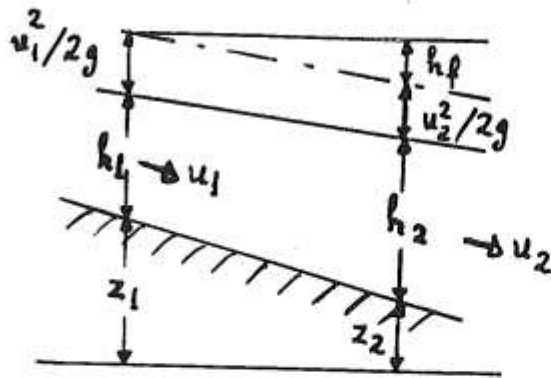


# Θεωρία κρίσιμου βάρθους

Μ.Σπηλιώτη  
Αν. Καθηγητής

### 9. ΕΙΔΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ



Ολικό φορτίο ή ύψος ενέργειας:  $H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{u^2}{2g}$

Για ανοικτούς αγωγούς:  $H = h + z + \frac{u^2}{2g}$

- μικρή κλίση
- ροϊκές γραμμές ευθείες και παράλληλες

$$E = h + \frac{u^2}{2g}$$

E: ειδική ενέργεια

$$u = \frac{Q}{A} \Rightarrow E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

# Ειδική ενέργεια

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$f(E, Q, y) = 0$$

Ειδική ενέργεια για δεδομένη παροχή  
συνάρτηση του βάθους ροής

$$E = E_s + E_k$$

όπου

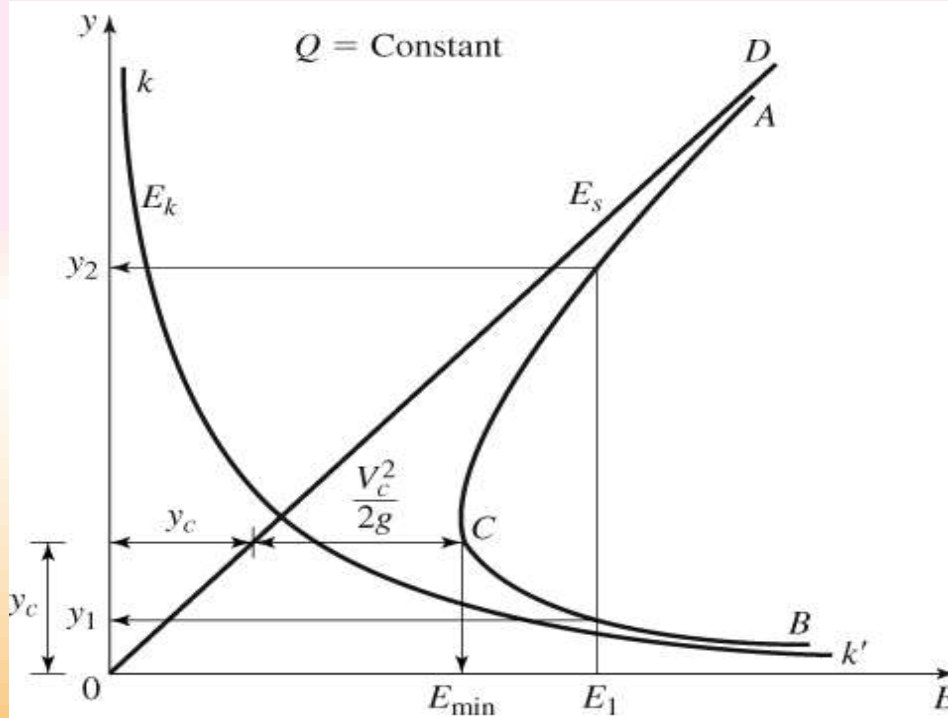


και



$$=f'(y)$$

# Διάγραμμα ειδικής ενέργειας



Διάγραμμα ειδικής ενέργειας

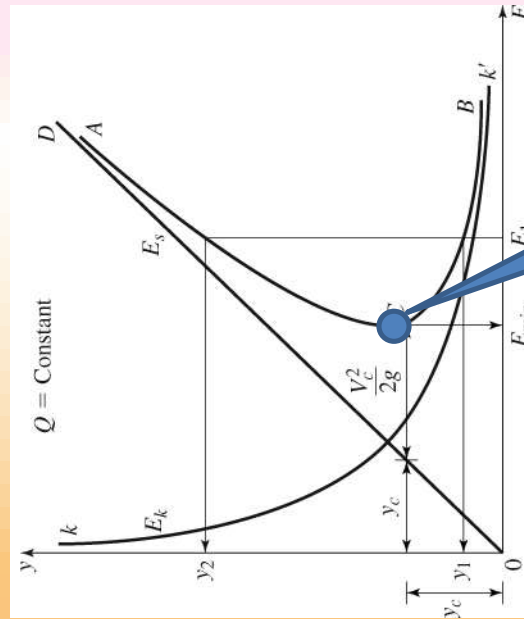
- $E_s$  μεταβάλλεται γραμμικά με το  $y$
- $E_k$  μεταβάλλεται μη γραμμικά με το  $y$

- για δοσμένη  $E$ : δύο συζυγή βάθη ( $y_1$  &  $y_2$ )

- Για δεδομένη παροχή υπάρχουν δύο βάθη με την ίδια ειδική ενέργεια

-  $E_{min}$  : κρίσιμο βάθος

# $E=f(y)$ για δεδομένη παροχή $Q$



Ελάχιστη ειδική  
ενέργεια κρίσιμο  
βάθος

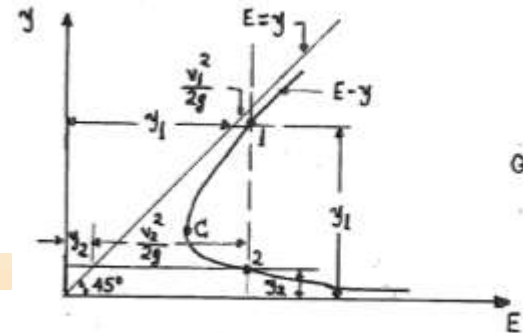
# Κρίσιμη ροή

Ορίζεται για την ελάχιστη ειδική ενέργεια

## Ειδική ενέργεια

- Ενέργεια ανά μονάδα βάρους του υγρού, σε μια διατομή, με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του αγωγού ( $z=0$ )

$$E = y + \frac{v^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$



Για  $y \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow \infty$ , για  $y \rightarrow \infty$ ,  $E \rightarrow y \rightarrow \infty$

$E \rightarrow \min$ , για  $y = y_c$  (κρίσιμο βάθος)

Χρυσάνθου, 2014

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \text{ για } y = y_c}$$

Κρίσιμο βάθος από ελάχιστη ειδική  
ενέργεια

# Ελάχιστη ειδική ενέργεια: ακρότατο συνάρτησης $E=y+Q^2/(2gA^2) = f(y)$

$$\frac{d\left(y + \frac{Q^2}{2gA^2}\right)}{dy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{dA^{-2}}{dy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{dA^{-2}}{dA} \frac{dA}{dy} = 0 \Leftrightarrow$$

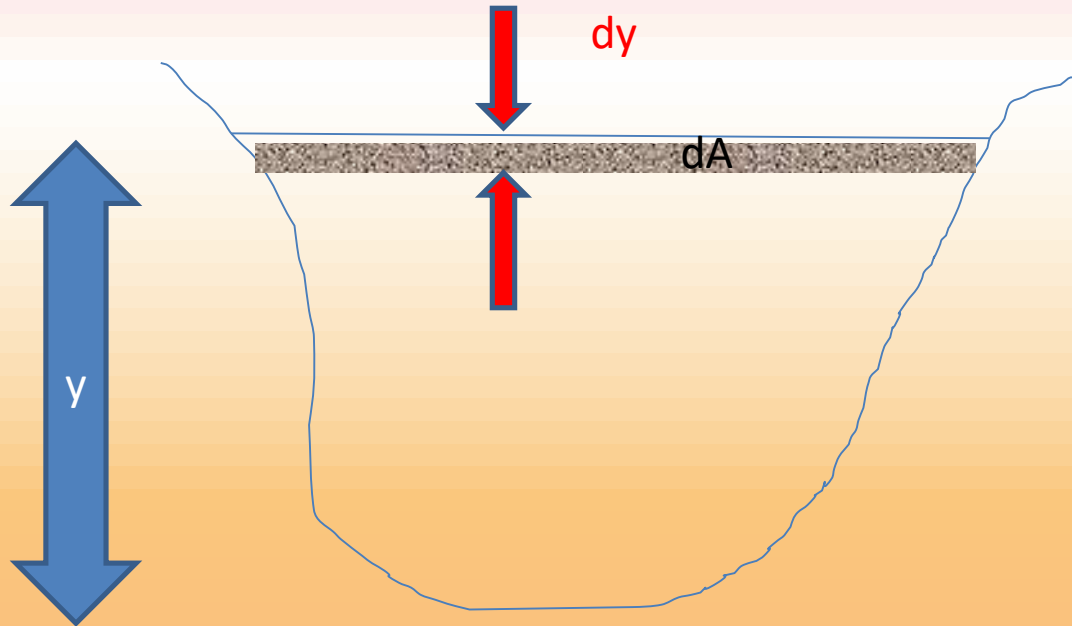
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{Q^2}{2g} \left(-2A^{-3}\right) \frac{dA}{dy} = 0$$

Κανόνας της αλυσίδας

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$



$$dA/dy=?$$



Στη «γειτονιά» του βάθους ροής  $y$   
ισχύει:

$$\frac{dA}{dy} = B$$

Ελάχιστη ειδική ενέργεια: ακρότατο  
συνάρτησης  $E=y+Q^2/(2gA^2) = f(y)$

$$\frac{d\left(y + \frac{Q^2}{2gA^2}\right)}{dy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{Q^2}{2g} (-2A^{-3}) \frac{dA}{dy} = 0$$

# Τελική λύση και σχηματοποίηση του αριθμού Froude

$$Fr = \sqrt{\frac{Q^2}{g \frac{A^3}{B}}} = \frac{Q}{\sqrt{g \frac{A^3}{B}}} = \frac{V}{\sqrt{g \frac{A}{B}}} = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

*Κρίσιμες συνθήκες*

$$Fr = 1$$

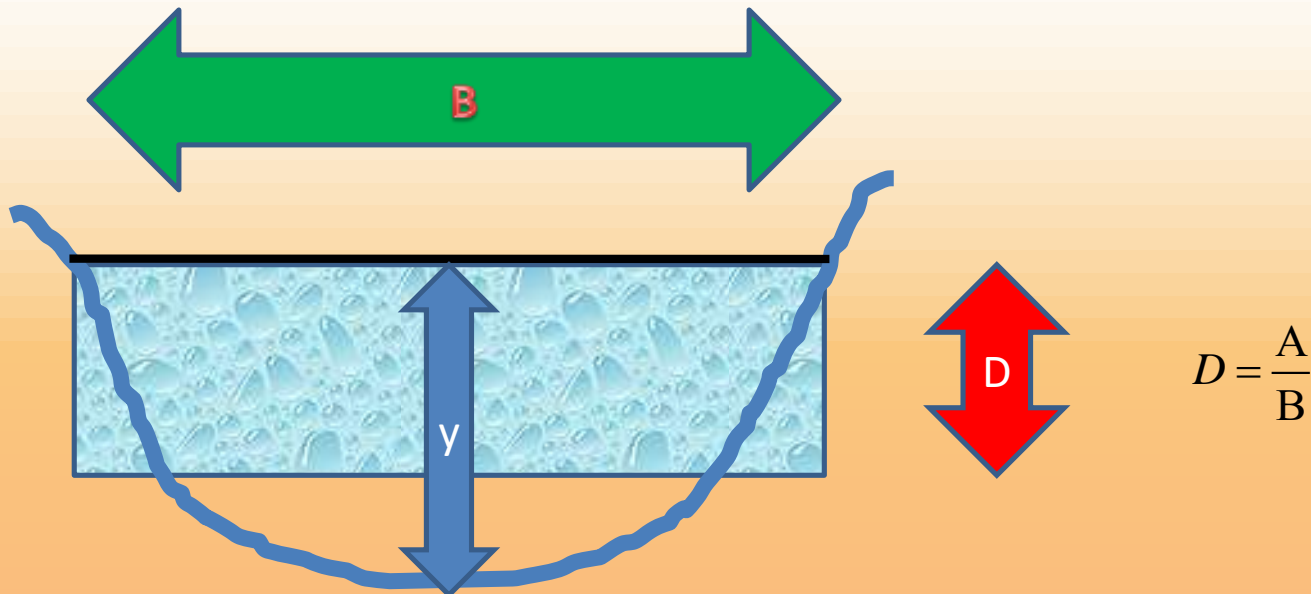


Ελάχιστη ειδική ενέργεια

Το κρίσιμο βάθος εξαρτάται από την παροχή και τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής

# Υδραυλικό βάθος D

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g \frac{A}{B}}} = \frac{V}{\sqrt{gD}}, D = \frac{A}{B}$$



# Χρήσιμα συμπεράσματα για την κρίσιμη ροή

- Κρίσιμη ροή

$$\frac{Q^2}{g} \left( \frac{B}{A^3} \right)_c = 1 \Leftrightarrow \frac{Q^2}{g} = \left( \frac{A^3}{B} \right)_c$$

- Για δεδομένη παροχή αντιστοιχεί ένα κρίσιμο βάθος (ανεξάρτητα από άλλους παράγοντες παρά μόνο από τη γεωμετρία της διατομής)
- Τότε η ειδική ενέργεια είναι **ελάχιστη**

# Ειδική ενέργεια για κάθε διατομή σε κρίσιμες συνθήκες

$$\left. \begin{aligned} E_c &= y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} \\ \frac{Q^2}{g} \left( \frac{B}{A^3} \right)_c &= 1 \Leftrightarrow \frac{Q^2}{gA_c^2} = \left( \frac{A}{B} \right)_c \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_c = y_c + \frac{1}{2} \left( \frac{A}{B} \right)_c$$

*π.χ. Ορθογωνική διατομή*

$$y_c + \frac{1}{2} \frac{A_c}{B_c} = y_c + \frac{1}{2} \frac{by_c}{b} = y_c + \frac{1}{2} y_c = \frac{3}{2} y_c$$

- συζυγή βάθη ροής
- υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη, κρίσιμη ροή

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = Fr^2 \Rightarrow \text{αριθμός Froude (Fr)}$$

$$Fr < 1 \Rightarrow \text{υποκρίσιμη ροή}$$

$$Fr > 1 \Rightarrow \text{υπερκρίσιμη ροή}$$

$$Fr = 1 \Rightarrow \text{κρίσιμη ροή}$$

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \quad \text{για } y = y_c \Rightarrow Q^2 = \frac{g A^3}{B} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{g A^3}{B}} \Rightarrow Q = \sqrt{g} A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$f_c = A \sqrt{\frac{A}{B}} : \text{συνάρτηση κρίσιμης ροής}$$

Έλεγχος κρίσιμης ροής με βάση τον αριθμό Fr ή το κρίσιμο βάθος

# Κρίσιμο βάθος

Κρίσιμη ροή :

$$\left. \begin{array}{l} y > y_c \rightarrow \text{ροή υποκρίσιμη.} \\ y < y_c \rightarrow \text{ροή υπερκρίσιμη} \\ y = y_c \rightarrow \text{ροή κρίσιμη.} \end{array} \right\}$$

$y_c$ : Βάθος ομοιόμορφης ροής ( $y = \text{σταθ}$ )  
 $v = \text{σταθ}$ .

Μπορεί να είναι κρίσιμο, υπερκρίσιμο ή υποκρίσιμο,  
 $y_c$  καθορίζεται από την κλίση.



# Περιοχές διαγράμματος ειδικής ενέργειας

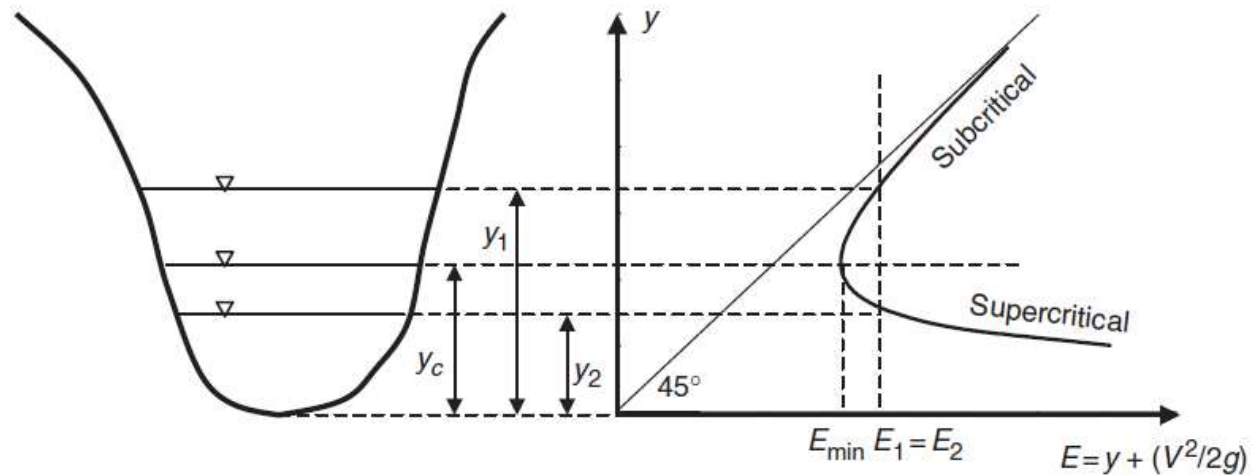


FIGURE 2.6 Specific energy diagram

**ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΔΙΑΤΟΜΗ**

# Ορθογωνική διατομή

- Συνήθως, σε δύσκολες περιπτώσεις ορθογωνική διατομή (π.χ. εκχειλιστή, υδραυλικό άλμα)
- Συνήθως οι ασκήσεις ταχέως μεταβαλλόμενης ροής αναφέρονται σε ορθογωνικούς αγωγούς
- Ειδική παροχή (μόνο σε ορθογωνικούς αγωγούς) ,  $q=Q/b$

# Αριθμός Froude για ορθογωνική διατομή

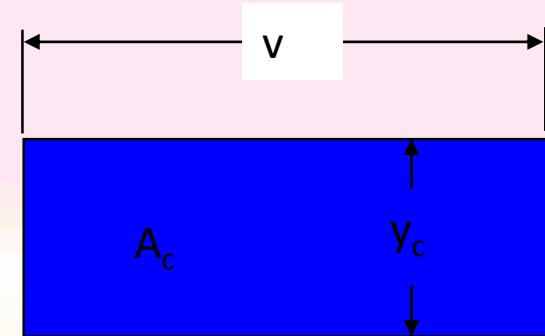
Προσοχή, μόνο για ορθογωνική διατομή!

$$A = By, \quad \frac{A}{B} = y$$
$$Fr = \frac{v}{\sqrt{gy}}$$

βίβλος ραβ, γ

# Κρίσιμη ροή σε ορθογωνικές διατομές

$$\left. \begin{aligned} b &= b_c \\ Q &= qb \\ A_c &= y_c b \end{aligned} \right\}$$



$$Fr^2 = 1 \leftrightarrow \frac{Q^2}{g \frac{A_c^3}{B_x}} \rightarrow Fr^2 = 1 = \frac{q^2 b^3}{g y_c^3 b^3} = \frac{q^2}{g y_c^3}$$

$$y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3}$$

Μόνο για ορθογωνικές διατομές!

$$q = \sqrt{g y_c^3} \quad \text{αντίστροφα!}$$

# Κρίσιμη ροή σε ορθογωνικές διατομές

$$Fr = \frac{V_c}{\sqrt{gy_c}} = 1 \rightarrow y_c = \left( \frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad y_c^3 = \left( \frac{V_c^2 y_c^2}{g} \right) \quad \text{εφόσον} \quad q = V_c y_c$$

$$\frac{V_c}{\sqrt{y_c g}} = 1 \quad \text{Froude number} \quad \frac{\text{Δύναμη αδράνειας}}{\text{Δύναμη βαρύτητας}} \quad \sqrt{\frac{\text{Kinetic energy}}{\text{Potential energy}}}$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{q^2}{2gy_c^2} = \frac{gy_c^3}{2gy_c^2} = \frac{y_c}{2} \rightarrow \frac{y_c}{2} = \frac{V_c^2}{2g} \quad \text{Ύψος κιν. ενέργειας} = \underline{0.5 \times (\text{κρ. βάθος})}$$

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \rightarrow E = y_c + \frac{y_c}{2} \rightarrow y_c = \frac{2}{3} E$$

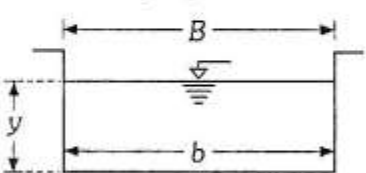
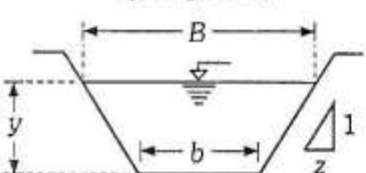
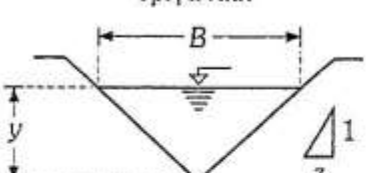
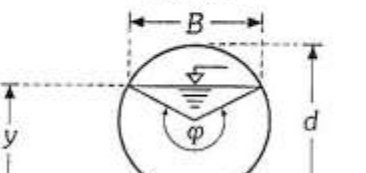
Θεωρία κρίσιμης ροής  
έλεγχος κλίσης πυθμένα  
(σχεδιασμός για **ομοιόμορφη ροή**)

# Έλεγχος υποκρίσιμης ροής με τις υπάρχουσες συνθήκες

- Εύκολος τρόπος. Απλά υπολογίζω τον αριθμό **Fr**, Αν **Fr < 1**, ροή υποκρίσιμη
- **Εύρεση κρίσιμου βάθους  $y_c$  –όταν  $Fr=1$**  (πολλές φορές με δοκιμές). Αν  **$y > y_c$**  ροή υποκρίσιμη



Πίν. 3.1: Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών

Διατομή	Επιφάνεια $A$	Βρεχ. περίμετρος $P$	Υδραυλική ακτίνα $R = A/P$	Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας $B$	Υδραυλικό βάθος $y_p = A/B$	Αριθμός Froude $F$
<p>Ορθογωνική</p> 	$by$	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	$b$	$y$	$\sqrt{\frac{Q^2}{b^2y^3g}}$
<p>Τραπεζοειδής</p> 	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\frac{(b+zy)y}{b+2zy}$	$\sqrt{\frac{(b+2zy)Q^2}{(b+zy)^3y^3g}}$
<p>Τριγωνική</p> 	$zy^2$	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{y}{2}$	$\sqrt{\frac{2Q^2}{z^2y^5g}}$
<p>Κυκλική</p> 	$\frac{d^2}{8}(\varphi - \sin\varphi)$	$d\frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{4}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$	$d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\frac{d}{8}\left\{\frac{\varphi - \sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right\}$	$\sqrt{\frac{512Q^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{gd^5(\varphi - \sin\varphi)^3}}$

## Σχεδιαστικά: κλίση πυθμένα, έλεγχος με βάση το βάθος ομοιόμορφης ροής

- Έλεγχος κλίσης πυθμένα. Όταν το βάθος ομοιόμορφης ροής για δεδομένη παροχή είναι μεγαλύτερο από το κρίσιμο βάθος τότε η κλίση είναι ήπια.
- Όταν το βάθος ομοιόμορφης ροής είναι μικρότερο από το κρίσιμο βάθος για δεδομένη παροχή τότε η κλίση είναι απότομη
- Όταν το βάθος ομοιόμορφης ροής είναι ίσο με το κρίσιμο βάθος για δεδομένη παροχή τότε η κλίση είναι κρίσιμη

# Ομοιόμορφη ροή, έλεγχος κρίσιμων συνθηκών

- Αρχικά προσδιορίζω το κρίσιμο βάθος

$$(κρίσιμο βάθος γν) \frac{Q}{\sqrt{g \frac{A_c^3}{B_c}}} = 1$$

Για δεδομένη παροχή, το κρίσιμο βάθος εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής

- Από την εξίσωση του Manning υπολογίζω την κρίσιμη κλίση (βάθος ομοιόμορφης ροής ίσο με κρίσιμο)

$$Q = \frac{1}{n} A_c R_c^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow S_0 = \left( \frac{Q \cdot n}{A_c R_c^{2/3}} \right)^2$$

- Η κρίσιμη κλίση εξαρτάται, για δεδομένη γεωμετρία και παροχή και από το συντελεστή Manning

• Η ροή θα είναι η κρίσιμη ή υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη

• Η ροή μπορεί να είναι ή να μην είναι ομοιόμορφη

• Η έννοια της κρίσιμης ροής έχει ευρύτερη εφαρμογή στην υδραυλική των ανοικτών αγωγών από την ομοιόμορφη ροή (εφαρμόζεται και την ομοιόμορφη και την ανομοιόμορφη ροή)

• το κρίσιμο βάθος δεν εφαρμόζεται στην υδραυλική των κλειστών αγωγών

# Σχεδιαστικά

- Έλεγχος ώστε η ροή να είναι **υποκρίσιμη**, γενικά και ειδικά στα τμήματα με ομοιόμορφη ροή (ποικιλία διατομών, συνήθως τραπεζοειδή διατομή)
- Απαραίτητη η θεωρία του κρισίμου βάθους για τον προσδιορισμό του **προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας** σε ειδικά τμήματα της διώρυγας (συνήθως επιλέγω ορθογωνική διατομή)

# Υποκρίσιμη ροή και αρχαία τεχνολογία

- Αγωγοί μεταφοράς ύδρευσης: Πήλινοι αγωγοί, μικρής αντοχής έως την κρήνη
- Ελάχιστες κλίσεις, ελεύθερη επιφάνεια για τη μη διάβρωση των τοιχωμάτων

Για να χαρακτηριστεί το είδος της ροής διακρίνω περιπτώσεις:

- 1)  **$F < 1$ . Ροή υποκρίσιμη**, υπερέχουν οι δυνάμεις βαρύτητας των δυνάμεων αδράνειας, ενώ για μία συγκεκριμένη κλίση πυθμένα το βάθος ομοιόμορφης ροής για την υποκρίσιμη ροή θα είναι μεγαλύτερο από το αντοίστηχο (με την κλίση) κρίσιμο βάθος.
- 2)  **$F > 1$ . Ροή υπερκρίσιμη**, υπερέχουν οι δυνάμεις αδράνειας των δυνάμεων βαρύτητας (ύπαρξη σημαντικών ταχυτήτων), ενώ για μία συγκεκριμένη κλίση πυθμένα το βάθος ομοιόμορφης ροής για την υποκρίσιμη ροή θα είναι μικρότερο από το αντοίστηχο (με την κλίση) κρίσιμο βάθος.
- 3)  **$F = 1$ . Ροή κρίσιμη**, το βάθος ροής είναι ίσο με το κρίσιμο βάθος.

Η ταχύτητα σε ανοικτούς αγωγούς καθορίζεται από την κλίση του αγωγού και τις οριακές συνθήκες, συνεπώς, για σημαντικές κλίσεις που συνήθως επικρατούν σε ορεινές περιοχές η ροή είναι συνήθως υπερκρίσιμη.

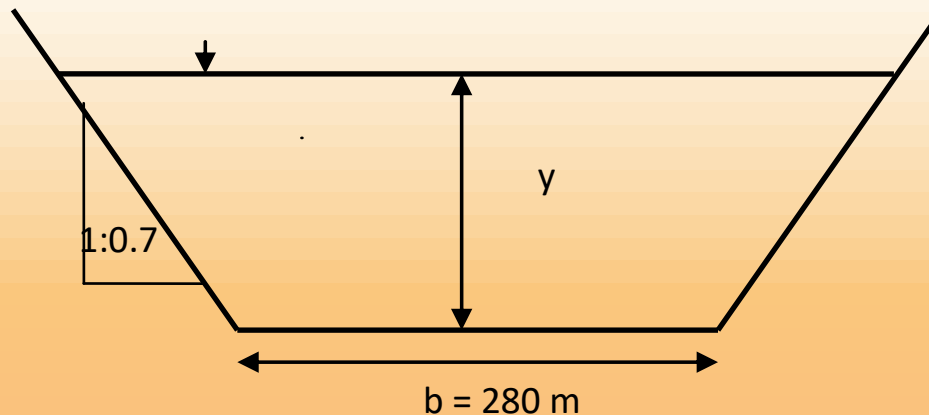
Σε πεδινές περιοχές, όπου και υπάρχει αυξημένος κίνδυνος πλυμμηρών, οι κλίσεις είναι ήπιες, η ταχύτητα σχετικά μικρή και η ροή συνήθως υποκρίσιμη.

**Στα τεχνικά έργα (εκτός από ειδικά έργα) επιλέγεται υποκρίσιμη ροή.**

## Άσκηση 2

Αν η κλίση του πυθμένα είναι  $S_0 = 1:240$  να προσδιορισθεί η παροχή της παρακάτω τραπεζοειδούς διατομής αν ο συντελεστής Manning στο διεθνές σύστημα είναι  $n = 0.042$  και η παροχή  $Q = 98,200 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  να προσδιορισθεί το ομοιόμορφο το βάθος ροής. Να ελεγχθεί αν η ροή είναι κρίσιμη, υπερκρίσιμη ή υπερκρίσιμη και να προσδιοριστεί το κρίσιμο βάθος ροής.

(a)





# A) Ομοιόμορφη ροή

Εξίσωση Manning για τραπεζοειδής διατομή

$$V = \frac{1}{n} \left( \frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow Q = ((b + zy)y) \frac{1}{n} \left( \frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} S_0^{1/2}$$

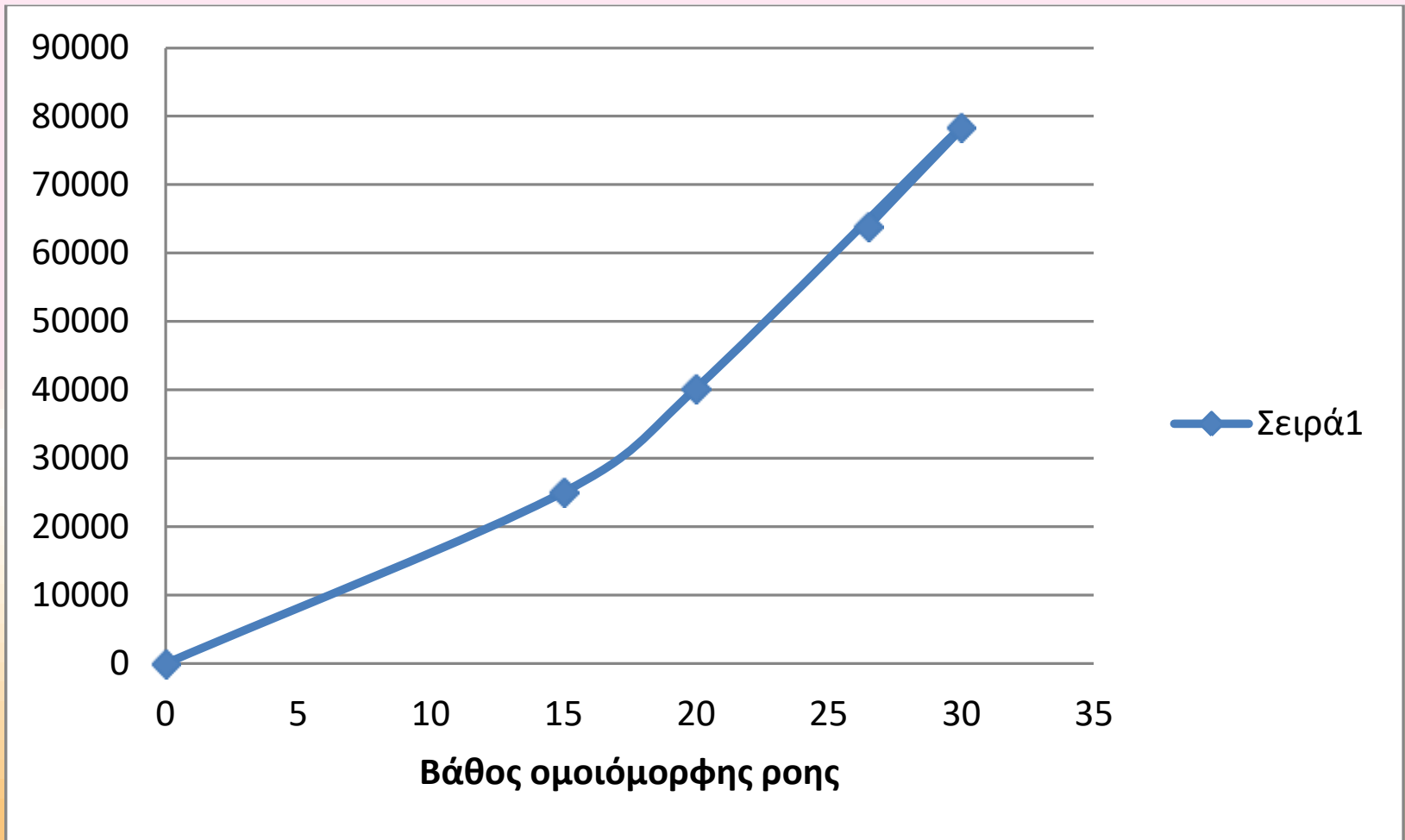
$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot Q}{S_0^{1/2}} = ((b + zy)y) \left( \frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1+z^2}} \right)^{2/3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{0.042 \cdot 98,200}{(1/240)^{1/2}} = ((280 + 0.7 \cdot y)y) \left( \frac{(280 + 0.7 \cdot y)y}{280 + 2 \cdot y\sqrt{1+0.7^2}} \right)^{2/3} = 63,894.93$$

Δοκιμές:

$$y = 20 \text{ m} \Rightarrow f(y) = 40208.5 < 63894.93 \text{ (} Q = 61,800 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$$

$$y = 30 \text{ m} \Rightarrow f(y) = 78361.04 > 63894.93 \text{ (} Q = 120,450 \text{ m}^3\text{s}^{-1}\text{)}$$



Τελικά  $Q = 98,000 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  για βάθος ομοιόμορφης ροής ,  $y_0 = 26.5 \text{ m}$ .

(b) Ο αριθμός Froude Number είναι:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = \sqrt{\frac{Q^2 (b + 2zy)}{g (b + zy)^3 y^3}} = \sqrt{\frac{98,200^2 (280 + 2 \cdot 0.7 \cdot 26.5)}{g (280 + 0.7 \cdot 26.5)^3 \cdot 26.5^3}} = 0.793378963$$

Εφόσον  $Fr < 1$ , η ροή είναι υποκρίσιμη

(γ) Εύρεση κρίσιμου βάθους με δοκιμές:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gy_\mu}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{Q^2 (b + 2zy_c)}{g (b + zy_c)^3 y_c^3}} = \sqrt{\frac{98,200^2 (280 + 2 \cdot 0.7 \cdot y_c)}{g (280 + 0.7 \cdot y_c)^3 \cdot y_c^3}} = 1$$

.....(αφήνεται για άσκηση στους σπουδαστές)

Αντί του βήματος (2) μπορώ να προσδιορίσω το  $y_c$  και να το συγκρίνω με το βάθος ομοιόμορφης ροής,  $y_n$ . Ροή υποκρίσιμη θα πρέπει  $y_n > y_c$

Μη ομοιόμορφη ροή και θεωρία  
κρίσιμου βάθους

# Θεωρία κρίσιμου βάρους και προφίλ επιφανείας

- Το διάγραμμα ειδικής ενέργειας θα χρησιμοποιηθεί για να κατασκευασθεί το προφίλ της επιφανείας του νερού
- Δεν υπάρχει διατήρηση της ειδικής ενέργειας αλλά της ενέργειας.
- Για μία πλήρη λύση ελέγχω αρχικά το είδος της ροής
- Συνήθως χρησιμοποιείται σε μικρές διαφορές συναρμογής. Θωρώ αμελητέες απώλειες ενέργειας. Η ειδική ενέργεια ακολουθεί το ανάγλυφο του πυθμένα
- Όπου αναπτύσσεται κρίσιμη διατομή έχω διατομή ελέγχου

## Κρίσιμη ροή διατομή ελέγχου

Διατομή ελέγχου:  
μονοσήμαντη σχέση στάθμης παροχής

Κάθε κρίσιμη διατομή είναι διατομή ελέγχου



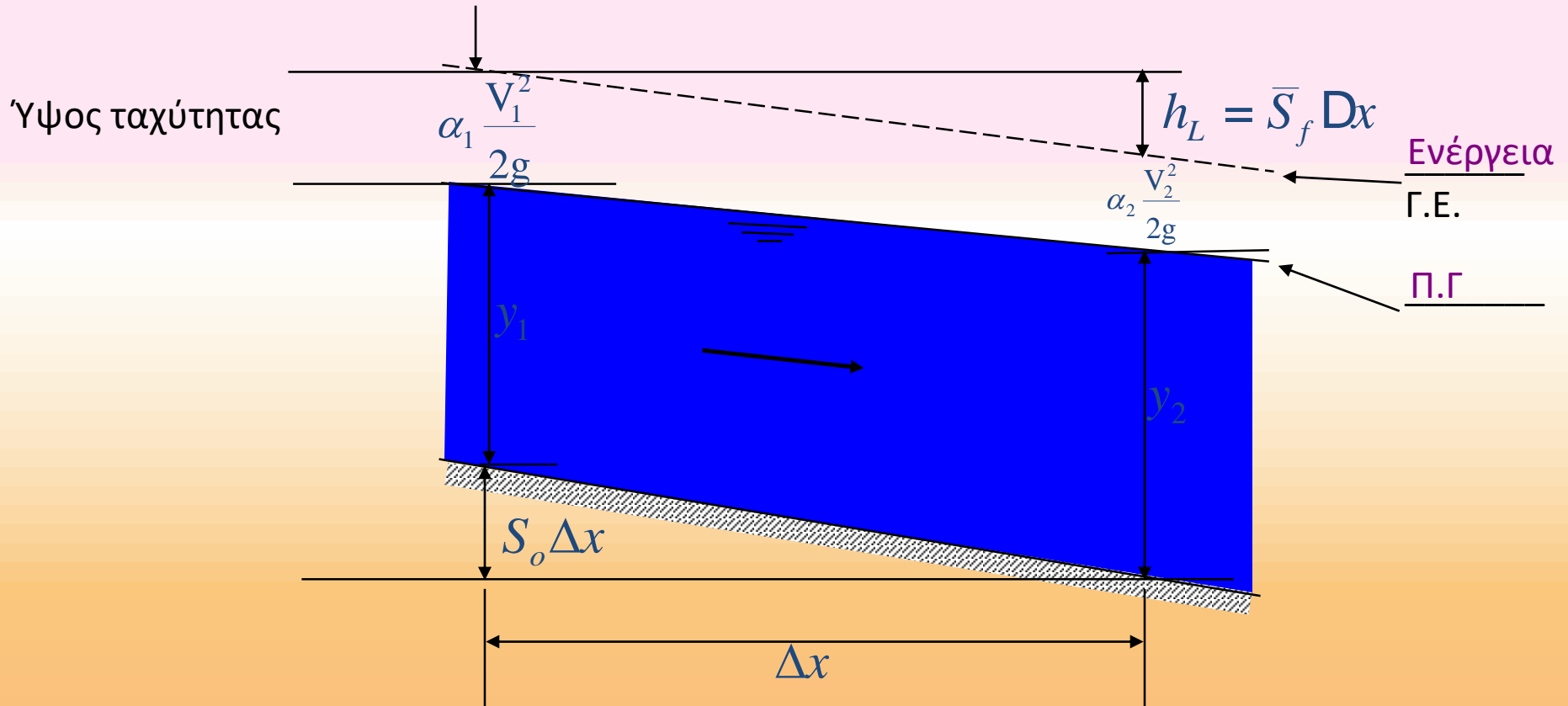
**Αιχμή αναγλύφου ή στένωση  
-> κρίσιμη ροή**

**Όταν ανάντη η ροή είναι υποκρίσιμη και αναπτύσσεται κρισμο βάθος στη διατομή ελέγχου -> λειτουργεί ως μετρητής ροής**



Διατήρηση της ενέργεια και ειδική  
ενέργεια

# Ανοικτοί αγωγοί: Διατήρηση της ενέργειας



Κλίση πυθμένα ( $S_o$ ) όχι απαραίτητη ίση με την κλίση της γραμμής ενέργειας ( $S_f$ )



# ΑΔΕ και ειδική ενέργεια

- $H_1 = z_1 + \gamma_1 + v_1^2/2g$

$$E_1 = \gamma_1 + v_1^2/2g$$

$$\rightarrow H_1 = z_1 + E_1$$

- $H_2 = z_2 + \gamma_2 + v_2^2/2g$

$$E_2 = \gamma_2 + v_2^2/2g$$

$$\rightarrow H_2 = z_2 + E_2$$



- $H_1 = H_2 + \Sigma h_{f 1 \rightarrow 2}$

- Δεν υπάρχει διατήρηση **ειδικής ενέργειας, E** αλλά (συνολικής) **ενέργειας, H**

- Π.χ. **ομοιόμορφη ροή**, η ειδική ενέργεια είναι σταθερή αλλά η ενέργεια μειώνεται (κλίση πυθμένα S0 ίση με κλίση γραμμής ενέργειας, Sf)

- **H ενέργεια πάντοτε μειώνεται** ( ή με λίγο λάθος για μικρά μήκη είναι σταθερή) η **ειδική ενέργεια** μπορεί να μένει σταθερή να μειώνεται ή και να αυξάνεται κατάντη.

# Ειδική ενέργεια για αμελητέες απώλειες ενέργειας

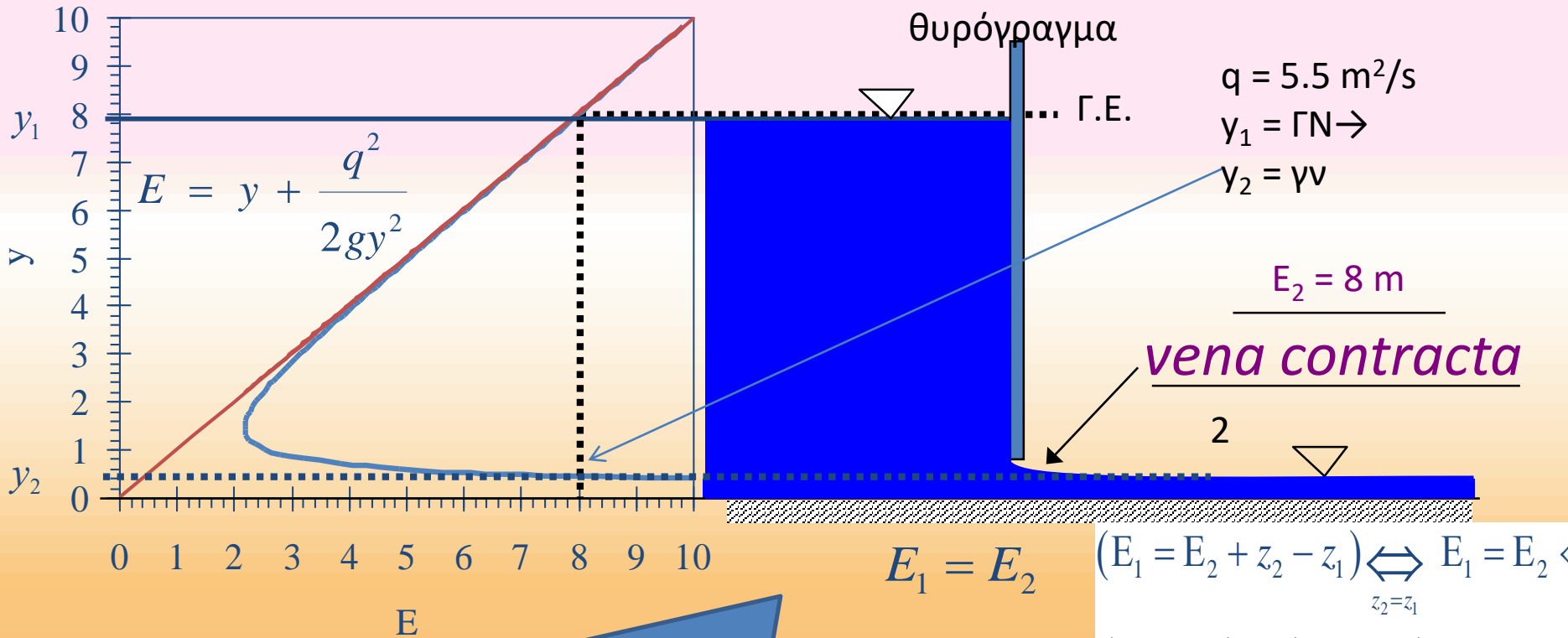
- Σε μικρά μήκη μπορεί να θεωρηθούν αμελητέες απώλειες ενέργειας (προσέγγιση)
- Παράδειγμα αποτελούν οι (ήπιοι) αναβαθμοί

$$E_1 + z_1 = E_2 + z_2 + h_f \Leftrightarrow (\text{αν } h_f \rightarrow 0)$$

$$E_1 = E_2 + z_2 - z_1 \Leftrightarrow E_1 - E_2 = z_2 - z_1$$

$E_1 = E_2$  εναλλακτά βάθη

# Θυρόφραγμα (ίση ειδική ενέργεια-εναλλακτά βάθη)



Εναλλακτά βάθη  
 Απότομη αλλαγή δεν ακολουθώ το διάγραμμα  
 ειδικής ενέργειας στην μετάβαση

$$\left( \frac{V_1^2}{2g} + y_1 \right) = \left( \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \right)$$

ορθ. διατομή:

$$Q = by_1V_1 = by_2V_2$$

ανοδικός αναβαθμός  $z_2 > z_1$

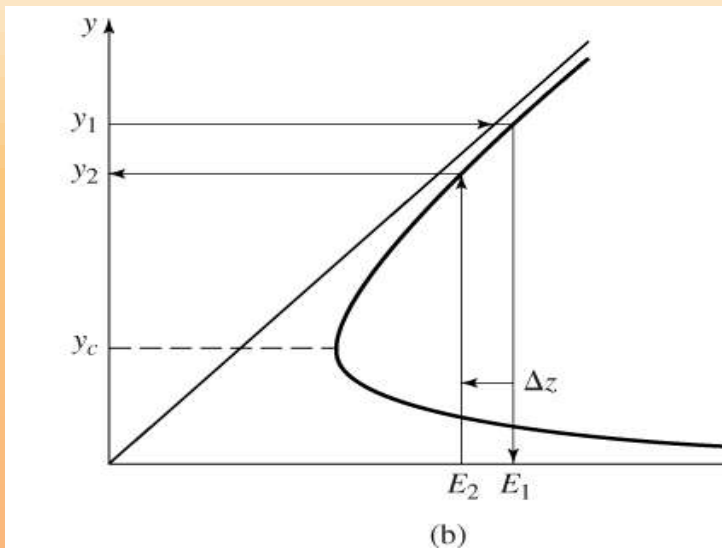
$$E_1 - E_2 = z_2 - z_1 > 0$$

$$E_1 > E_2$$

$$E_1 > E_2$$

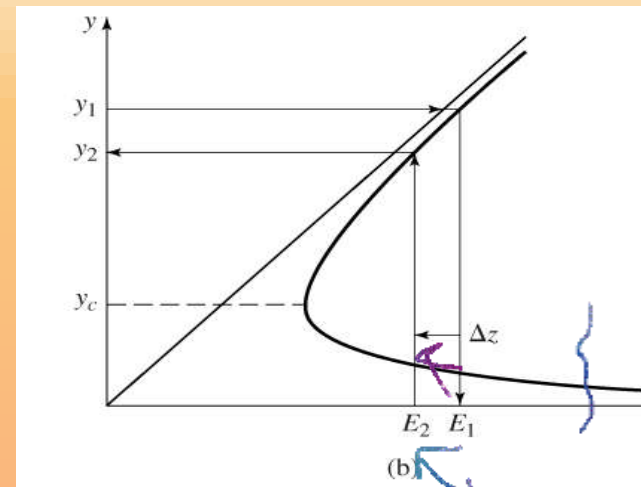
# αναοδικός αναβαθμός $z_2 > z_1$ διακρίνω περιπτώσεις

- Ροή υποκρίσιμη ανάντη  
(μέχρι κάποιο ύψος  
εμποδίου)  $\rightarrow$  μείωση ειδικής  
ενέργειας  $\rightarrow$   
Μείωση βάθους ροής



- Ροή υπερκρίσιμη ανάντη  
(μέχρι κάποιο ύψος  
εμποδίου)  $\rightarrow$  μείωση ειδικής  
ενέργειας  $\rightarrow$

Αύξηση βάθους ροής

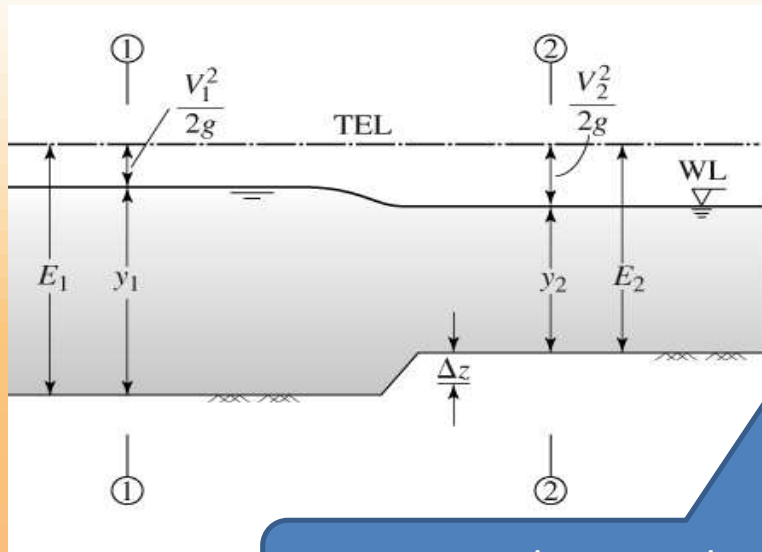


# Μετάβαση σε διαφορές συναρμογές

## Αύξηση z πυθμένα

Θεωρείστε ανάντη υποκρίσιμη ροή & αρχική  $E_1$  γνωστή

$\Delta z$  αφαιρείτε, μηδενικές απώλειες,  $E$  στη θέση (2) μειώνεται:



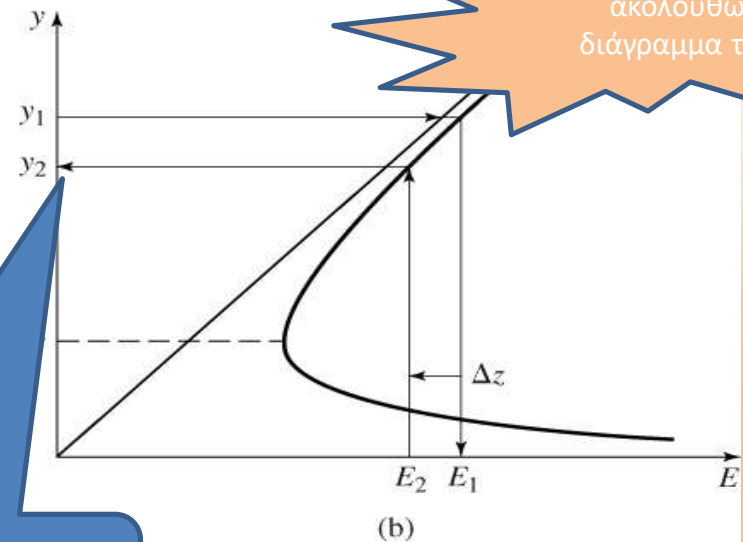
Για υποκρίσιμη ροή ανάντη, το βάθος ροής κατάντη μειώνεται!!

$$(E_1 = E_2 + z_2 - z_1) \Leftrightarrow_{z_2=z_1} E_1 + z_1 - z_2 = E_2 + \Delta z \Leftrightarrow_{\Delta z=z_2-z_1}$$

$$\left( \frac{V_1^2}{2g} + y_1 \right) - \Delta z = \left( \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \right)$$

ορθ. διατομή:

$$Q = by_1V_1 = by_2V_2$$



Ήπια αλλαγή: ακολουθώ το διάγραμμα της ΕΕ

# Μετάβαση σε διαφορές συναρμογές

Θεωρείστε ανάντη υπερκρίσιμη ροή & αρχική  $E_1$  γνωστή

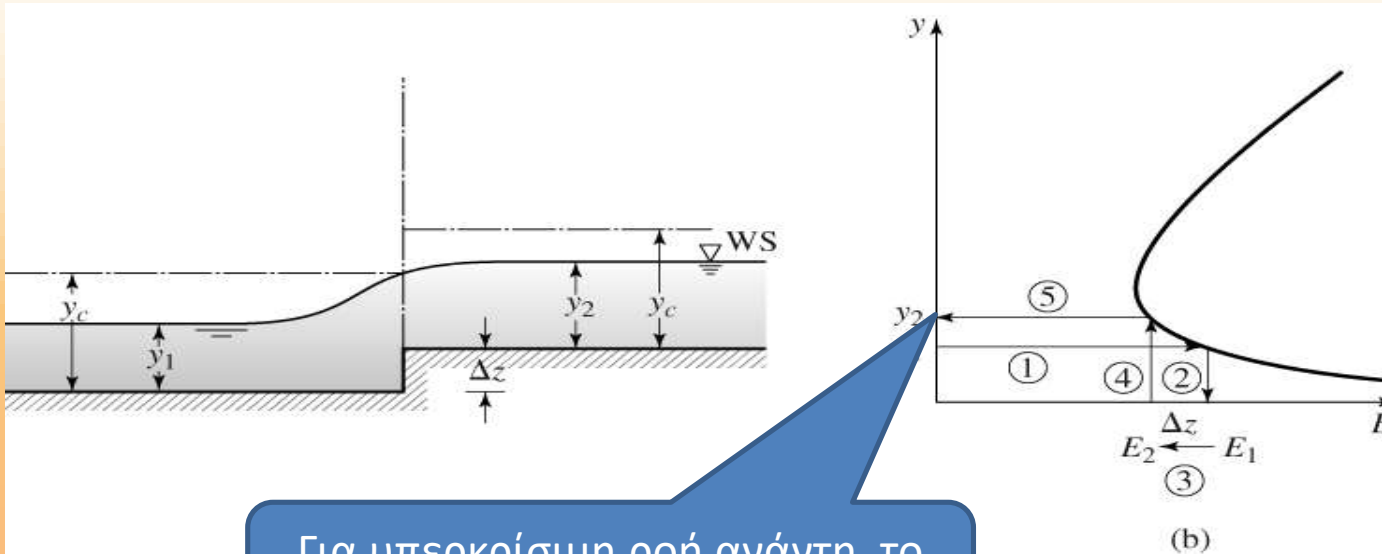
$\Delta z$  αφαιρείτε, μηδενικές απώλειες,  $E$  στη θέση (2) μειώνεται:

$$(E_1 = E_2 + z_2 - z_1) \Leftrightarrow_{z_2=z_1} E_1 + z_1 - z_2 = E_2 + \Leftrightarrow_{\Delta z=z_2-z_1}$$

$$\left( \frac{V_1^2}{2g} + y_1 \right) - \Delta z = \left( \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \right)$$

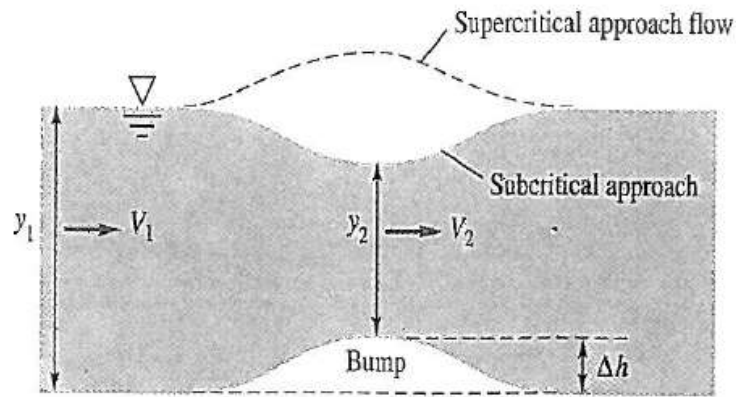
ορθ. διατομή:

$$Q = by_1V_1 = by_2V_2$$

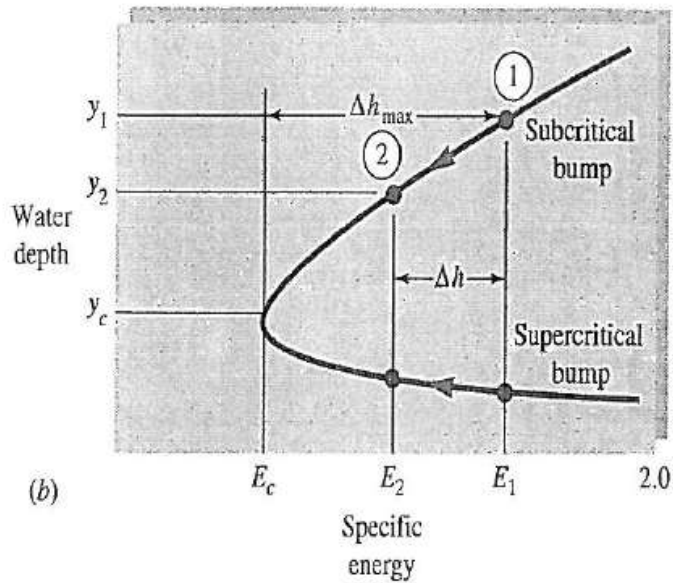


Για υπερκρίσιμη ροή ανάντη, το βάθος ροής κατάντη αυξάνεται!!





(a)

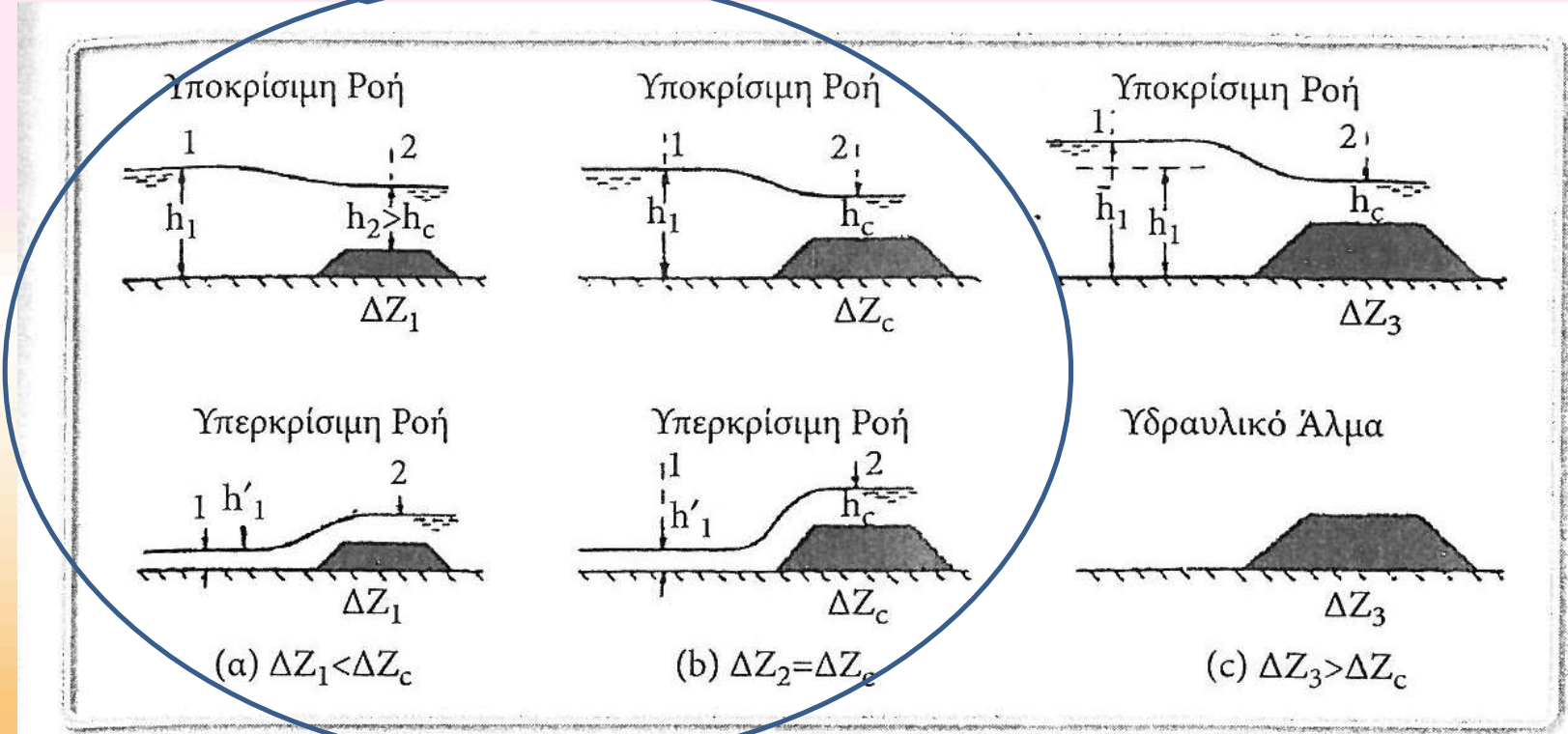


(b)

Η θεωρία του κρίσιμου βάθους μας καθοδηγεί για το προφίλ της ελεύθερης επιφανείας σε ανομοιόμορφη ροή

Η ροή ανάντη και στο εμπόδιο θα είναι υποκρίσιμη παντού ή υπερκρίσιμη παντού, το πολύ να φτάσει το κρίσιμο βάθος για μεγάλο ύψος εμποδίου. Διαφορετικά περίπτωση για μεγαλύτερο ύψος εμποδίου περίπτωση ©

Μέχρι πόσο το ύψος του αναβαθμού?



Σχήμα 7.15: Ροή σε αγωγό με αναβαθμό, Πρίντζι, 2013

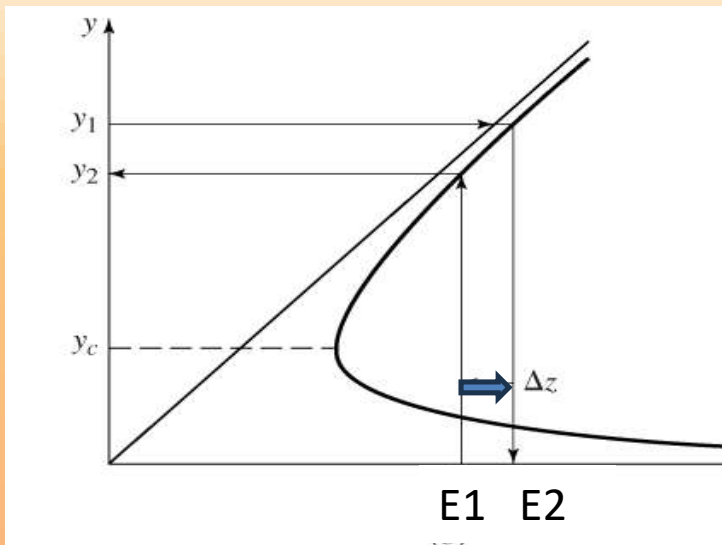
$$E_1 < E_2$$

καθοδικός αναβαθμός  $z_2 < z_1$

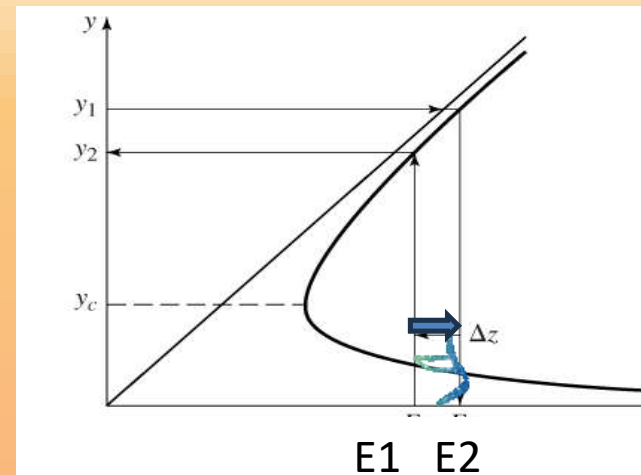
$$E_1 > E_2$$

# αναοδικός αναβαθμός $z_2 > z_1$ διακρίνω περιπτώσεις

- Ροή υποκρίσιμη ανάντη (μέχρι κάποιο ύψος εμποδίου)  $\rightarrow$  αύξηση ειδικής ενέργειας  $\rightarrow$  αύξηση βάθους ροής



- Ροή υπερκρίσιμη ανάντη (μέχρι κάποιο ύψος εμποδίου)  $\rightarrow$  αύξηση ειδικής ενέργειας  $\rightarrow$  μείωση βάθους ροής



# Εξίσωση ενέργειας με απώλειες ενέργειας

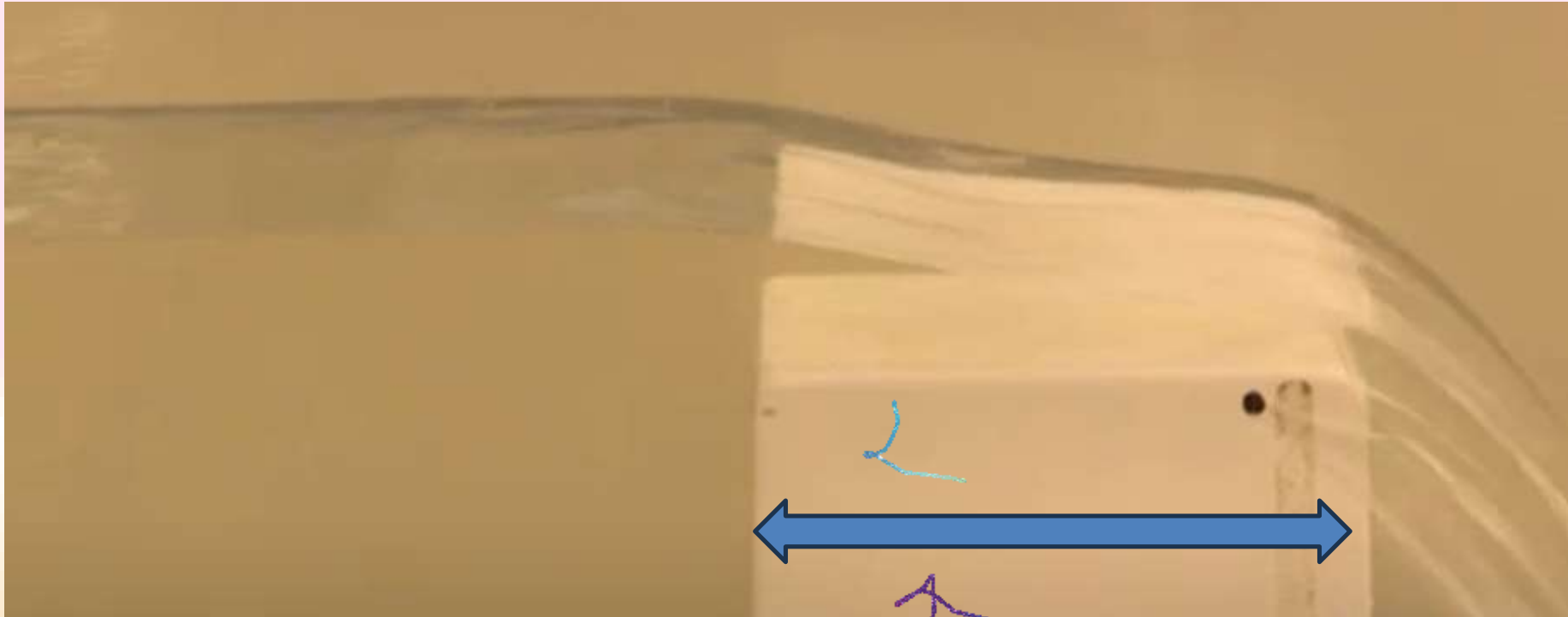
ΑΔΕ:

$$E_{\text{αναντη}} + z_1 = E_{\text{καταντη}} + z_2 + h_f \Leftrightarrow (\text{αν } h_f \rightarrow 0)$$

$$E_{\text{αναντη}} = E_{\text{καταντη}} + z_2 - z_1 + h_f \Leftrightarrow$$

$$\frac{E_{\text{αναντη}} - E_{\text{καταντη}}}{\Delta x} = \frac{z_2 - z_1}{\Delta x} + \frac{h_f}{\Delta x}$$

$$\frac{E_{\text{αναντη}} - E_{\text{καταντη}}}{\Delta x} = -S_0 + \bar{S}_f$$



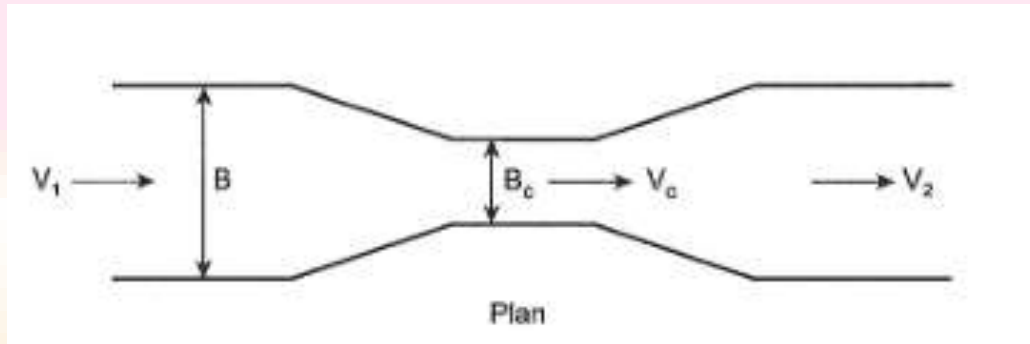
**προσοχή**

Για **σημαντικό μήκος αναβαθμού**-→ κρίσιμη ροή ροή  
**υπερχειλιστής πλατειάς στέψεως**

# Κανάλι Venturi-στένωση στραγγαλισμός της ροής



# Εισαγωγή



- Το κανάλι Venturi αποτελείται από:
  1. Μία ομαλή είσοδο που συγκλίνει
  2. Τον «λαιμό», όπου το νερό επιταχύνει και αποκτά την κρίσιμη ροή
  3. Την έξοδο που επιστρέφει στο ίδιο πλάτος με την είσοδο πάλι με ομαλό τρόπο

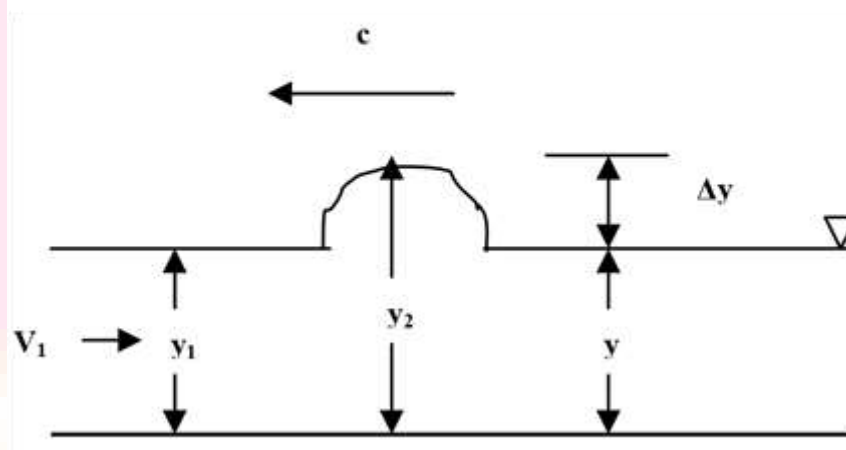


διάδοση διαταραχής  
διατομή ελέγχου

## 1. Χαρακτηριστικά Υπεκρίσεων και Υπεκρίσεων ροών

### 1.1. Ταχύτητα διάδοσης κύματος και κρίσιμες συνθήκες

Στο παρακάτω Σχήμα 1,  $c$  είναι η ταχύτητα διάδοσης κύματος (*celerity*) πάνω σε ρέον νερό με ταχύτητα ροής  $V_1$ .



Σχήμα, 1

Αν πάρουμε την ταχύτητα διάδοσης κύματος  $c$  ίση και αντίθετη από την ταχύτητα ροής  $V_1$ , τότε το κύμα παραμένει σταθερό και μπορεί να εφαρμοστούν οι συνθήκες σταθερής ροής (μείωση). Γράφοντας την εξίσωση ενέργειας μεταξύ διατομών 1 και 2 και παραμελώντας την πεντάμελη ενέργεια για οριζόντιο αγωγό, έχουμε:

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} \quad (\alpha)$$

Για ορθογώνιους αγωγούς από τη διατήρηση της μάζας:

$$q = V_1 \times y_1 = V_2 \times y_2 \Rightarrow$$

$$V_2 = V_1 \times \frac{y_1}{y_2}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην Εξ. (α).

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_1^2}{2g} \times \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{y_2 - y_1}{1 - \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2} \quad (1)$$

Αν  $y_1 = y$ , τότε  $y_2 = y + \Delta y$  και  $V_1 = -c$  (για μόνιμη ροή), στα οποία το  $\Delta y$  είναι το ύψος κύματος και η Εξ. (1) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{y + \Delta y - y}{1 - \left(\frac{y}{y + \Delta y}\right)^2}$$

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{\Delta y(y + \Delta y)^2}{(y + \Delta y)^2 - y^2}$$

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{\Delta y(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2)}{y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - y^2}$$

$$\frac{c^2}{2g} \cong \frac{\Delta y(y^2 + 2y\Delta y)}{2y\Delta y}$$

$$\frac{c^2}{2g} \cong \frac{y^2 \left(1 + 2\frac{\Delta y}{y}\right)}{2y}$$

$$c \cong \sqrt{gy} \left(1 + 2\frac{\Delta y}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Η Εξ. (2) είναι έγκυρη για ρηχά νερά. Γενικά, το  $\Delta y/y$  μπορεί να ληφθεί αμελητέο, οπότε η εξίσωση ταχύτητας μετασχηματίζεται ως εξής:

$$c = \sqrt{gy} \quad (3).$$

Τα κύματα που δημιουργούνται σε ήρεμο νερό με βάθος  $y$  θα διαδοθούν σε όλες τις διευθύνσεις με την ταχύτητα που προέρχεται από την Εξ. (3). Αν το κύμα είναι επί ρέοντος νερού, η συνιστώσα της ταχύτητας κύματος,  $c$  και η ταχύτητα ροής,  $V$  θα

## α) Υποκρίσιμες ροές

Ο αριθμός Froude για ορθογώνιους ή πλατείς αγωγούς είναι:

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gy}}$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης κύματος είναι  $c = \sqrt{gy}$  για τις υποκρίσιμες ροές

$$F_r = \frac{V}{c} = \frac{\text{Ταχύτητα ροής}}{\text{Ταχύτητα κύματος}} < 1 \quad (4)$$

Ταχύτητα ροής < Ταχύτητα κύματος

Ένας κυματισμός δημιουργημένος επί ρέοντος νερού θα διαδοθεί ανάντη με μια ταχύτητα ίση με  $(c-V)$  και κατόντη με ταχύτητα ίση με  $(c+V)$ . Ο διαδιδόμενος κυματισμός θα είναι ορατός σε όλη την υδάτινη επιφάνεια. Για αυτόν τον λόγο, οι υποκρίσιμες ροές είναι επίσης γνωστές ως *ελεγχόμενες κατόντη ροές*.

## β) Υπερκρίσιμες ροές

Ο αριθμός Froude για τους ίδιους αγωγούς σε υπερκρίσιμες ροές είναι:

$$F_r = \frac{V}{c} = \frac{\text{Ταχύτητα ροής}}{\text{Ταχύτητα κύματος}} > 1 \quad (5)$$

$$\text{Ταχύτητα ροής} > \text{Ταχύτητα κύματος}$$

Αφού η ταχύτητα ροής είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος, ένα δημιουργημένος κυματισμός θα διαδοθεί μόνον στην κατάντη διεύθυνση. Για αυτόν τον λόγο, οι υπερκρίσιμες ροές είναι επίσης γνωστές ως *ελεγχόμενες ανάντη ροές*.

# Συμπέρασμα

- Κρίσιμη ροή (v1)-
- Διαταραχή: στάσιμο κύμα
- Υπερκρίσιμη ροή (v1)-
- Διαταραχή: διαδίδεται κατάντη, άρα για μεταβαλλόμενη ροή οι υπολογισμοί άρχοντε από ανάντη (σημείο διαταραχής)
- Υποκρίσιμη ροή (v1)-
- Διαταραχή: διαδίδεται και ανάντη, άρα για μεταβαλλόμενη ροή οι υπολογισμοί άρχοντε από κατάντη (σημείο διαταραχής)

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ;**

# Γιατί $dA/dy=B$ (περισσότερη μαθηματική εξήγηση)

## Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ LEIBNITZ

Έστω η συνάρτηση  $F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x,t)dt$  όπου οι συναρτήσεις  $A(x)$  και  $B(x)$  είναι παραγωγίσιμες ως προς  $x$  και  $f(x,t)$  και  $\partial f(x,t)/\partial x$  είναι συνεχείς ως προς  $x, t$ . Τότε η παράγωγος  $dF/dx$  δίδεται από την εξίσωση:

$$\frac{dF}{dx} = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x, B(x)) \frac{dB}{dx} - f(x, A(x)) \frac{dA}{dx}$$

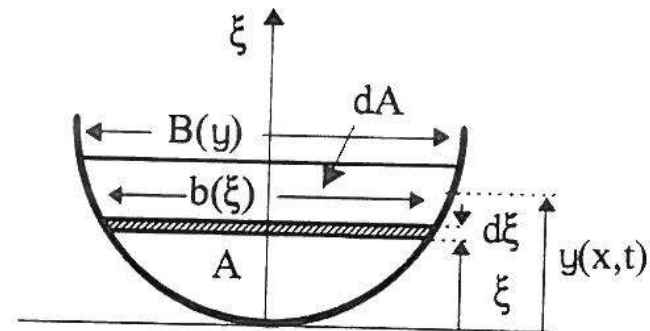


Αλλά, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας  $B$  είναι ίσο με τη μεταβολή του εμβαδού  $A$  ως προς  $y$ . Πράγματι, είναι :

$$A = \int_0^y b(\xi) d\xi$$

και :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y b(\xi) d\xi$$



Σχήμα 3.3

Διευκρίνιση στοιχείων διατομής

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibnitz η παράγωγος του ολοκληρώματος αυτού γίνεται :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \int_0^y \frac{\partial}{\partial y} [b(\xi)] d\xi + 1 \cdot [b]_{\xi=y} = B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\partial A}{\partial y}$$

# Αδιάστατατοι αριθμοί και εξισώσεις Navier -Stokes

## 8.6 Παράδειγμα

Αδιαστατοποίηση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν μόνιμη, ασυμπίεστη, διδιάστατη ροή.

Οι διαφορικές εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για Νευτώνεια ρευστά (βλέπε κεφάλαιο 4) στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.24)$$

$$x - \text{συνιστώσα} \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8.25)$$

$$y - \text{συνιστώσα} \quad \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (8.26)$$

Θέτω  $u=Vu^*$ ,  $x=Lx^*$ , κλπ, όπου  $L, V$  χαρακτηριστικά μήκη και ταχύτητα στο  $xh'$

Έτσι προκύπτουν και οι απλοποιήσεις για ένα φυσικό πρόβλημα

# Αδιάστατος Froude

- Για να εκτιμήσουμε την τάξη μεγέθους της δύναμης αδράνειας θεωρούμε ένα τυπικό όρο των παραπάνω εξισώσεων:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = u^* \cdot U \frac{\partial (u^* \cdot U)}{\partial (x^* \cdot L)} = \frac{U^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

Όπου  $u=Vu^*$ ,  $x=Lx^*$ , κλπ, όπου  $L, V$   
χαρακτηριστικά μήκη και ταχύτητα στο  $xx'$   
(άξονα της ροής)

# NAVIER-STOKES

## 0.6 Παράδειγμα

**Αδιαστατοποίηση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν μόνιμη, ασυμπίεστη, διδιάστατη ροή.**

Οι διαφορικές εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής για Νευτώνεια ρευστά (βλέπε κεφάλαιο 4) στην περίπτωση αυτή είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.24)$$

$$x - \text{συνιστώσα} \quad \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8.25)$$

$$y - \text{συνιστώσα} \quad \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (8.26)$$

Λιακόπουλος. Συχνά επιλέγω σύστημα ώστε  $g_x=0$ ,  $g_y=g$

# Αδιάστατος Froude

- Δυνάμεις αδράνειας/δυνάμεις βαρύτητας=

$$= \frac{\rho U^2}{\rho g L} = \frac{U^2}{gL}$$

*Αριθμός Froude (στην υδραυλική με ρίζα)*

Όπου  $u=Vu^*$ ,  $x=Lx^*$ , κλπ, όπου  $L, V$   
χαρακτηριστικά μήκη και ταχύτητα στο  $xx'$   
(άξονα της ροής)