Απόδειξη της διαφορικής μορφής της εξ. ορμ
(διατήρησης ποσότητας κίνησης) Μεταβολή ορμής

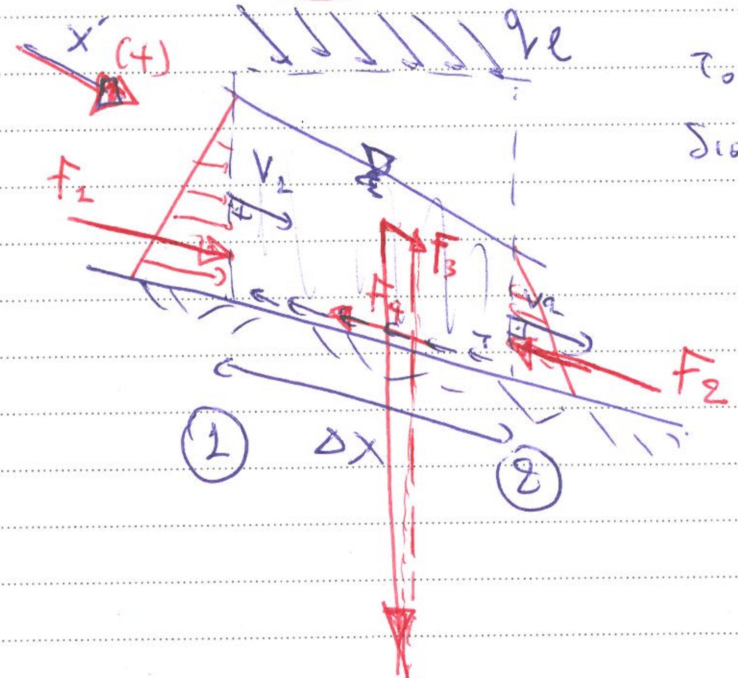
$$\sum F_x = \frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} V\cdot\rho A\,dx + V_2\rho A_2 V_2 - V_1\rho A_1 V_1 - V_\ell \rho q_{v\ell}(x_2-x_1)$$

πυκνότητα.
ταχύτητα.
εκροή ορμής
εισροή ορμής

συνισταμένη δύναμη στον όγκο αναφοράς = μεταβολή της ορμής στον όγκο αναφοράς στη μονάδα του χρόνου

εκροή ορμής, εισροή ορμής, πλευρική εισροή ορμής

ρυθμός καθαρής εκροής ορμής από τον όγκο αναφοράς διαμέσου της επιφανείας ελέγχου λόγω ροής του ρευστού.



F_3: οριζόντια συνιστώσα του βάρους

ρ αυκνόητη

διαιρώντας με $\rho(x_2 - x_1)$ και θεωρώντας

$x_2 \to x_1$, $dx \leftarrow \Delta x = x_2 - x_1$ και

$\frac{\partial Q}{\partial t}$ πρακτικά μη εξαρτώμενο από το x στο Δx:

παροχή, ταχύτητα

$$\boxed{\frac{\Sigma F_x}{\rho(x_2 - x_1)} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q \cdot V)}{\partial x} - V_x q_e .}$$

(E)

ΣF_x, ορίζω θετική φορά αυτή της ροής, έχω:

1) Επιφανειακές δυνάμεις: από πίεσης, από τριβής

2) καθολικές δυνάμεις: βάρος.

- <u>Δυνάμεις λόγω πίεσης:</u>

$F_1 = +\rho g A_1 \bar{y}_1$

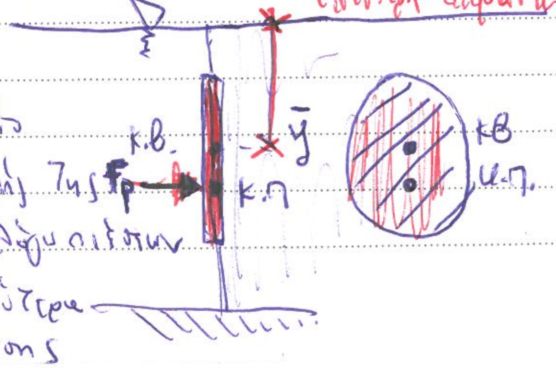
Δύναμη λόγω πίεσης σε κατακόρυφες επιφάνειες

$F_p = \bar{p} \cdot A = \underset{\text{κ.β}}{\text{πίεση στο}} \cdot A =$

$= \rho g \bar{y} \cdot A$

$F_2 = -\rho g A_2 \bar{y}_2$

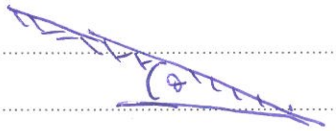
Το σημείο εφαρμογής της F_p δύναμης λόγω πιέσεων είναι βαθύτερα στο κ. πίεσης



δύναμη από ίδιο βάρος: όγκος όγκου ελέγχου

$$F_3 = \rho g \int_{x_1}^{x_2} A S_o dx \quad (\gamma V = B)$$

για μικρές κλίσεις: $S_o = \tan\theta = \sin\theta$



δύναμη λόγω τριβών

$$F_4 = + \int_{x_1}^{x_2} \tau P dx$$

διατ/κη τάση (−), βρεχόμενη περίμετρος

$$\Rightarrow F_4 = \gamma \int_{x_2}^{x_1} A S_f dx$$

Από διαστατική ανάλυση ισχύει

$$\tau = \frac{f}{8} \rho \cdot V^2, \quad f: \text{συντελεστής τριβής} = f(k/D, Re)$$

Darcy - Weisbach για ανοιχτούς αγωγούς

$$\frac{h_f}{L} = S_f = \frac{f}{(4R)} \frac{V^2}{2g}$$

$$'' \; -\gamma \int_{x_1}^{x_2} A S_f dx$$

$$\Sigma F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4$$

Για $x_2 - x_1 = \Delta x \rightarrow dx$ (απειροστή μεταβολή)

Οπότε ~~θα~~ αντικαθιστώντας στην (Ε) και με παραδοχές για μη σημαντική μεταβολή στις ποσότητες εντός των ολοκληρωμάτων:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(QV + gA\bar{y}\right) = gA\left(S_0 - S_f\right) + V_x q_l}$$

(Wurbs and James, 2002)

Q: παροχή (ογκομετρική)

V: ταχύτητα

A: επιφάνεια

g: επ/νση βαρύτητας

S_0: κλίση πυθμένα $= -\frac{\partial z}{\partial x}$

S_f: κλίση γραμμής ενέργειας $= \frac{h_f}{L}$

$\bar{y}$: Απόσταση του κέντρου βάρους της διατομής από την ελεύθερη επιφάνεια

x: άξονας ροής

V_x: ταχύτητα πλευρικής εισροής

q_l: παροχή πλευρική ανά μονάδα μήκους (αν υπάρχει)