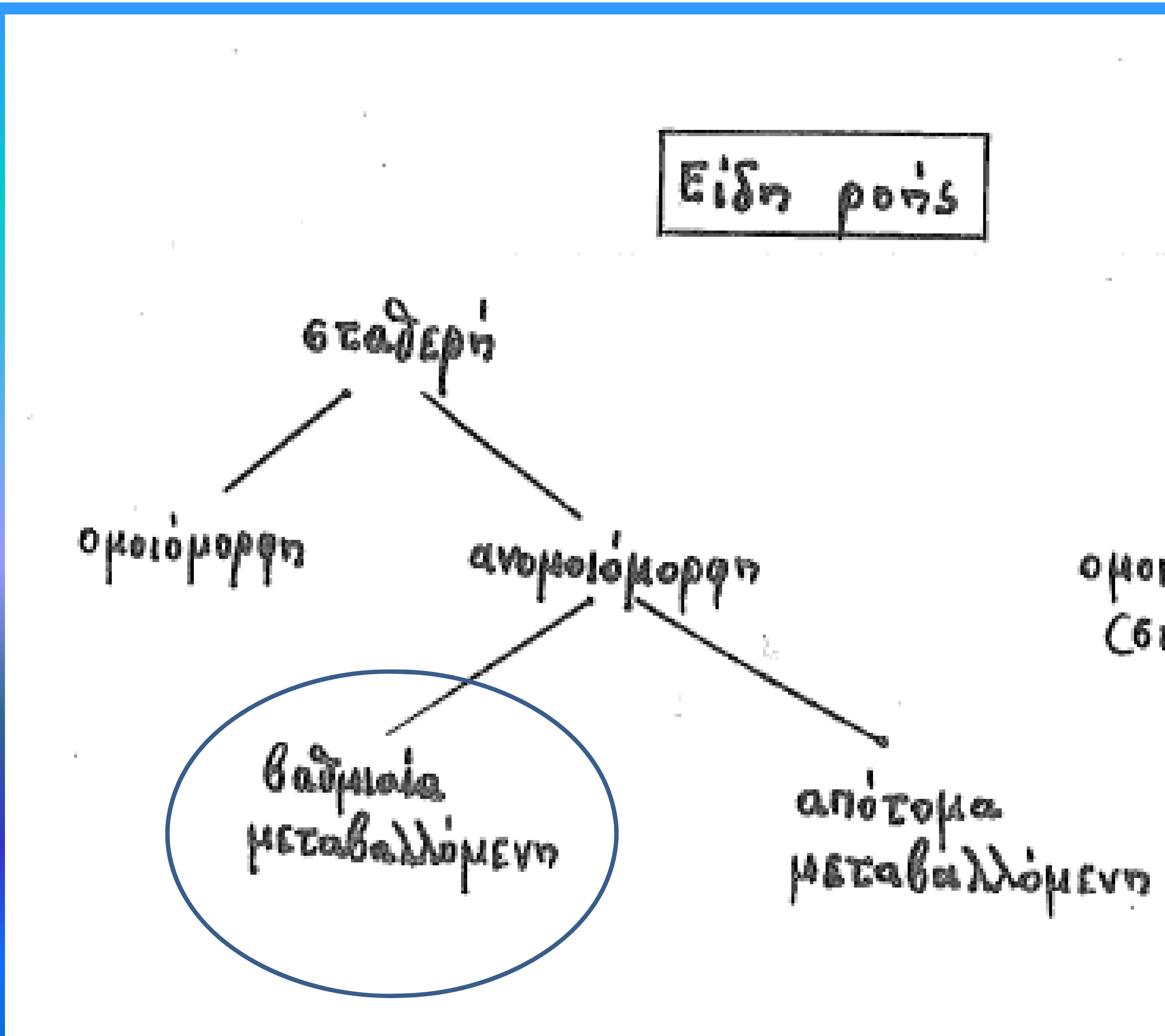
Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροη 3 (συνέχεια…)


Είδη ροής
σταθερή
ομοιόμορφη
ανομοιόμορφη
βαθμιαία μεταβαλλόμενη
απότομα μεταβαλλόμενη

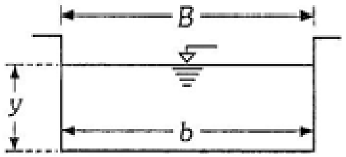
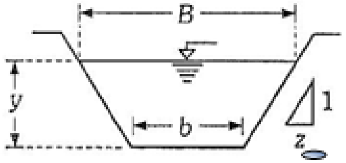
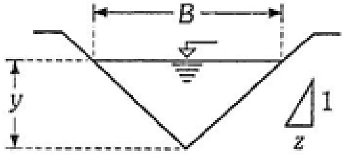
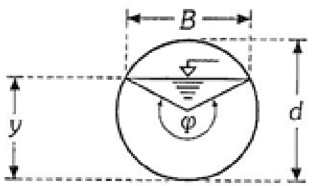
Μεθοδολογία με πίνακες

- Πρώτα τσεκάρω την κλίση. Αν είχαμε ροή ομοιόμορφη (υπόθεση δεν συμβαίνει πάντα, αποκλειστικά για έλεγχο κλίσης) η ροή θα ήταν υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη ή κρίσιμη? Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της οριζόντιας και της αντίστροφης κλίσης που είναι καλό να αποφεύγονται για μεγάλα μήκη
- Αφού προσδιορίσω την καμπύλη (γράμμα) τότε με βάση τις πραγματικές συνθήκες ελέγχω το πραγματικό βάθος ροής με βάση τους πίνακες και αντιστοιχώ τον αριθμό

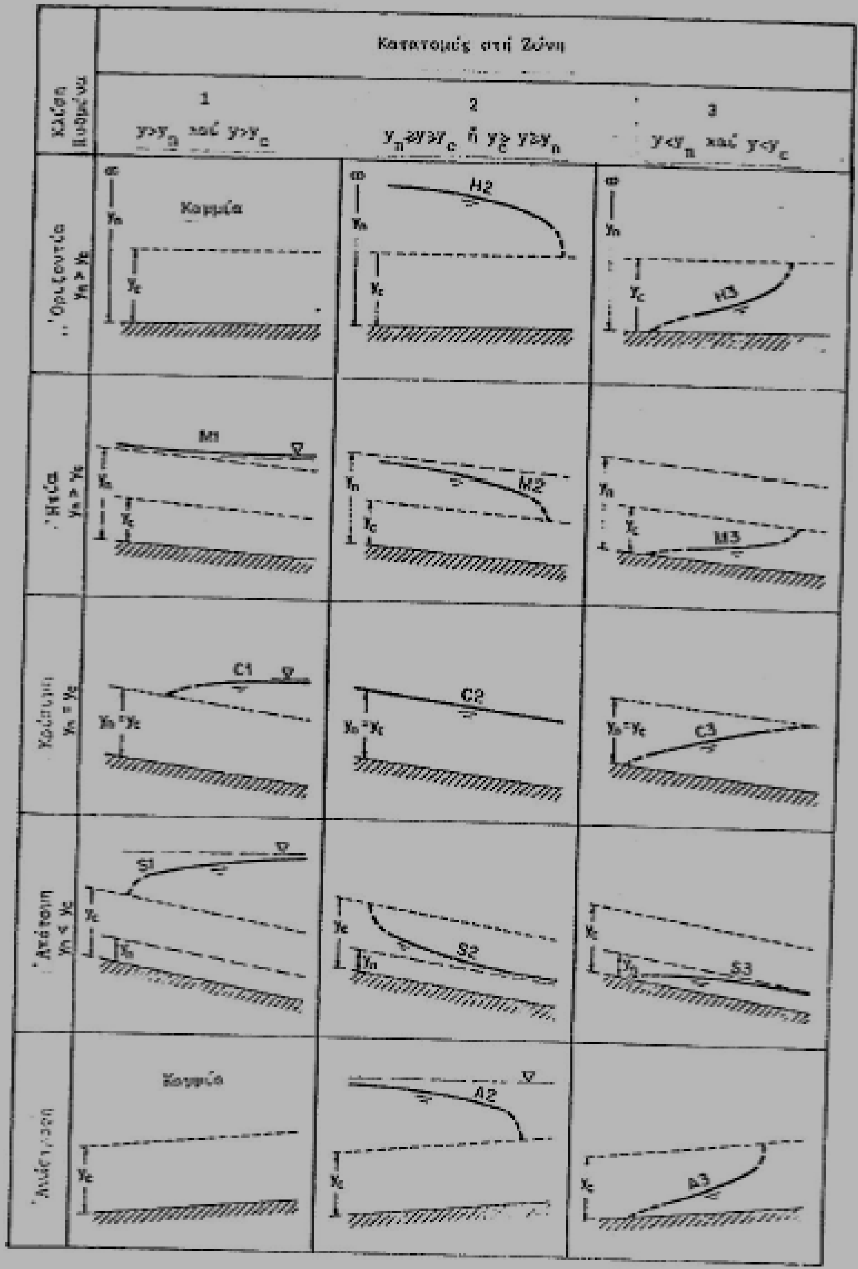
Προσδιορισμός ομοιόμορφου βάθους από εξίσωση Manning
Προσδιορισμός κρίσιμου βάθους από την εξίσωση Fr =1

Είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν αυτά τα βάθη, δεν σημαίνει όμως ότι στην περιοχή όπου μελετώ θα εμφανιστούν αυτά (δηλαδή «μπορεί να μην συμβαίνουν»)

Πίν. 3.1: *Γεωμετρικά στοιχεία αγωγών*

Διατομή	Επιφάνεια A	Βρεχ. περίμετρος P	Υδραυλική ακτίνα $R = A/P$	Πλάτος ελεύθερης επιφάνειας B	Υδραυλικό βάθος $y_\mu = A/B$	Αριθμός Froude F
Ορθογωνική 	by	$b+2y$	$\dfrac{by}{b+2y}$	b	y	$\sqrt{\dfrac{Q^2}{b^2y^3g}}$
Τραπεζοειδής 	$(b+zy)y$	$b+2y\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{(b+zy)y}{b+2y\sqrt{1+z^2}}$	$b+2zy$	$\dfrac{(b+zy)y}{b+2zy}$	$\sqrt{\dfrac{(b+2zy)Q^2}{(b+zy)^3y^3g}}$
Τριγωνική 	zy^2	$2y\sqrt{1+z^2}$	$\dfrac{zy}{2\sqrt{1+z^2}}$	$2zy$	$\dfrac{y}{2}$	$\sqrt{\dfrac{2Q^2}{z^2y^5g}}$
Κυκλική 	$\dfrac{d^2}{8}(\varphi-\sin\varphi)$	$d\dfrac{\varphi}{2}$	$\dfrac{d}{4}\left(1-\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$	$d\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\dfrac{d}{8}\left\{\dfrac{\varphi-\sin\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\right\}$	$\sqrt{\dfrac{512Q^2\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}{gd^5(\varphi-\sin\varphi)^3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$



. 4.1 Σχηματική παράσταση καί ταξινόμηση τῶν κατατομῶν τῆς

Σακκάς, 1988

Φορά υπολογισμών

- Υποκρίσημη ροή: Από κατάντη σε ανάντη (θέμα) εφόσον (τα κύματα βαρύτητας μετακινούνται και ανάντη και κατάντη, ‘φορείς πληροφοριών’)
- Υπερκρίσιμη ροή: Από ανάντη σε κατάντη. «Η υπερκρίσιμη ροή δε γνωρίζει τη συμβαίνει κατάντη αυτής» (τα κύματα βαρύτητας μετακινούνται μόνο κατάντη)

Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Άλλης μορφής διατύπωση της εξίσωσης της ενέργειας για διακριτό βήμα, ευθεία μέθοδος

γενίκευση

Γενίκευση εξίσωση ενέργειας

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z + y + \frac{V^2}{2g}\right) = -S_f$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z + y + \alpha\frac{V^2}{2g}\right) = -S_f < 0$$

Μέση ταχύτητα

$$Q \underset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{=} \bar{V} \cdot A \Leftrightarrow \bar{V} = \frac{Q}{A}$$

- Ορισμός με βάση την παροχή

V: Μέση ταχύτητα είναι η παροχή που διέρχεται ανά μονάδα επιφανείας διατομής $\bar{V} = Q/A = \frac{1}{A}\iint_A u\,dA$ όπου u σημειακή ταχύτητα

π.χ ορθ.διατομή :

$$Q = A \cdot \bar{V} = \int_0^y u(y)\,dA = \int_0^y u(y)(b \cdot dy) = b\int_0^y u(y)\,dy$$

dQ

Ωστόσο, η μέση ταχύτητα δεν είναι πάντα σωστή να τίθεται στην εξίσωση της ενέργειας……

(3)

Συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας (α)

- Η χρήση της μέσης ταχύτητας καταλήγει στον υπολογισμό κινητικής ενέργειας χαμηλότερης από την πραγματική.

  Γι' αυτό, για τον καθορισμό της πραγματικής κινητικής ενέργειας, ιδίως σε αγωγούς ακανόνιστης διατομής, πρέπει να εφαρμοστεί ο συντελεστής διόρθωσης α.

- $a\dfrac{v^2}{2g}$: πραγματικό ύψος κινητικής ενέργειας (κινητική ενέργεια ανά μονάδα βάρους του ρευστού)

  v : μέση ταχύτητα σε μια διατομή

  a : συντελεστής Coriolis

$$\begin{Bmatrix} \text{ρυθμός μεταφοράς κινητικής} \\ \text{ενέργειας δια μέσου μίας διατομής} \end{Bmatrix} =$$

$$\int_A \rho \left(\frac{V^2}{2} \right) \cdot (VdA) \underset{\text{ορ}}{=} \alpha \left(\frac{\bar{V}^2}{2} \right) Q \Leftrightarrow \left\{ Q = \bar{V} \cdot A \right\}$$

$$\alpha = \frac{\int_A \rho \left(\frac{V^3}{2} \right) dA}{\int_A \rho \left(\frac{\bar{V}^3}{2} \right) dA} =$$

$$\frac{1}{A \cdot \bar{V}^3} \int_A V^3 dA$$

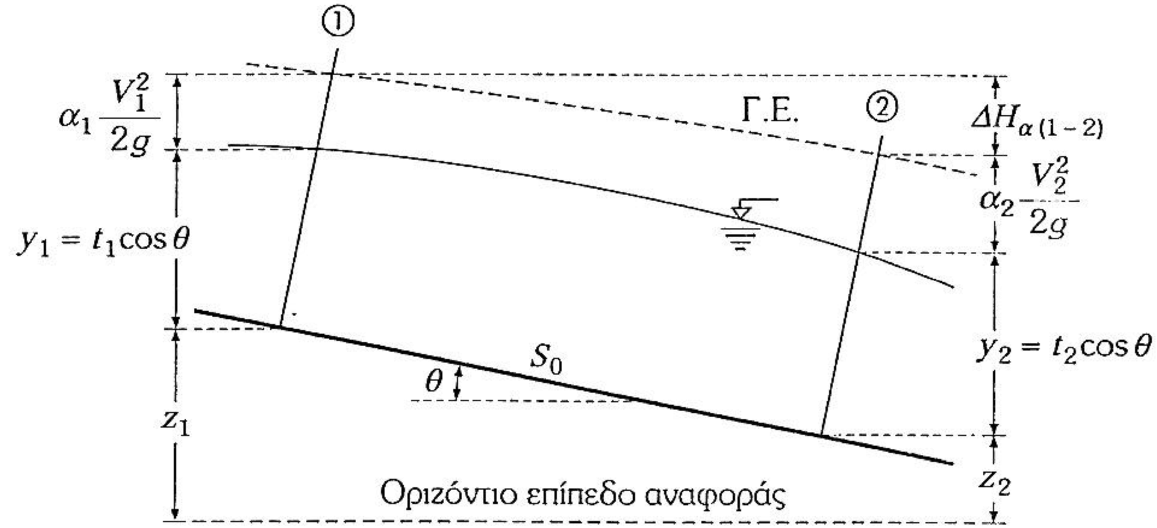
Εξίσωση Ενέργειας

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας, εφόσον η κατά μήκος κλίση, S_0, του πυθμένα του αγωγού είναι μικρή, ώστε να θεωρηθεί $\cos\theta = 1$, οδηγεί στην εξίσωση:

$$z_1 + y_1 + a_1(V_1^2/2g) = z_2 + y_2 + a_2(V_2^2/2g) + \Delta H_{a(1-2)} \tag{3.5}$$

όπου: z_i = το υψόμετρο του πυθμένα και a ο συντελεστής συνόρθωσης της κινητικής ενέργειας ο οποίος ορίζεται ως:

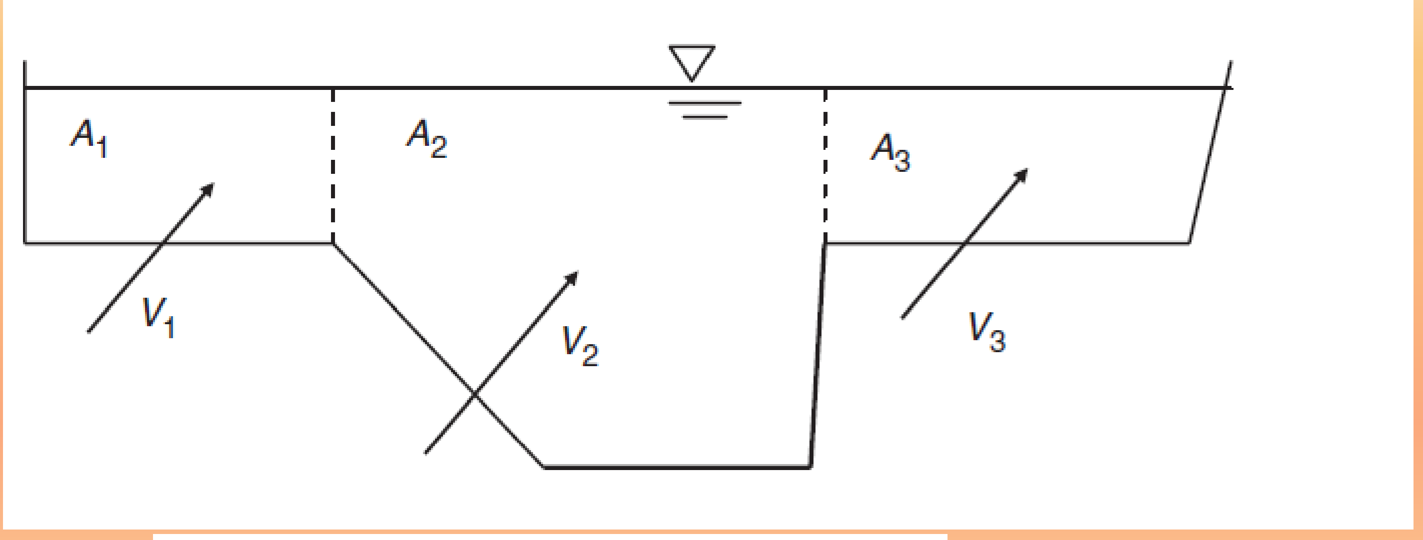
$$a = \frac{\int_A V^3 dA}{V^3 A} = \frac{\int_A V^3 dA}{QV^2} \tag{3.6}$$



Σχ. 3.3: *Η εξίσωση ενέργειας σε επιλεγμένο όγκο αναφοράς.*

Μόνο για ομοιόμορφη ροή
$y_1=y_2$
$V_1=V_2$
$S_0=S_f$

Σύνθετη διατομή



$$\alpha = \frac{V_1^3 A_1 + V_2^3 A_2 + V_3^3 A_3}{V^3 A}$$

Ενδεικτικές τιμές των συντελεστών α και β

Είδος διατομής	α	β
γεωμετρικού σχήματος	1.10-1.20	1.03-1.07
φυσική	1.15-1.50	1.05-1.17
ακανόνιστη	1.50-2.00	1.17-1.33

energy and momentum coefficients.

Solution Προσδιορισμός του συντελεστή διόρθωσης κινητικής ενέργειας και ορμής (Gupta, 1989) σε κάθετη διατομή

$$Q = AV = \Delta A_1 v_1 + \Delta A_2 v_2 + \Delta A_3 v_3 + \cdots$$

$$(3820)V = (120)1.2 + (540)1.43 + (880)2.30 + (920)2.42 + (800)2.52 + (480)1.92 + (80)0.95$$

$$= 8180.2$$

$$V = \frac{8180.2}{3820} = 2.14$$

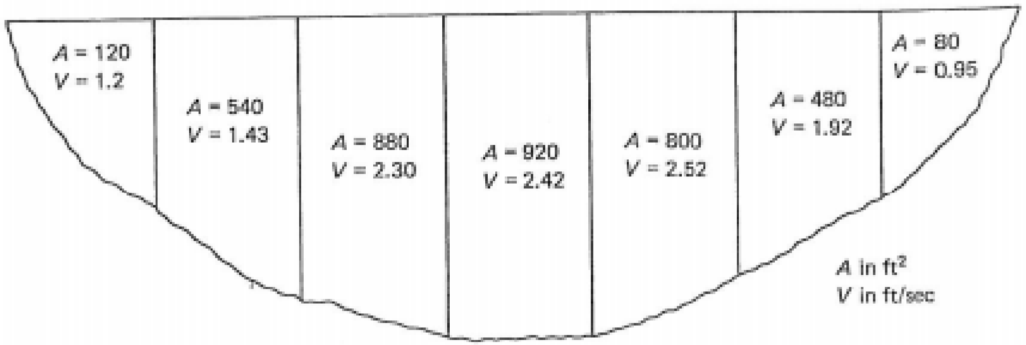
εμείς δουλεύουμε σε m, s, N

μετρήσεις.

Section	Area, ΔA (ft^2)	Velocity, V (ft/sec)	ΔAV^3	ΔAV^2
1	120	1.2	207.36	172.80
2	540	1.43	1,579.07	1,104.25
3	880	2.30	10,706.96	4,655.20
4	920	2.42	13,038.69	5,387.89
5	800	2.52	12,802.41	5,080.32
6	480	1.92	3,397.39	1,769.47
7	80	0.95	68.59	72.20
Total	3820		41,800.5	18,261.93

$$\boxed{\alpha = \frac{\sum V^3 \Delta A}{V^3 A}} = \frac{41{,}800.5}{3820(2.14)^3} = 1.11$$

$$\boxed{\beta = \frac{\sum V^2 \Delta A}{V^2 A}} = \frac{18{,}261.93}{3820(2.14)^2} = 1.04$$



Μόνιμη βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - a\dfrac{Q^2 B}{gA^3}}$$

Αριθμός Froude από ελαχιστοποίηση ειδικής ενέργειας

Για κάποια ενδιάμεση τιμή του βάθους y η ειδική ενέργεια λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Η τιμή αυτή λέγεται **κρίσιμο βάθος**. Η τιμή του κρισίμου βάθους μπορεί να προκύψει από την παραγώγιση της Εξ. 2.26 και την εξίσωση της παραγώγου με το μηδέν ήτοι:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} = 0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} = 1 \quad \text{για } y = y_c \tag{2.29}$$

Ρητή μέθοδος, επίλυση με <u>αριθμητική ολοκλήρωση</u> της διαφορικής έκφρασης για την εξίσωση της ενέργειας, αποφεύγω τις μικρές διαφορές που αναπτύσσονται στις άλλες μεθόδους

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - a\dfrac{Q^2 B}{gA^3}}$$

Επίλυση με βάση ολοκλήρωση ως προς y ή x:

- Ακριβής για ορισμένες μόνο περιπτώσεις
- αριθμητική ολοκλήρωση

- **Ολοκληρώνοντας,**

$$L = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{1 - \alpha \dfrac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \left(\dfrac{n Q}{A R^{2/3}} \right)^2} \right) dy$$

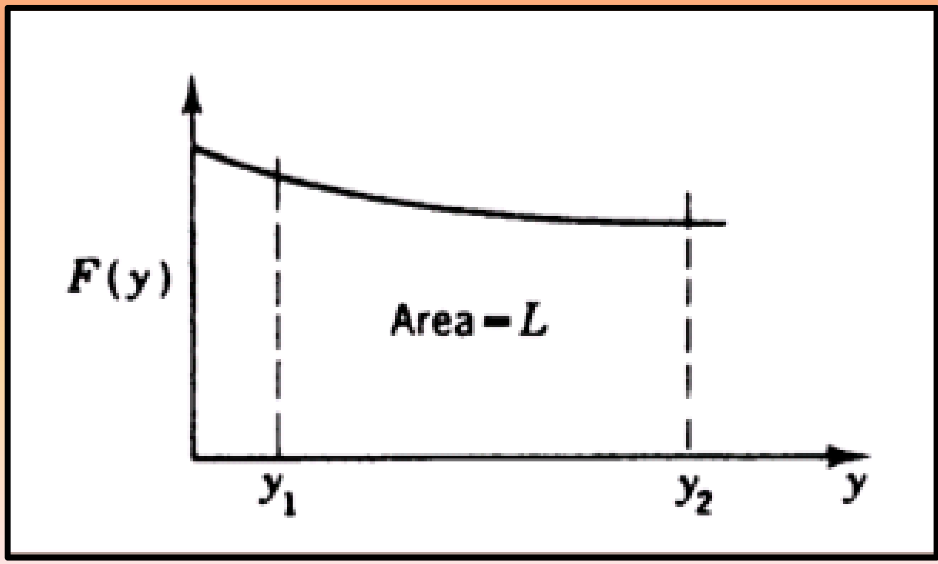
- **Μη καλή προσέγγιση κοντά στο κρίσιμο βάθος**

- **Όταν ο παρανομαστής τείνει στο μηδέν η ροη είναι ομοιόμορφη**

$$E\sigma\tau\omega : F(y) = \left(\frac{1 - \alpha \dfrac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \left(\dfrac{n Q}{A R^{2/3}} \right)^2} \right)$$

- **Το εμβαδόν της συνάρτησης F του *y* για τις δύο τιμές είναι το μήκος *L* των δύο τιμών:**

$$\boxed{L = \int_{y_1}^{y_2} F(y)\, dy}$$



- **Προσέγγιση Α:**

$$E\sigma\tau\omega : \bar{F}(y) = \frac{\left(\dfrac{1 - \alpha \dfrac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \left(\dfrac{nQ}{A R^{2/3}} \right)^2} \right)_1 + \left(\dfrac{1 - \alpha \dfrac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \left(\dfrac{nQ}{A R^{2/3}} \right)^2} \right)_2}{2}$$

Επομένως:

$$L_2 = L_1 + \bar{F}(y)(y_2 - y_1)$$

- **Προσέγγιση Β:**

$$E\sigma\tau\omega : \overline{F}(y) = F(\overline{y}) = \left(\frac{1 - \alpha \dfrac{Q^2 B}{g A^3}}{S_0 - \left(\dfrac{nQ}{A R^{2/3}} \right)^2} \right)_{\overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

-
-

2

Επομένως:

$$L_2 = L_1 + F(\overline{y})(y_2 - y_1)$$

ΆΣΚΗΣΗ

Τραπεζοειδής παλιά διατομή από σκυρόδεμα, με πυθμένα κλίσης S0 = 0.0015, διατομή, b_0=3 m, κλίση 1:1.

Κατάντη υπάρχει θυρόφραγμα. Πριν το θυρόφραγμα η στάθμη ανέρχεται στα 4 m, ενώ η παροχή είναι 19 m^3/s. Να προσδιοριστεί το προφίλ της ελεύθερης επιφανείας του νερού ανάντη σε βάθος 5% μεγαλύτερο από το ομοιόμορφο. n =0.017, α (συντελεστής διόρθωσης κινητικής ενέργειας =1.1)

Ομ. Ροή, εξ. Manning

$$= \bar{f}_n = \frac{Q \cdot n}{S_0^{1/2} b_0^{8/3}}$$

$$\bar{P} = \frac{\left(b + 2y\sqrt{1+z^2}\right)}{b} = 1 + 2\bar{y}\sqrt{1+z^2},$$

$$\bar{A} = \frac{A}{b^2} = \frac{y\left(b + zy\right)}{b^2} = \bar{y}\left(1 + z\bar{y}\right)$$

$$\bar{A}\bar{R}^{2/3} = \frac{A}{b^2}\left(\frac{A}{b^2}\right)^{2/3}\left(\frac{P}{b}\right)^{-2/3} = \bar{y}\left(1+z\bar{y}\right)\cdot\left[\bar{y}\left(1+z\bar{y}\right)\right]^{2/3}\cdot\left(1+2\bar{y}\sqrt{1+z^2}\right)^{-2/3} =$$

$$\left(1+2\bar{y}\sqrt{1+z^2}\right)^{-2/3}\left(\bar{y}\left(1+z\bar{y}\right)\right)^{5/3}$$

Manning

m					
	1				
y/b	**fn αδιαστατο**				1.725
0.575109	0.445485	0.445485	1.725328	18.99326	

Εύρεση βάθους ομοιόμορφης ροής κατά Manning με δοκιμές η εξέλ. Βρέθηκε βάθος ομοιόμορφης ροής 1.725 m

Κρίσιμη ροή, τραπεζοειδής διατομή

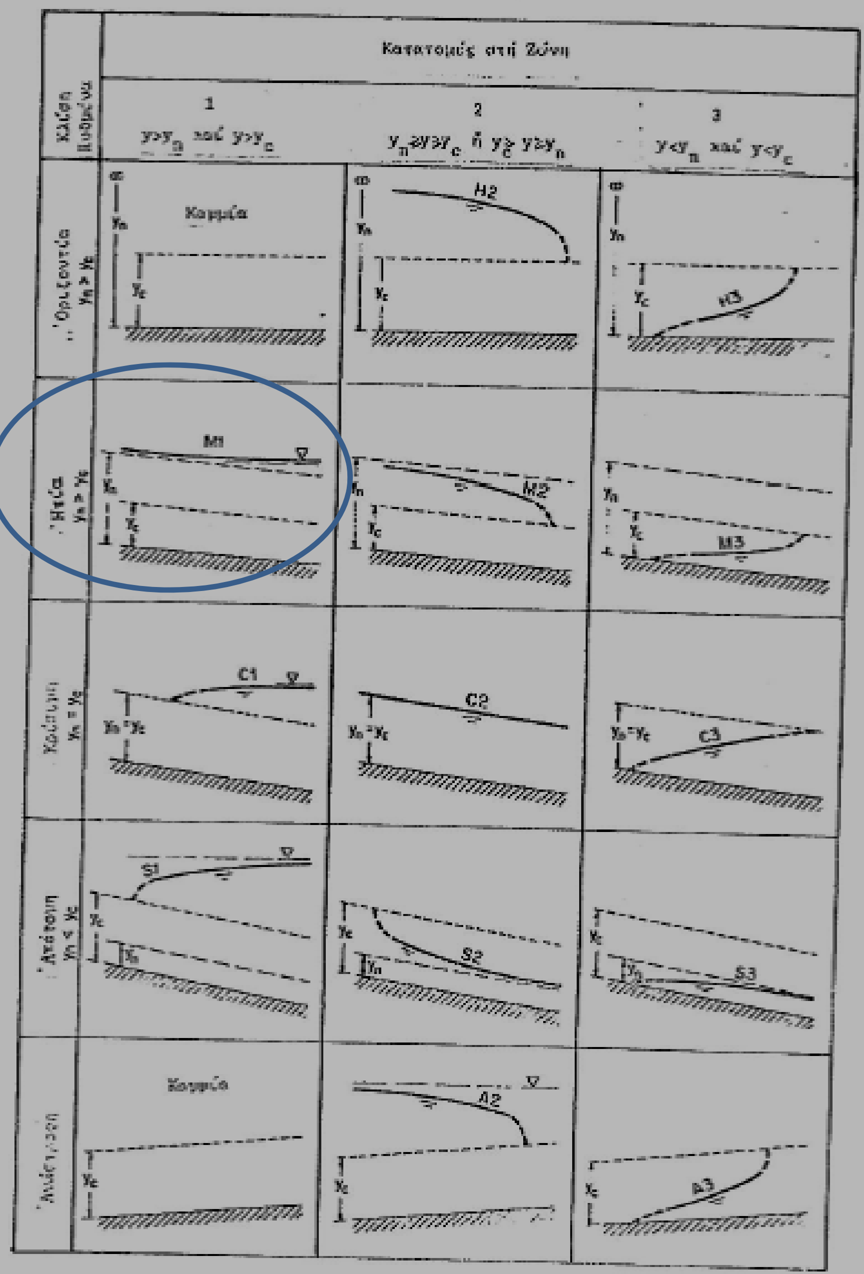
$$f_c = \frac{Q}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \cdot b_0^{5/2}}$$

$$\ldots\ldots Fr = 1 \Leftrightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{b_0^{5/2}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}} = \frac{1}{b_0^{5/2}} A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\bar{B} = \frac{B}{b} = \frac{(b+2yz)}{b} = 1+2z\bar{y}, \quad \bar{A} = \frac{A}{b^2} = \frac{y(b+zy)}{b^2} = \bar{y}(1+z\bar{y})$$

$$\bar{f}_c = \frac{1}{b_0^{5/2}} A\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\bar{A}^3}{\bar{B}}} = \sqrt{\frac{\left[\bar{y}(1+z\bar{y})\right]^3}{1+2z\bar{y}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2}$$



. 4.1 Σχηματική παράσταση καί ταξινόμηση τῶν κατατομῶν τῆς

Yn>yc κλίση ήπια

Πραγματικά βάθη ροής: πάνω από το βάθος ομοιόμορφης ροής M1

Σακκάς, 1988

Ολοκλήρωση

Εάν είχα ομοιόμορφη ροή θα ήταν υποκρίσιμη. Κλίση ήπια (M). Τα πραγματικά βάθη ροής είναι από το ομοιόμορφο βάθος ροής ως τα 4 m. Επομένως, έχω καμπύλη M1

$$\Delta x = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = x_2 - x_1 \quad \text{where } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1 - \left(\alpha Q^2 T / A^3 g\right)}{S_0 - S_\mathrm{f}}$$

Προσέγγιση με μέσο όρο

y (m)	B (m)	A (m^2)	R (m)	dx/dy	Δx (m)	x (m)
4.0	11.0	28.0	1.956	677.71		0
3.9	10.8	26.91	1.918	679.10	67.8	67.8
3.8	10.6	25.84	1.880	680.65	68.0	135.8
3.7	10.4	24.79	1.840	682.47	68.2	204.0
3.6	10.2	23.76	1.800	684.59	68.3	272.3
3.5	10.0	22.75	1.760	687.92	68.6	340.9
3.4	9.8	21.76	1.725	690.00	68.9	409.8
3.3	9.6	20.79	1.685	693.45	69.2	472.0
3.2	9.4	19.84	1.646	697.58	69.5	548.5
3.1	9.2	18.91	1.607	702.54	70.0	618.5
3.0	9.0	18.00	1.567	708.56	70.6	689.1
2.9	8.8	17.11	1.527	715.94	71.2	760.3
2.8	8.6	16.24	1.487	725.10	72.0	832.3
2.7	8.4	15.39	1.447	736.64	73.1	905.4
2.6	8.2	14.56	1.406	751.43	74.4	979.8
2.5	8.0	13.75	1.365	770.80	76.1	1056