2}{2g} + y_3 \right) + z_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{q^2}{2 \cdot 9.81 \cdot y_1^2} + y_1 &= 0.9 + \left(\frac{2.44^2}{2 \cdot 9.81} + 0.61 \right) = \frac{q^2}{2 \cdot 9.81 \cdot y_3^2} + y_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2.23}{19.62 \cdot y_1^2} + y_1 &= 1.815 = \frac{2.23}{19.62 \cdot y_3^2} + y_3 \end{aligned}$$

Αξιοσημείωτο αλλά απόλυτος ερμηνεύσιμο είναι το γεγονός ότι οι δύο εξισώσεις είναι απολύτως ισοδύναμες

Δύο λύσεις

Επιλύοντας την εξίσωση έχουμε τις εξής λύσεις:

$$y_1 = 1.80 \text{ για την ανάντη ροή}$$

$$\text{και } y_3 = 0.27 \text{ για την κατάντη ροή}$$

$$\text{Για } y_1 = 1.80 > y_c, \left[\beta' \text{ τρόπος : } F_r = \frac{V_1}{\sqrt{g \cdot y_1}} = \frac{q}{\sqrt{g \cdot y_1^3}} = \frac{1.49}{\sqrt{9.81 \cdot 1.8^3}} = 0.197 < 1 \right]$$

η ροή είναι υποκρίσιμη.

$$\text{Για } y_3 = 0.27 < y_c, \left[\beta' \text{ τρόπος : } F_r = \frac{V_3}{\sqrt{g \cdot y_3}} = \frac{q}{\sqrt{g \cdot y_3^3}} = \frac{1.49}{\sqrt{9.81 \cdot 0.27^3}} = 3.39 > 1 \right]$$

η ροή είναι υπερκρίσιμη.

$$y_{it} = \frac{2.23}{19.624 y_{it}^2} = 1.815$$

$y_1 = 1.8$ a katen
poh
vostripny

$y_3 = 0.27$
kuzivny
poh
vostripny

Κατασκευή καμπύλης

Β' Τρόπος:

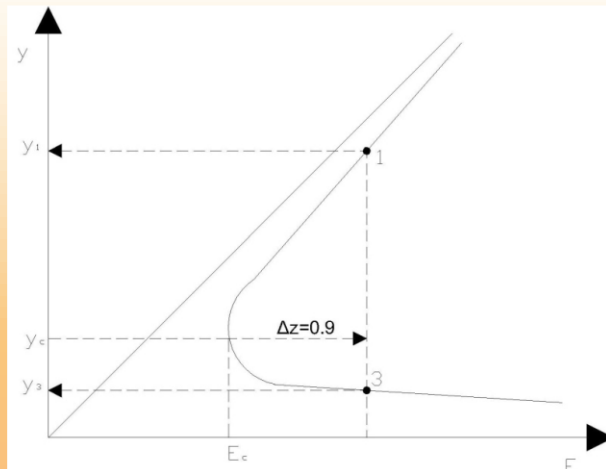
Γραφική επίλυση:

Πραγματοποιώ την γραφική συνάρτηση:

$$E = \frac{V^2}{2g} + y = \frac{q^2}{y^2} + y = \frac{q^2}{2gy^2} + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1.49^2}{2gy^2} + y$$

Από το ελάχιστο που αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος ($y_c = 0.61$ m, από εκφώνηση) μετατοπιζόμαστε οριζόντια δεξιά (αύξηση κατά $\Delta z = 0.9$ m) και η κατακόρυφος προσδιορίζει τα δύο εναλλακτά βάθη.

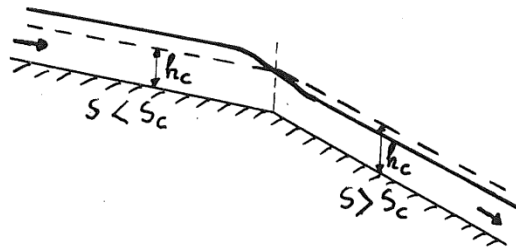


Βρίσκω το σημείο κρίσιμης ροής (ελάχιστο) και μετατοπίζω δεξιά κατά Δz . Τα δύο σημεία που η κατακόρυφος τέμνει την καμπύλη $E(y)$ είναι τα ζητούμενα σημεία

10. ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΚΡΙΣΙΜΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΡΟΗΣ

- Σε διατομές του ανοικτού αγωγού, όπου έχουμε μετά από ποτάμια σε χειμαρρώδη ροή (ή αντίστροφα):
 - αλλαγή κλίσης του πυθμένα του αγωγού
 - αναβαθμός zoποθετημένος στον πυθμένα
 - εύγκλιση του πλάτους του αγωγού

Αλλαγή κλίσης του πυθμένα



- Σε απότομη αλλαγή της κλίσης η καμπυλότητα των ροϊκών γραμμών είναι μεγάλη, οπότε δεν ισχύει η παραδοχή της υδροστατικής κατανομής της πίεσης.

Εφαρμογή, συνέχεια άσκησης

(Τερζίδης, 1997)

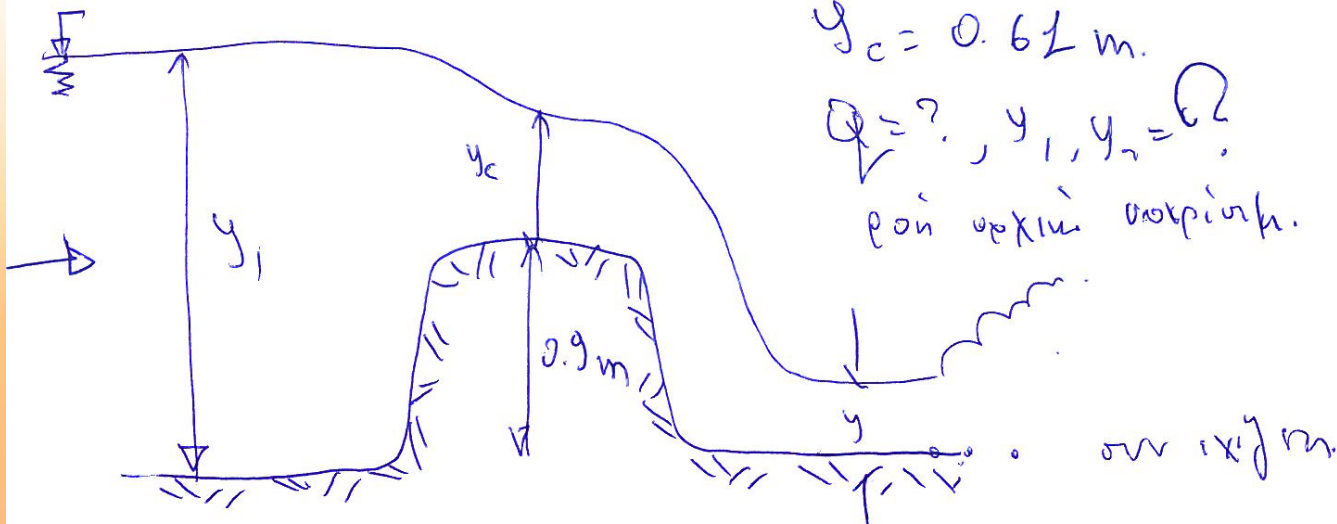
ορθ/κη διαρροή, $b = 3.00 \text{ m}$

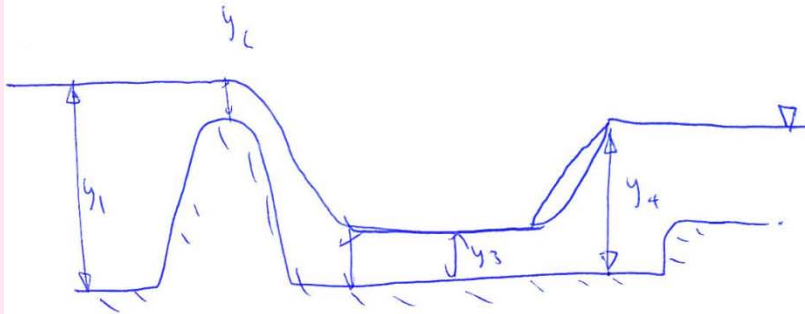
$$D_2 = 0.9$$

$$y_c = 0.62 \text{ m}$$

$$Q = ? , y_1, y_2 = ?$$

ροή ορθοκίνητη ασφύση.





3-4, υδραυλικό άμα,
οριζ. Αγωγός,
ορθογωνική διατομή

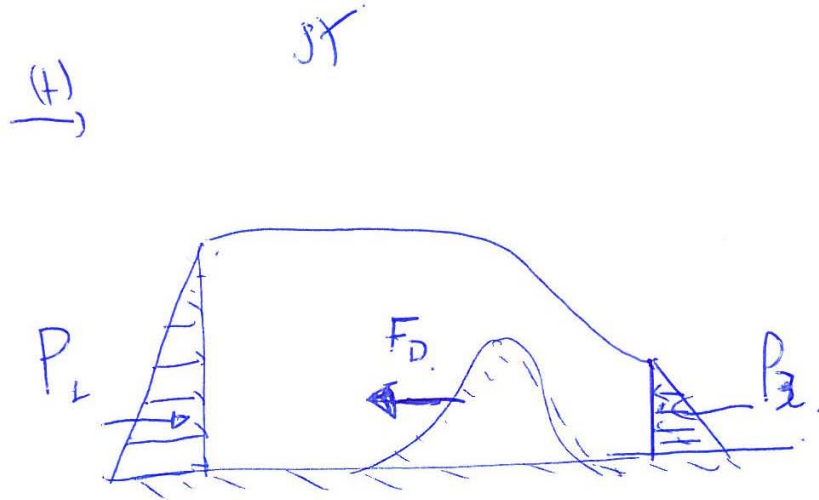
Μεταξύ y_3 και y_4 .

Υδραυλικό άμα, ορθ./την διατομή

$$\frac{y_4}{y_3} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_3^2} \right)$$

$$Fr_3 = \frac{u_3}{\sqrt{g y_3}} = \frac{2}{y_3 \sqrt{g y_3}} = 3.38$$

$$\Rightarrow \frac{y_4}{y_3} = 4.3 \Rightarrow y_3 = 1.16 \text{ m}$$



$$\frac{1}{2} b \rho g y_1^2 - \frac{1}{2} \rho g y_3^2 b - F_D = \rho Q \left(\underset{\text{ελεπον}}{v_3} - \underset{\text{ελεπον}}{v_2} \right) \rightarrow$$

$$\text{∴ } F_D = -\rho Q (v_3 - v_1) + \frac{1}{2} b \rho g y_1^2 - \frac{1}{2} \rho g y_3^2 b =$$

$$(Q = v y)$$

$$= -\rho \cdot 4.47 \left(\frac{1.49}{0.27} - \frac{1.49}{1.78} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \rho g 1.78^2 - \frac{1}{2} \rho g \cdot 0.27^2 =$$

$$= \underline{\underline{24,630 \text{ N}}}$$

β' τρόπος (απολύτως 100% δύσκολο)

$$-\frac{F_D}{\rho g} = M_3 - M_2 \quad \epsilon_1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{προσέγγιση, όχι} \\ \text{την ειδική} \\ \text{δύναμη ανά μονάδα} \\ \text{πλάτους} \end{array} \right)$$

$$-\frac{F_D}{\rho g} = \frac{Q^2}{g y_3^3 b} + \frac{y_3^2 b}{2} - \frac{Q^2}{g y_2^3 b} - \frac{y_2^2 b}{2} =$$

$$= \frac{4.47^2}{9.81 \cdot 0.27 \cdot 3} + \frac{0.27^2 \cdot 3}{2} - \frac{4.47^2}{9 \cdot 1.78 \cdot 3} - \frac{1.78^2 \cdot 3}{2}$$

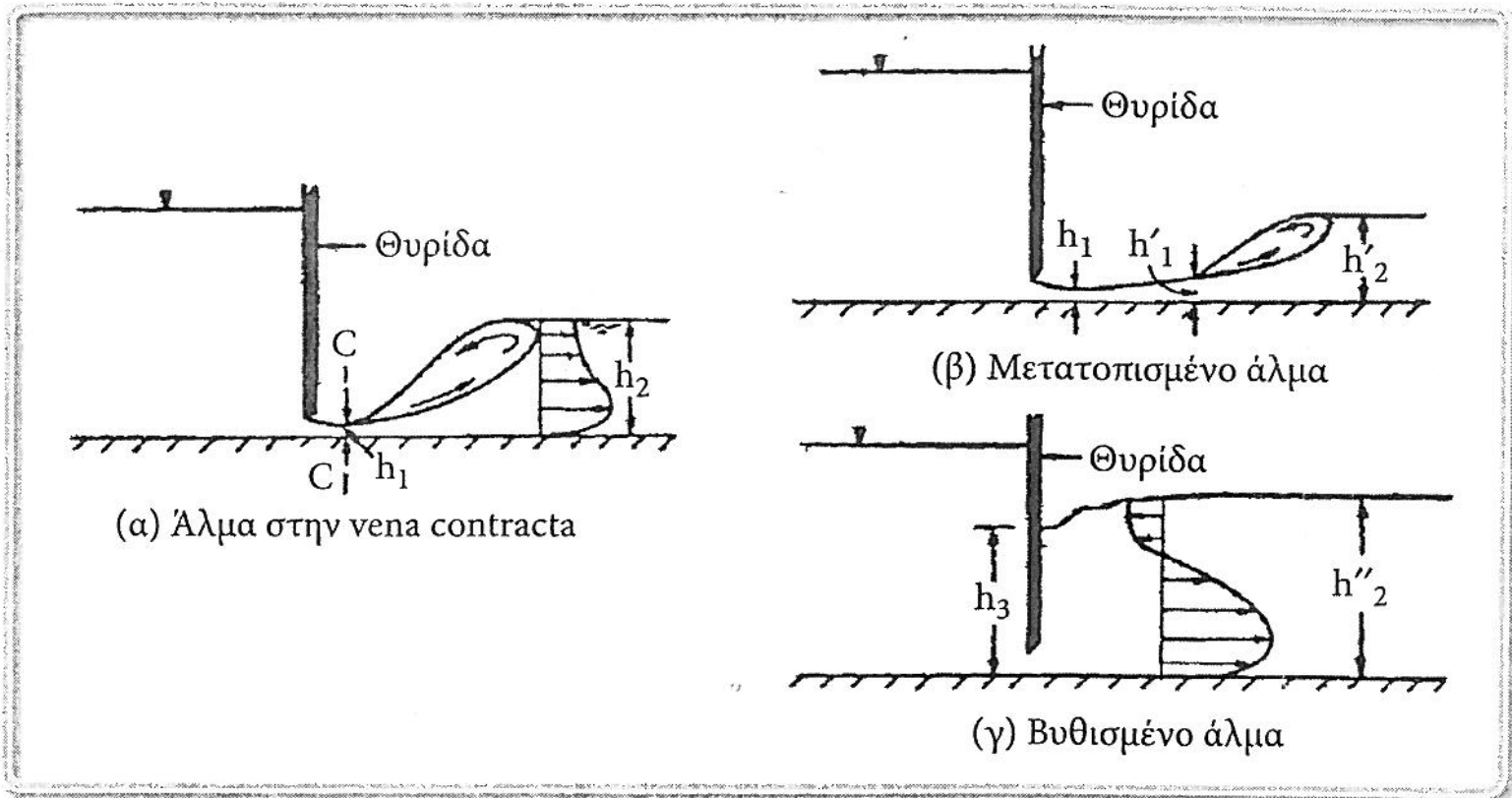
$$\left(M = \frac{Q^2}{g A} + A \bar{y} \right), \quad \left(\begin{array}{l} \text{οπρ.} \\ \text{δευτερογενής} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} A = y b \\ \bar{y} = y/2 \end{array} \right)$$

Δε χρησιμοποιώ την ειδική δύναμη ανά μονάδα πλάτους

$$\rightarrow F_D = 24,630 \text{ N}$$

- Ίση και αντίθετης φορά δύναμη θα ασκήσει το ρευστό στο φυσικό εμπόδιο...(γ' νόμος Νεύτωνα)

Υδραυλικό άμα μετά από θυρίδα, περίπτωση 2



Σχήμα 3.5: Ελεύθερο και Βυθισμένο άμα