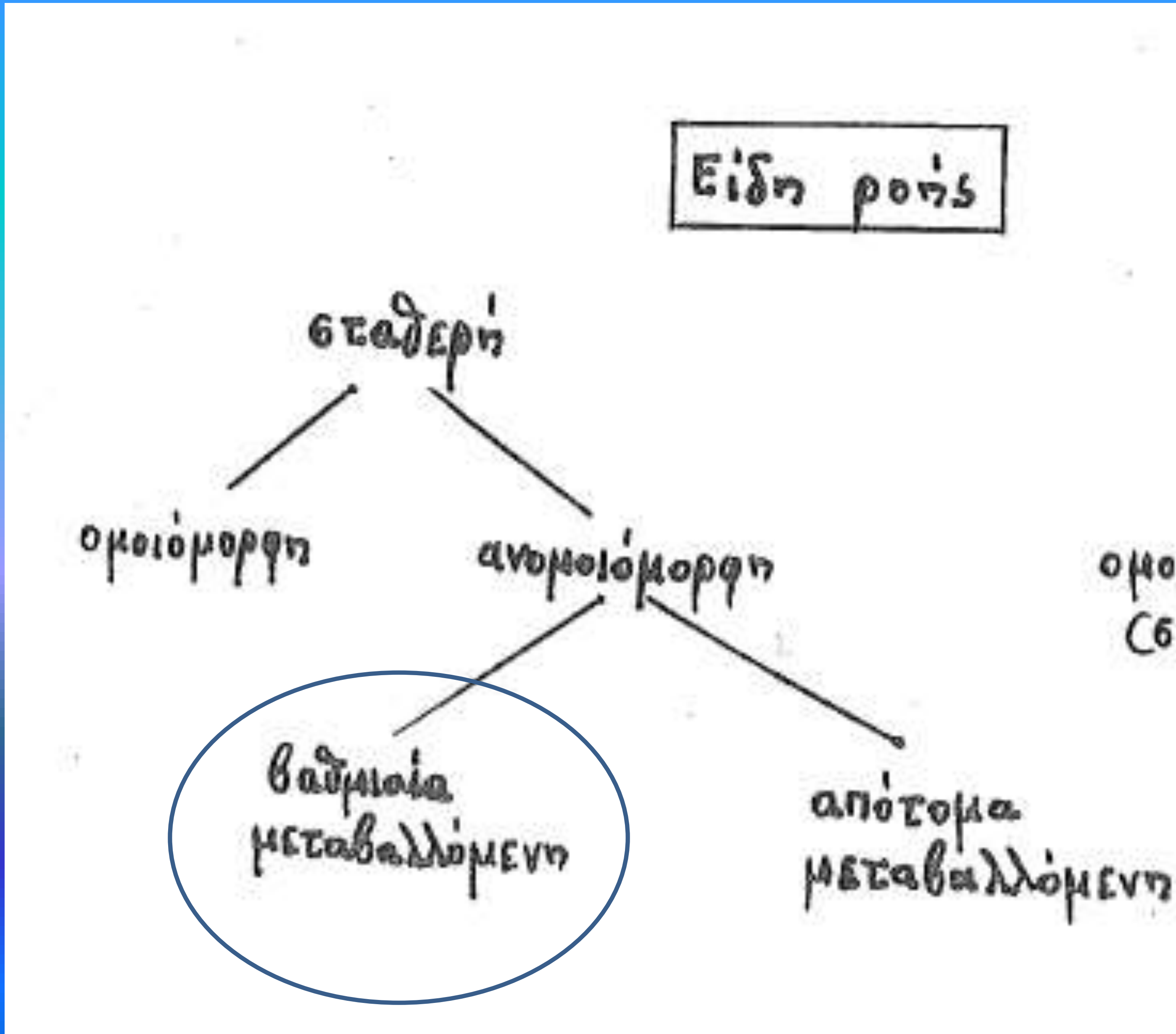
Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή προφίλ νερού

Δρ Μ. Σπηλιώτη
Αναπληρωτής Καθηγητής

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροη



Είδη ροής
σταθερή
ομοιόμορφη
ανομοιόμορφη
βαθμιαία μεταβαλλόμενη
απότομα μεταβαλλόμενη

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

- |dy/dx | <1 (Δημητρίου, 1988)
- Υδροστατική διανομή πιέσεων, αμελητέες κατακόρυφες κινήσεις
- Ισχύς της εξίσωσης του Manning για τη διατμητική τάση στερεού ορίου με βάση όμως την κλίση της γραμμής ενέργειας

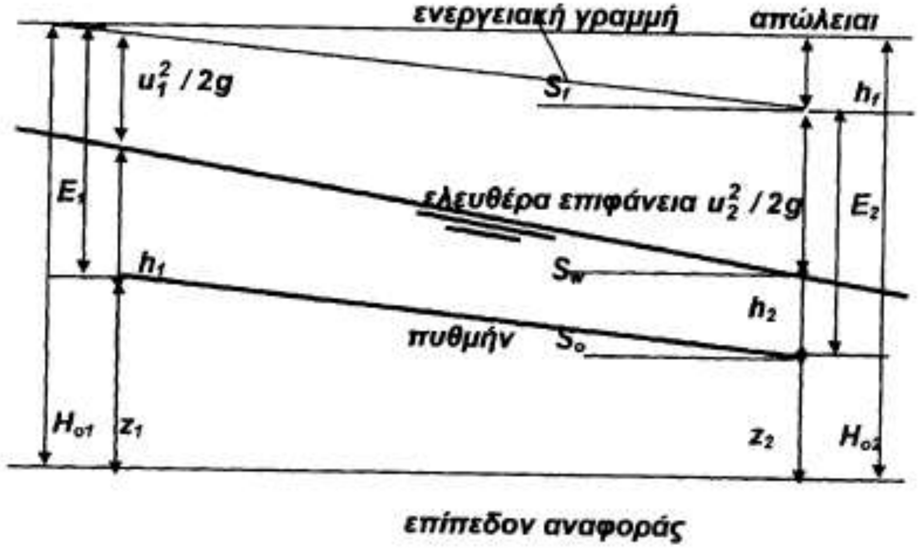
Σχόλιο: Στη ΒΜΡ η κλίση πυθμένα, στάθμης ελεύθερης επιφανείας αλλά και γραμμής ενέργειας δε συμπίπτουν.

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

- Γενική εξίσωση: Ενέργειας σε διάφορες μορφές
- Μορφή καμπύλης στάθμης (βλπ πίνακες)
- Ισχύς εξίσωσης Manning σε διατομή μόνο που αντί της κλίσης πυθμένας θέτω την κλίση γραμμής ενέργειας
- Μέση κλίση της γραμμής ενέργειας μεταξύ δύο τμημάτων
- Δύο βασικές περιπτώσεις προβλημάτων:
  - Γνωστό υψόμετρο και ΔL, άγνωστο το ανάντη (ή κατάντη υψόμετρο)
  - Γνωστά δύο υψόμετρα και άγνωστο το μήκος ΔL (θέμα)

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Μορφή καμπύλης στάθμης ελεύθερης επιφανείας



Σχήμα 11.1 Σχέσεις ενεργείας εις την βαθμιαίως μεταβαλλομένην ροήν

Η εφαρμογή της ενεργειακής εξισώσεως μεταξύ των διατομών *1* και *2* του Σχήματος 11.1 δίδει,

$$z_1 + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + h_f \qquad \textbf{(11.6)}$$

επειδή,

$$z_1 - z_2 = S_o L \qquad \textbf{(11.7)}$$

όπου L απόστασις μεταξύ των διατομών 1 και 2 και

$$h_f = S_f L \qquad (11.8)$$

αι απώλειαι φορτίου, η ενεργειακή εξίσωσις (11.6) γράφεται,

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = h_2 + \frac{u_2^2}{2g} + L(S_f - S_o) \qquad (11.9)$$

Η εξίσωσις κατά Manning, η οποία ισχύει μόνον διά ομοιόμορφον ροήν, δύναται να εφαρμοσθή και εις την βαθμιαίως μεταβαλλομένην ροήν με ακρίβειαν οποία εξαρτάται εκ του μήκους των επί μέρους κατατμήσεων Δx του ανοικτού αγωγού.

Για L= dx → 0

$$\frac{V_1^{\,2}}{2g}+y_1=\frac{V_2^{\,2}}{2g}+y_2+L\left(S_f-S_0\right)\Leftrightarrow$$

$$E_1-E_2=L\left(S_f-S_0\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{E_1-E_2}{S_f-S_0}=L$$

E1: ανάντη
E2: κατάντη

Αν L →0

$$\frac{E_2-E_1}{L}=S_0-S_f\underset{L\to 0}{\Leftrightarrow}\frac{dE}{dx}=S_0-S_f$$

Σχέσεις που αποδείχτηκαν:

(κανόνας της αλυσίδας)

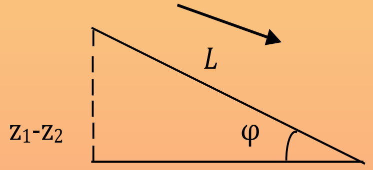
$$\frac{dE}{dy} = (1 - Fr^2), \quad Fr = \frac{Q}{\sqrt{\frac{gA^3}{B}}}$$

$$\frac{dE}{dx} = S_0 - S_f \quad (\alpha\pi\acute{o}\ A\Delta E)$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad H = z + E, \quad E = y^2 + \frac{V^2}{2g}$$

Βασικές γνώσεις

ροή



$$\sin\varphi = \frac{z_1 - z_2}{L} = S_0$$

$$S_0 = \frac{z_1 - z_2}{L} = -\frac{(z_2 - z_1)}{L} = \begin{pmatrix} -\frac{dz}{dx} \\ \text{άπειρου } L \end{pmatrix} = \text{κλίση πυθμένα}$$

$$S_f = \frac{H_1 - H_2}{L} = \frac{h_f}{L} \text{κλίση γραμμής ενέργειας με } L \text{ άπειρο}$$

$$\frac{dE}{dx} = S_0 - S_f \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dy}\frac{dy}{dx} = S_0 - S_f \Rightarrow \frac{dy}{dx}(1 - Fr^2) = S_0 - S_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

για πρισματικές διατομές

Μορφή καμπύλης

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}}$$

Προσέγγιση για αμελητέες απώλειες ενέργειας:

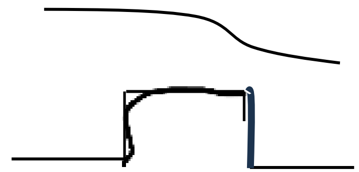
$$\frac{dy}{dx}(1 - Fr^2) = S_0$$

Όταν $S_0 = 0$

Οριζόντιο σε μικρό μήκος

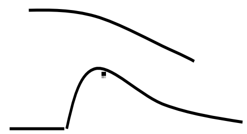
αιχμή

$Fr^2 = 1$



Υπερχειλιστής πλατιάς στέψης

$Fr^2 = 1$



Αεροδυναμικός αναβαθμός

Λόγω μικρού μήκους δεν μπορεί αν αναπτυχθεί ομοιόμορφη ροή

Μορφή καμπύλης

$$\frac{dE}{dx} = S_o - S_f = \frac{dE}{dy}\frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right)\frac{dy}{dx} = \left(1 - \frac{Q^2}{gA^3}\frac{dA}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$S_o - S_f = \left(1 - \frac{Q^2 B}{gA^3}\right)\frac{dy}{dx} = \left(1 - Fr^2\right)\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2}}$$

Για $y > y_n \Rightarrow S_o > S_f$

Για $y < y_n \Rightarrow S_o < S_f$

Γιατί? Βλπ επόμενη διαφάνεια

Για $y > y_{cr} \Rightarrow Fr < 1$

Για $y < y_{cr} \Rightarrow Fr > 1$

Για $y = y_{cr} \Rightarrow Fr = 1$

- Κλίση πυθμένα

α) ήπια, όταν $y_n > y_{cr}$

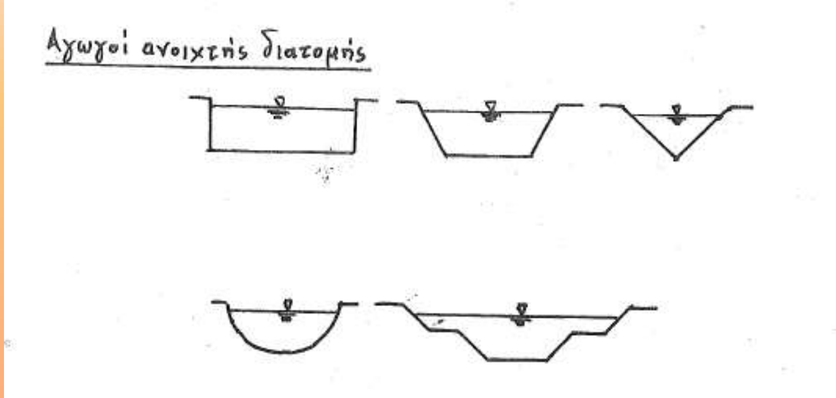
β) απότομη, όταν $y_n < y_{cr}$

γ) κρίσιμη, όταν $y_n = y_{cr}$

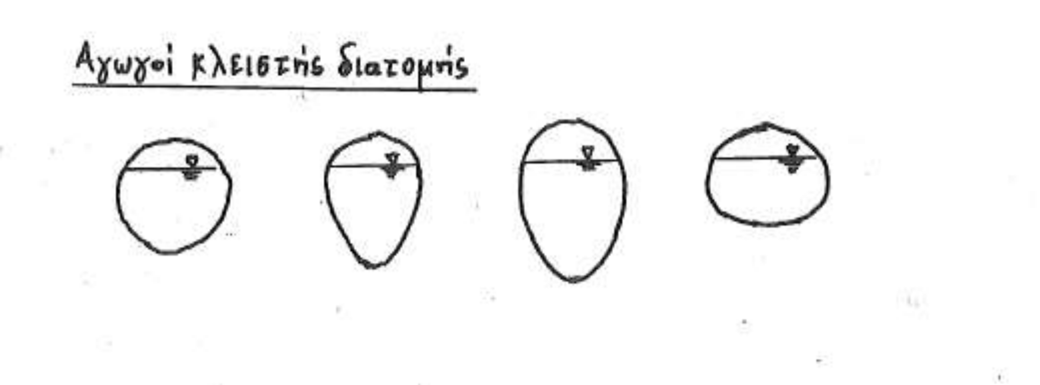
Προτιμώ τη σύγκριση με βάθη ροής και όχι με τις κλίσεις

Δύο ειδών διατομές

Τύπου α μία βάθους ροής για δεδομένη παροχή, όσο αυξάνει το βάθος ροής αυξάνει η υδραυλική διοχετευτικότητα και η παροχή



Τύπου β δύο λύσεις βάθους ροής για δεδομένη παροχή



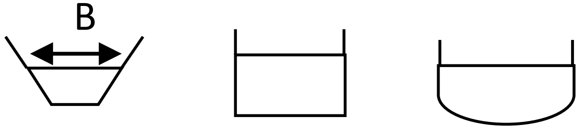
$$S_f \cong \frac{h_f}{L}$$

Ομοιόμορφη ροή

$S_{fn} = S_0$ (κλίση γραμμής ενέργειας)

- $\mathrm{K}(y) = \frac{1}{n} A R^{2/3}$ $(ορισμός)$, οπότε

$$Q = \mathrm{K}(y)\, S_f^{1/2} \Rightarrow S_f = \frac{Q^2}{K^2(y)}$$

- Για διατομές ανοιχτού τύπου,  $(\mathrm{y}\uparrow \rightarrow B\uparrow)$

$\mathbf{y}\uparrow \Rightarrow \boldsymbol{K(y)}\uparrow$

- Επομένως, για την **ίδια παροχή** (μόνιμη ροή):

  - Αν $\mathrm{y} > \mathrm{y_n}$ (ομοιόμορφη ροή) $\Rightarrow K(y) > K(y_n) \Rightarrow S_f < S_{fn} = S_0$ (ομοιόμορφη ροή)

  - Αν $\mathrm{y} < \mathrm{y_n} \Rightarrow K(y) < K(y_n) \Rightarrow S_f > S_{fn} = S_0$

- S_0 (κλίση πυθμένα) > S_f

Προαιρετικό β τρόπος

$$Τυπου \ \ A$$

$$S_0 \ (κλίση \ πυθμένα) \ > S_f ,$$
$$δεδομένη \ παροχή$$
$$\frac{1}{n} A_n R_n^{2/3} S_0^{1/2} = \frac{1}{n} A \, R^{2/3} S_f^{1/2} \quad \rightarrow$$

$$A_n R_n^{2/3} \quad < A \, R^{2/3} \rightarrow$$

υδραυλική διοχετευτικότητα
ομοιμορφο βαθο ςροής

$y_n < y$

Επειδή το βάθος ροής y στη ΒΜΡ μεταβάλλεται, ορίζουμε τις ακόλουθες μορφές των καμπυλών της ελεύθερης επιφάνειας:

εάν $dy/dx = 0$ τότε $J_o = J_E$ (ομοιόμορφη ροή)

εάν $dy/dx > 0$ τότε καμπύλη υπερύψωσης

εάν $dy/dx < 0$ τότε καμπύλη κατάπτωσης.

Θα εξηγηθούν ξανά τη Δευτέρα

Προφίλ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

- Για να δω αν υπάρχει κατάπτωση η ανύψωση ε.ε. συγκρίνω τον αριθμητή και τον παρανομαστή.
- Αριθμητής: Σύγκριση με το **ομοιόμορφο βάθος**:
  - Ο όρος S_0 αναφέρεται στην κλίση και είναι ίσιος με την κλίση ομοιόμορφης ροής.
  - Ο όρος S_f στις πραγματικές απώλειες ενέργειας

Για $y > y_n \Rightarrow S_0 > S_f$

Για $y < y_n \Rightarrow S_0 < S_f$

- Παρονομαστής: Έλεγχος κρίσιμης ροής στον παρανομαστή (πραγματική)
- ***Προτιμώ τη χρήση πινάκων….***

Για $y > y_{cr} \Rightarrow Fr < 1$

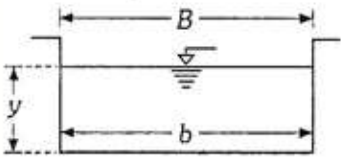
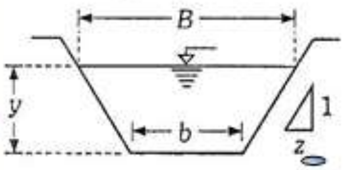
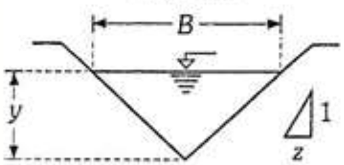
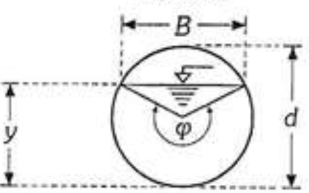
Για $y < y_{cr} \Rightarrow Fr > 1$

Για $y = y_{cr} \Rightarrow Fr = 1$

Μεθοδολογία με πίνακες

- Πρώτα τσεκάρω την κλίση. Αν είχαμε ροή ομοιόμορφη (υπόθεση δεν συμβαίνει πάντα, αποκλειστικά για έλεγχο κλίσης) η ροή θα ήταν υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη? Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της οριζόντιας και της αντίστροφης κλίσης που είναι καλό να αποφεύγονται για μεγάλα μήκη
- Αφού προσδιορίσω την καμπύλη (γράμμα) τότε με βάση τις πραγματικές συνθήκες ελέγχω το πραγματικό βάθος ροής με βάση τους πίνακες και αντιστοιχώ τον αριθμό

Πίν. 3.1: *Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών*

Διατομή	Επιφάνεια A	Βρεχ. περίμετρος P	Υδραυλική ακτίνα $R = A/P$	Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας B	Υδραυλικό βάθος $y_\mu = A/B$	Αριθμός Froude F
Ορθογωνική 	by	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	b	y	$\sqrt{\frac{Q^2}{b^2y^3g}}$
Τραπεζοειδής 	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\frac{(b+zy)y}{b+2zy}$	$\sqrt{\frac{(b+2zy)Q^2}{(b+zy)^3y^3g}}$
Τριγωνική 	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\frac{y}{2}$	$\sqrt{\frac{2Q^2}{z^2y^5g}}$
Κυκλική 	$\frac{d^2}{8}(\varphi-\sin\varphi)$	$d\frac{\varphi}{2}$	$\frac{d}{4}\left(1-\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$	$d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\frac{d}{8}\left\{\frac{\varphi-\sin\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right\}$	$\sqrt{\frac{512Q^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{gd^5(\varphi-\sin\varphi)^3}}$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

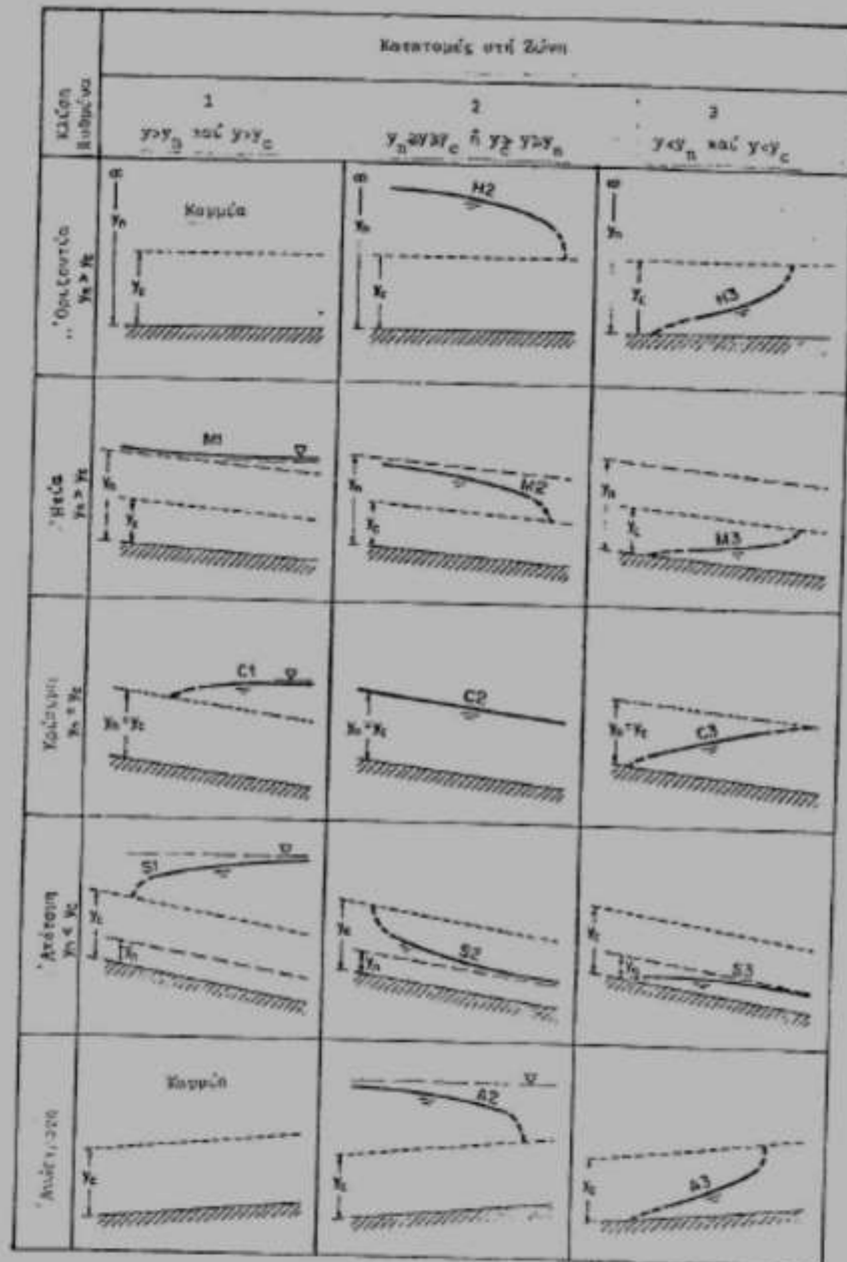
ΤΥΠΟΙ ΚΑΤΑΤΟΜΩΝ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΥΔΑΤΟΣ ΣΕ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΓΩΓΟΥΣ

Κλίση πυθμένα ἀγωγοῦ	Συμβολισμός Ζώνη 1	Ζώνη 2	Ζώνη 3	Σχέση τοῦ βάθους y πρός y_n καί y_c	Γενικός τύπος καμπύλης*	κατάσταση τῆς ροῆς
Ὁριζόντια $S_0 = 0$	-θ-			-θ-	-θ-	-θ-
		H_2		$y_n > y > y_c$	Κ	Ὑποκρίσιμη
			H_3	$y_n > y_c > y$	Υ	Ὑπερκρίσιμη
Ἠπία $0 < S_0 < S_c$	M_1			$y > y_n > y_c$	Υ	Ὑποκρίσιμη
		M_2		$y_n > y > y_c$	Κ	>>
			M_3	$y_n > y_c > y$	Υ	Ὑπερκρίσιμη
Κρίσιμη $S_0 = S_c > 0$	C_1			$y > y_n = y_c$	Υ	Ὑποκρίσιμη
		C_2		$y = y_n = y_c$	Ο	Κρίσιμη καί ὁμοιόμορφη
			C_3	$y_n = y_c > y$	Υ	Ὑπερκρίσιμη
Ἀπότομη $S_0 > S_c > 0$	S_1			$y > y_c > y_n$	Υ	Ὑποκρίσιμη
		S_2		$y_c > y > y_n$	Κ	Ὑπερκρίσιμη
			S_3	$y_c > y_n > y$	Υ	>>
Ἀνάστροφη $S_0 < 0$	-θ-			-θ-	-θ-	-θ-
		A_2		$\|y_n\| > y > y_c$	Κ	Ὑποκρίσιμη
			A_3	$\|y_n\| > y_c > y$	Υ	Ὑπερκρίσιμη

*) Κ = καμπύλη καταπτώσεως, Υ = καμπύλη ὑπερυψώσεως, Ο = ὁμοιόμορφη ροή

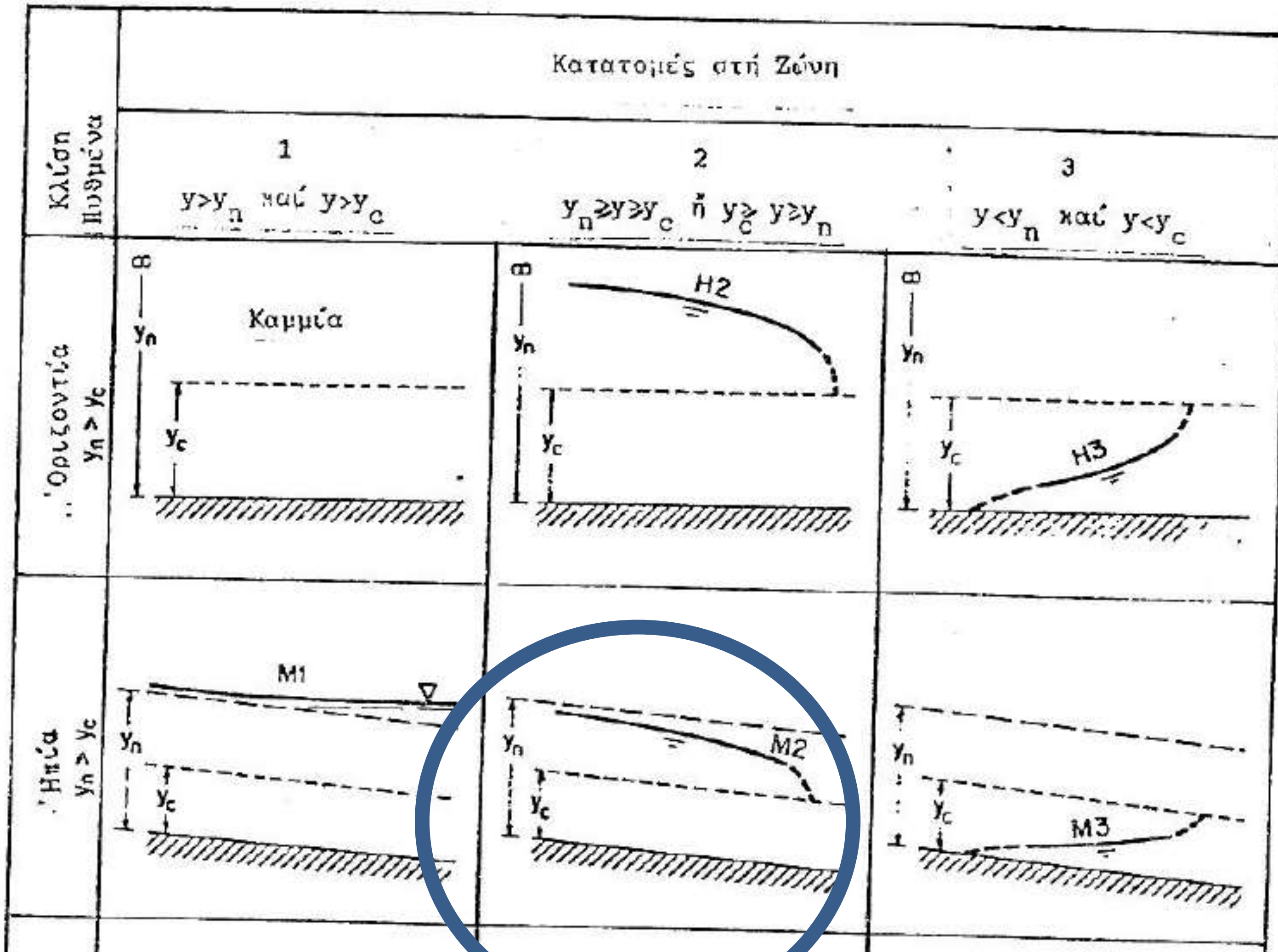
Σακκάς, 1988

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$



. 4.1 Σχηματική παράσταση καί ταξινόμηση τών κατατομών τής

Σακκάς, 1988



$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{S_0-S_f}{1-Fr^2}}$$

Για $y>y_n \Rightarrow S_0>S_f$

Για $y<y_n \Rightarrow S_0<S_f$

Για $y>y_{cr} \Rightarrow Fr<1$

Για $y<y_{cr} \Rightarrow Fr>1$

Για $y=y_{cr} \Rightarrow Fr=1$

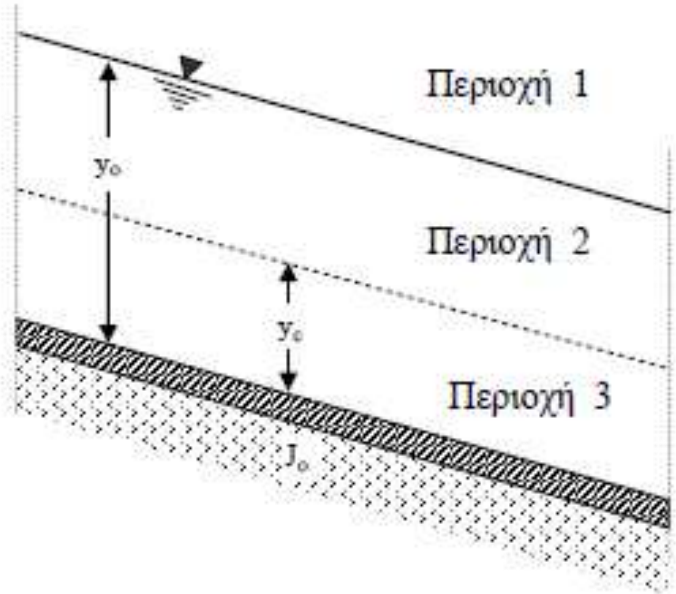
- Κλίση πυθμένα

Θέμα , M2

Κλίση πυθμένα	Χαρακτηρισμός καμπύλης	Παρατηρήσεις
$0 < J_o < J_c$	καμπύλη M	(από το Αγγλικό MILD = ήπια)
$J_o = J_c$	καμπύλη C	(από το CRITICAL = κρίσιμη)
$J_o > J_c$	καμπύλη S	(από το SUPERCRITICAL = υπερκρίσιμη)
$J_o = 0$	καμπύλη H	(από το HORIZONTAL = οριζόντιος αγωγός)
$J_o < 0$	καμπύλη A	(από το ADVERSE = ανάστροφη κλίση)

Για δεδομένη την κλίση, την παροχή και τη γεωμετρία της διατομής ενός ανοικτού αγωγού, μπορούμε να υπολογίσουμε το κρίσιμο καθώς επίσης και το ομοιόμορφο βάθος ροής με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια, τα οποία είναι διαφορετικά εν γένει. Χαράζουμε τον πυθμένα του αγωγού με τη δεδομένη κλίση, ενώ στη συνέχεια χαράσουμε παράλληλα με τον πυθμένα τις γραμμές του κρίσιμου και ομοιόμορφου βάθους στις αντίστοιχες αποστάσεις όπως φαίνεται από το σχήμα που ακολουθεί. Οι γραμμές του κρίσιμου και του ομοιόμορφου βάθους δεν συμπίπτουν εν

Θα εξηγηθούν ξανά τη Δευτέρα



Σχήμα 6.1 Περιοχές όπου μπορεί να βρίσκεται η ελεύθερη επιφάνεια.

Ο χώρος όπου μπορεί να βρίσκεται η ελεύθερη επιφάνεια χωρίζεται επομένως σε τρεις περιοχές που ονομάζονται:

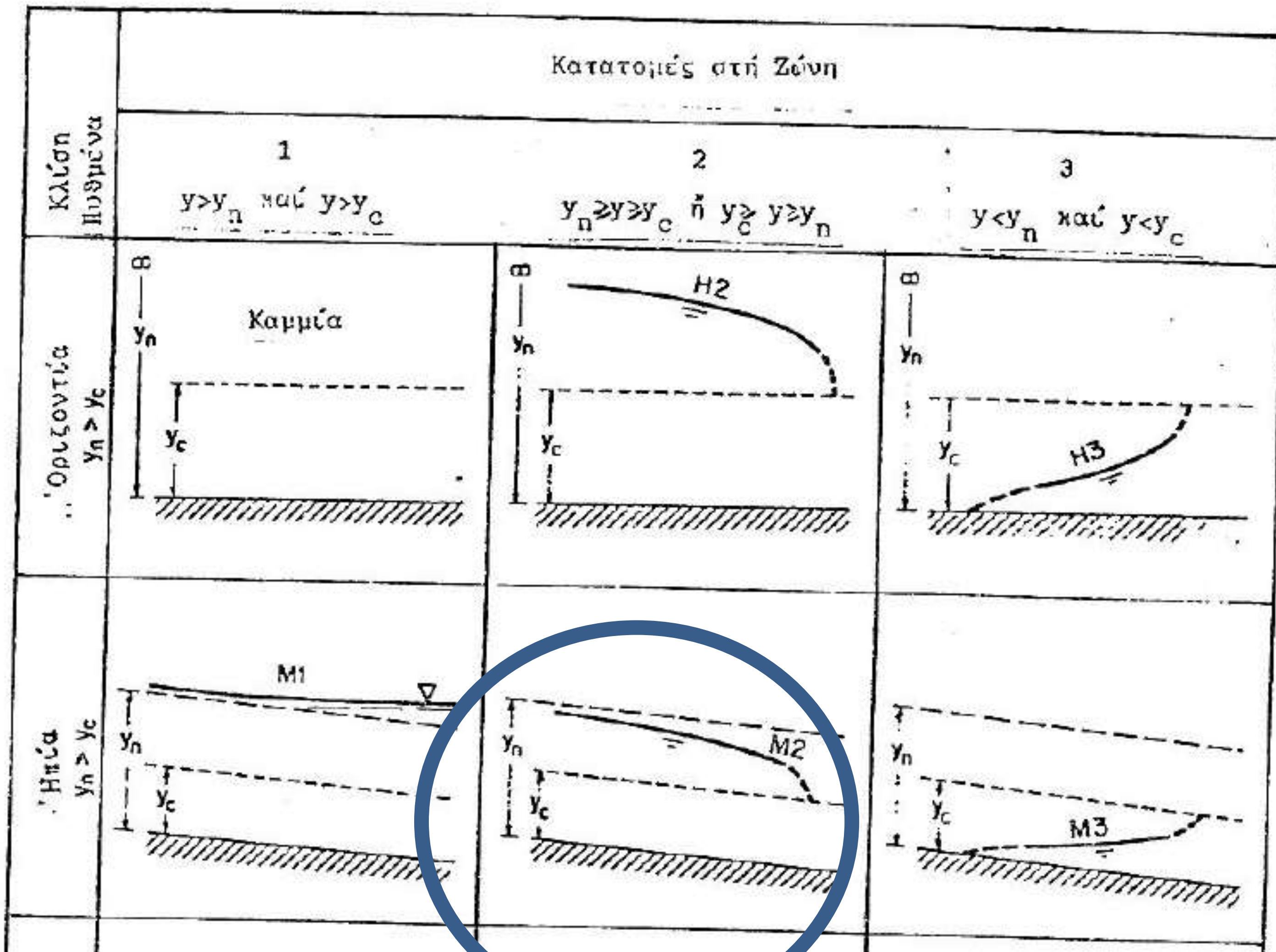
Περιοχή 1 ανάμεσα στο ομοιόμορφο ή το κρίσιμο βάθος και το άπειρο

Περιοχή 2 ανάμεσα στο κρίσιμο και το ομοιόμορφο βάθος και

Περιοχή 3 ανάμεσα στον πυθμένα και το κρίσιμο ή το ομοιόμορφο βάθος

Η καμπύλη (προφίλ) της ελεύθερης επιφάνειας σε βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή ορίζεται με βάση την κλίση του πυθμένα από την οποία προσδιορίζεται ο τύπος της καμπύλης και δείκτη τον αριθμό του υποχώρου που βρίσκεται. Για παράδειγμα καμπύλη ελεύθερης επιφάνειας M2, σημαίνει υποκρίσιμη κλίση πυθμένα ($J_o < J_c$) και βάθος ροής στην Περιοχή 2, ανάμεσα στο ομοιόμορφο και το κρίσιμο ($y_c < y < y_o$).

Παπανικολάου, 2008



$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2}}$$

Για $y > y_n \Rightarrow S_o > S_f$

Για $y < y_n \Rightarrow S_o < S_f$

Για $y > y_{cr} \Rightarrow Fr < 1$

Για $y < y_{cr} \Rightarrow Fr > 1$

Για $y = y_{cr} \Rightarrow Fr = 1$

- Κλίση πυθμένα

Θέμα , M2

Γενικές παρατηρήσεις.

- Για όλες τις θετικές κλίσεις $J_o > 0$, από τη σχέση (6.14) προκύπτει ότι η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας $dy/dx \to 0$ όταν $y \to y_o$ και επομένως το προφίλ της ελεύθερης επιφάνειας τείνει ασυμπτωτικά προς το ομοιόμορφο βάθος, δηλαδή η ελεύθερη επιφάνεια γίνεται παράλληλη με τον πυθμένα.
- Για όλες τις κλίσεις, όταν $y \to y_c$, τότε από τη σχέση (6.14) προκύπτει ότι η κλίση της ελεύθερης επιφάνειας $dy/dx \to \infty$, δηλαδή η καμπύλη της ελεύθερης επιφάνειας τείνει πρός τη γραμμή του κρίσιμου βάθους με κατακόρυφη εφαπτομένη.
- Η κλίση της γραμμής ενέργειας ορίζεται από τη σχέση (6.9)

Πάντα θετική, δηλαδή, πτώση

- Όταν $dy/dx > 0$ (καμπύλη υπερύψωσης) τότε από την εξίσωση (12.9) προκύπτει ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας μειώνεται κατά μήκος του αγωγού και επομένως η γραμμή ενέργειας στρέφει τα κοίλα προς τα επάνω.
- Όταν $dy/dx < 0$ (καμπύλη κατάπτωσης) τότε από την εξίσωση (12.9) προκύπτει ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας αυξάνεται κατά μήκος του αγωγού και επομένως η γραμμή ενέργειας στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Παπανικολάου, 2008

Φορά υπολογισμών

- Υποκρίσημη ροή: Από κατάντη σε ανάντη (θέμα) εφόσον (τα κύματα βαρύτητας μετακινούνται και ανάντη και κατάντη, ‘φορείς πληροφοριών’)
- Υπερκρίσιμη ροή: Από ανάντη σε κατάντη. «Η υπερκρίσιμη ροή δε γνωρίζει τη συμβαίνει κατάντη αυτής» (τα κύματα βαρύτητας μετακινούνται μόνο κατάντη)

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Άλλης μορφής διατύπωση της εξίσωσης της ενέργειας για διακριτό βήμα, ευθεία μέθοδος

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή
Διάφορες φόρμουλες

Ενέργεια

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g}$$

Ειδική ενέργεια

$$E = y + \frac{V^2}{2g}$$

$$H = z + E$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dE}{dx}$$

$$\frac{dE}{dx} = S_o - S_f$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$

Μη σταθερή διατομή

Σε περίπτωση ακανόνιστης διατομής

(όταν το εύρος του αγωγού μεταβάλλεται κατά μήκος της ροής)

ισχύει:

$$B = B(x), \qquad \frac{\partial A}{\partial x} \neq 0,$$

οπότε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f + \frac{Q}{gA^3}\frac{\partial A}{\partial x}}{1 - Fr^2}$$

Παράρτημα: πλήρης απόδειξη

Μόνιμη ροή, διαφορική εξίσωση εξίσωσης ενέργειας

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{dx}}=\frac{dz}{dx}+\frac{d\left(\dfrac{V^2}{2g}+y\right)}{dx}=\frac{dz}{dx}+\frac{dE}{dx}\\
&\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{dx}}=-S_f\\
&\frac{dz}{dx}=-S_0
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{dE}{dx}=S_0-S_f$$

Με άλλο τρόπο

Μεταβολή ως προς το βάθος ροής y (κανόνας της αλυσίδας)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{dx}}=\frac{d\left(\frac{V^2}{2g}+y\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{V^2}{2g}+y\right)}{dy}\frac{dy}{dx}=\left(1+\frac{d\left(\frac{Q^2}{2gA^2}\right)}{dy}\right)\frac{dy}{dx}=$$

$$=\left(1+\frac{Q^2}{2g}\frac{d\left(A^{-2}\right)}{dy}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\left(A^{-2}\right)}{dy}=\frac{d\left(A^{-2}\right)}{d\mathrm{A}}\frac{dA}{dy}=-2A^{-3}\frac{d\mathrm{A}}{dy}$$

$$\frac{d\mathrm{A}}{dy}=B$$

$$\Rightarrow\frac{dE}{dx}=S_0-S_f=\left(1-\frac{Q^2B}{gA^3}\right)\frac{dy}{dx}=\left(1-Fr^2\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{S_0-S_f}{\left(1-Fr^2\right)}$$