Παράρτημα. Τεκμηρίωση υδραυλικών υπολογισμών για τραπεζοειδής διατομή

Ομοιόμορφη ροή
(βάθος ροής σταθερό) και έλεγχος κρίσιμης ροής σε τραπεζοειδής διατομή

3. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ

- Κινούσα δύναμη: συνιστώσα της βαρύτητας κατά τη διεύθυνση του άξονα του αγωγού
- Αντίθετες δυνάμεις: τριβές στον πυθμένα και στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού με τον αέρα
- Όταν ο αγωγός είναι πρισματικός και αρκούντως μεγάλου μήκους και η παροχή είναι σταθερή, τότε η κινούσα δύναμη εξισορροπείται από τις αντιστάσεις και δεν υπάρχει επιτάχυνση σε καμιά διατομή του αγωγού.
- Τα υδραυλικά στοιχεία της ροής (βάθος και μέση ταχύτητα) παραμένουν σταθερά κατά μήκος του αγωγού ⇒ ομοιόμορφη ροή, κανονικό βάθος ροής

Αδιαστατοποίηση των παραμέτρων ροής

- Σκοποί της αδιαστατοποίησης:

  (α) Μείωση των μεταβλητών ενός προβλήματος

  (β) Πινακοποίηση του προβλήματος

- Σχεδιασμός ομοιόμορφης ροής:

  Δίδεται η παροχή Q, η κλίση του πυθμένα S_o και ο συντελεστής τραχύτητας n.

  Ζητούνται οι διαστάσεις του αγωγού

  (που εμπεριέχονται στη συνάρτηση αγωγιμότητας $f_n(y) = AR^{2/3}$)

Μεταβολή της γραμμής ενέργειας σε ομοιόμορφη ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ομοιόμορφη ροή:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Παραγώγιση όρων ενέργειας κατά τη διεύθυνση της ροής, x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g} + z + y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2g}\right) + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = -S_0 < 0$$

Ομοιόμορφη ροή → κλίση γραμμής ενέργειας = κλίση πυθμένα = κλίση ελεύθερης επιφάνειας

Λόγω της συσσωρευμένης εμπειρίας όμως, περισσότερο δημοφιλής είναι η απλοποιημένη σχέση, η οποία αποδίδεται στον *R.* Manning και γι' αυτό ονομάζεται και τύπος του Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} \tag{3.9}$$

όπου: n = ο συντελεστής τραχύτητας γνωστός ως συντελεστής Manning, με διαστάσεις ($s/m^{1/3}$), ο οποίος αποτελεί έκφραση της τραχύτητας του στερεού ορίου και συνδέεται με το συντελεστή f των Darcy - Weisbach με τη σχέση:

$$f = (8gn^2)/R^{1/3} \tag{3.10}$$

Οι τιμές του συντελεστή n λαμβάνονται από πίνακες που έχουν δημοσιευθεί σε πληθώρα βιβλίων. Ο Πίνακας 3.2 παρουσιάζει τις τιμές του συντελεστή n για μια σειρά υλικά από τα οποία αποτελείται ο ανοικτός αγωγός. Σημειώνεται ότι επειδή ο συντελεστής n δεν είναι αδιάστατος αριθμός, κατά τη χρήση του τύπου Manning η ταχύτητα πρέπει να εκφράζεται σε m/s, η υδραυλική ακτίνα σε m και η παροχή σε m^3/s.

Το γεγονός ότι εδώ η ροή πραγματοποιείται με ελεύθερη επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα η υγρή διατομή, A, να εξαρτάται εκτός από τη γεωμετρία της διατομής και από τη θέση της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή σε σχέση με τη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση υπάρχει ένα επιπλέον άγνωστο μέγεθος που πρέπει να υπολογιστεί.

Ο υπολογισμός του ομοιόμορφου βάθους, y_0, γίνεται με χρήση της εξίσωσης Manning και της εξίσωσης συνέχειας, άρα:

$$Q = (1/n) A R^{2/3} S_0^{1/2} \tag{3.11}$$

Αν είναι γνωστά: η παροχή Q (m^3/s), η γεωμετρία του αγωγού, ο συντελεστής n και η κατά μήκος κλίση S_0, τότε:

Τσακίρης, 2015

$$A R^{2/3} = (nQ)/S_0^{1/2} = \text{γνωστό} \tag{3.12}$$

Πίν. 3.2: *Συντελεστές Manning n για διάφορα υλικά*

Μέταλλο λείο	0.011 - 0.015
Μέταλλο, αυλακωτό	0.023 - 0.025
Ξύλο, κατεργασμένο	0.010 - 0.015
Ξύλο, ακατέργαστο	0.011 - 0.015
Τσιμέντο λείο	0.010 - 0.013
Σκυρόδεμα	0.014 - 0.016
Τσιμεντοχάλικο	0.017 - 0.030
Γρασίδι	0 > 0.020

Τεκμηρίωση για τραπεζοειδείς διατομές

Τραπεζοειδής διατομή

- Για τραπεζοειδή διατομή:

$A = y(b+my)$ $\quad P = b + 2y\sqrt{1+m^2}$ $\quad R = A/P$

y: βάθος ροής

b: πλάτος πυθμένα

m: κλίση πρανών

- Η συνάρτηση αγωγιμότητας f_n είναι συνάρτηση των y, b και m, καθόσον $f_n = AR^{2/3}$

- Αδιαστατοποίηση με το πλάτος πυθμένα b_o

- Αντί των τριών μεταβλητών b, y και m, έχουμε δύο, τις $\bar{y} = y/b_o$ και m

Χρυσάνθου, 2015

ομοιόμορφη ροή: Εξ. Manning

$$Q = \frac{1}{n} A R^{2/3} S_0^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$Q \cdot n \big/ S_0^{1/2} = A R^{2/3} =$$

$$\Sigma \upsilon \nu \acute{\alpha} \rho \tau \eta \sigma \eta \ \alpha \gamma \omega \gamma \iota \mu \acute{o} \tau \eta \tau \alpha \varsigma$$

Επίλυση με πίνακες τραπεζοειδής διατομή (1), αδιαστασοποίηση

- Αδιάστατη συνάρτηση αγωγιμότητας $\bar{f}_n(\bar{y})$

$$\bar{f}_n(\bar{y}) = \bar{A}\,\bar{R}^{2/3} = \frac{A}{b_0^2}\,\frac{R^{2/3}}{b_0^{2/3}} = \frac{f_n}{b_0^{8/3}}$$

Συνάρτηση μόνο των γεωμετρικών στοιχείων

$$\boxed{\bar{f}_n = \frac{f_n}{b_0^{8/3}}}$$

$$Q = \frac{A}{n} R^{2/3} S_0^{1/2} = A R^{2/3} \frac{S_0^{1/2}}{n} = f_n \frac{\sqrt{S_0}}{n} = b_0^{8/3} \bar{f}_n \frac{\sqrt{S_0}}{n}$$

$$\boxed{Q = b_0^{8/3} \bar{f}_n \frac{\sqrt{S_0}}{n}} \rightarrow \bar{f}_n = \frac{Q \cdot n}{S_0^{1/2} b_0^{8/3}}$$

Χρυσάνθου, 2015

Επίλυση με πίνακες ή σχεδάγραμμα τραπεζοειδής διατομή (2)

$$\overline{f}_n = \frac{Q \cdot n}{S_0^{1/2} b_0^{8/3}}$$

- Επίλυση με πίνακες, βάθος ομοιόμορφης ροής, δοκιμή για διάφορα πλάτη

Η αδιαστατοποίηση της συνάρτησης αγωγιμότητας με σταθερά αδιαστατοποίησης το πλάτος πυθμένα μειώνει τον αριθμό των μεταβλητών παραμέτρων από τρεις σε δύο ήτοι αντί των b, y, m τις $\overline{y} = y/b$ και m.

Η Εξ. (3.9) γίνεται

$$\bar{f}_n(\overline{y}) = \overline{A}\,\overline{R}^{2/3} = \frac{A}{b^2}\frac{R^{2/3}}{b^{2/3}} = \frac{f_n}{b^{8/3}} \tag{3.11}$$

ΓΙΑΤΙ ΜΕ ΠΙΝΑΚΕΣ?

$$\overline{P} = \frac{\left(b + 2y\sqrt{1+z^2}\right)}{b} = 1 + 2\overline{y}\sqrt{1+z^2},$$

Βρεχόμενη περίμετρος (επαφή τοιχώματος νερού)

$$\overline{A} = \frac{A}{b^2} = \frac{y\left(b + zy\right)}{b^2} = \overline{y}\left(1 + z\overline{y}\right)$$

εμβαδόν

$$\overline{A}\overline{R}^{2/3} = \frac{A}{b^2}\left(\frac{A}{b^2}\right)^{2/3}\left(\frac{P}{b}\right)^{-2/3} = \overline{y}\left(1+z\overline{y}\right)\cdot\left[\overline{y}\left(1+z\overline{y}\right)\right]^{2/3}\cdot\left(1+2\overline{y}\sqrt{1+z^2}\right)^{-2/3} =$$

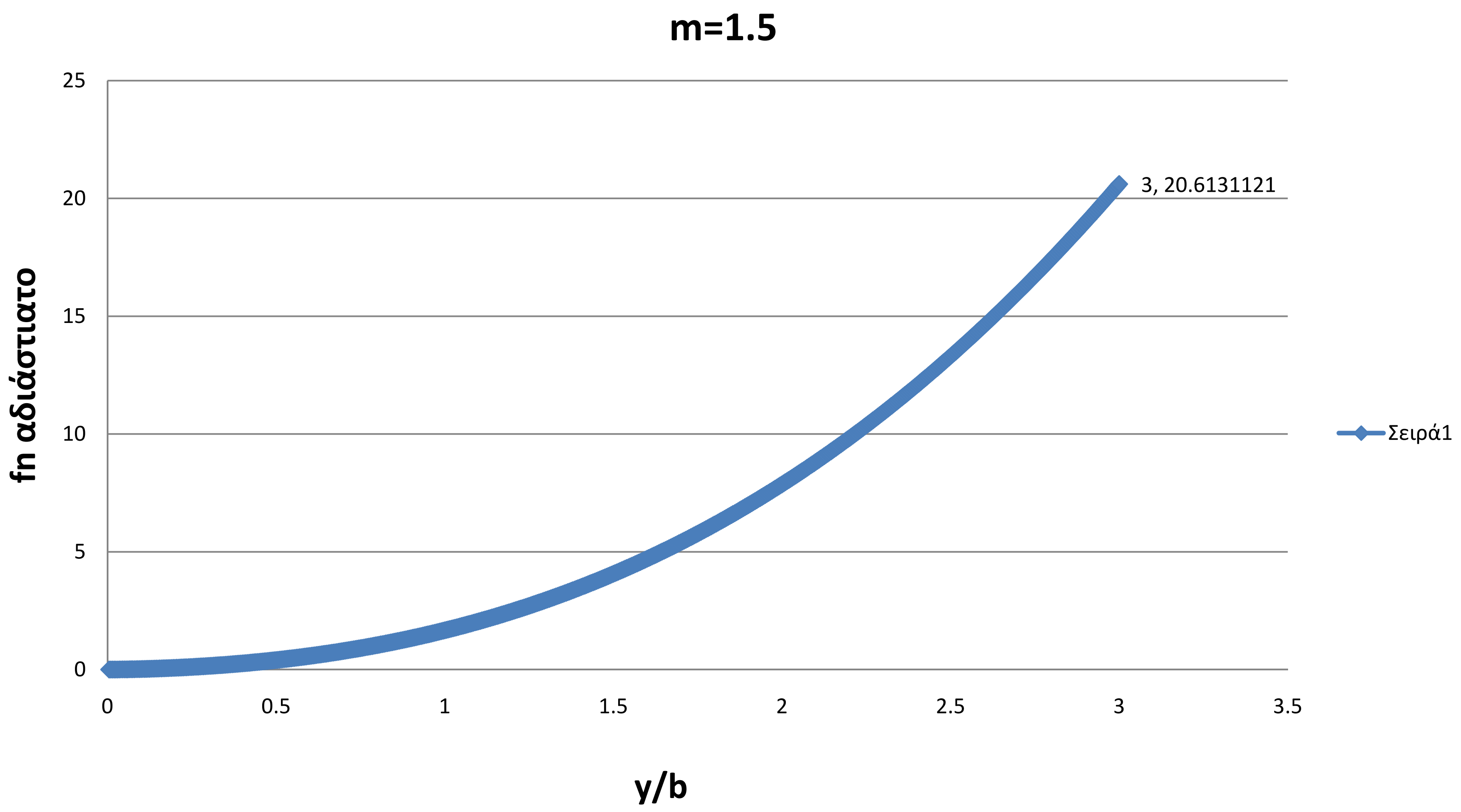
$$\left(1+2\overline{y}\sqrt{1+z^2}\right)^{-2/3}\left(\overline{y}\left(1+z\overline{y}\right)\right)^{5/3}$$

Υδραυλική ακτίνα: R = A/P

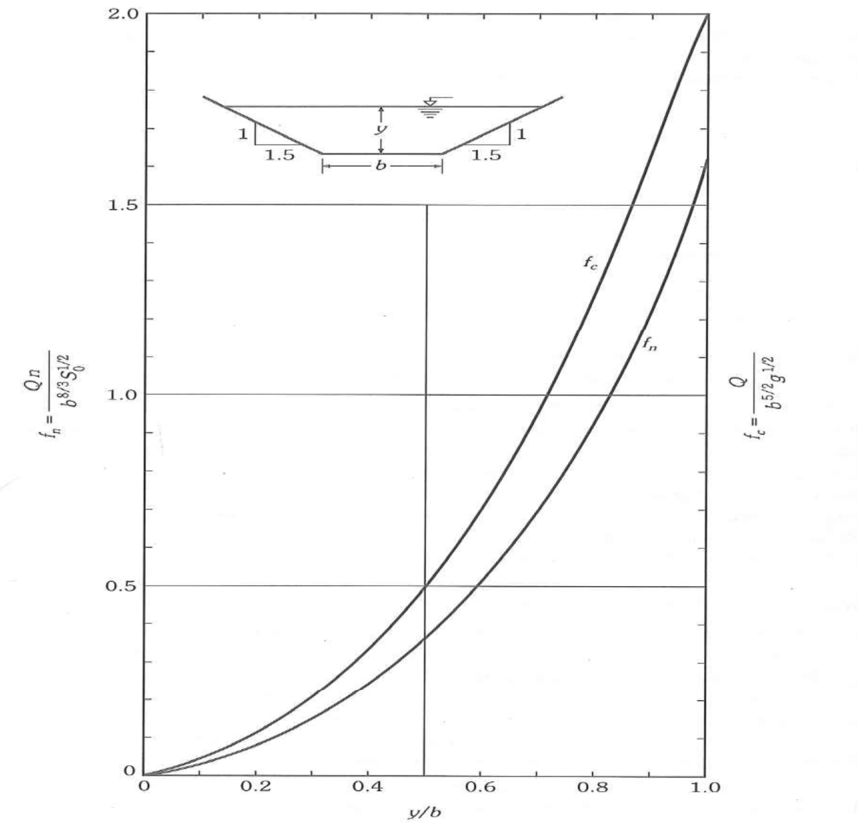
z	
1,5	
y/b	fn αδιαστ
0,005	0,000146
0,01	0,000465
0,015	0,000914
0,02	0,001478
0,025	0,002146
0,03	0,002911
0,035	0,003768
0,04	0,004713
0,045	0,005743
0,05	0,006854
0,055	0,008046
0,06	0,009317
0,065	0,010664
0,07	0,012086

Για διάφορες τιμές του αδιάστατου y/b, που «αυθαίρετα» υποθέτω με βάση την προηγούμενη σχέση προσδιορίζω τους πίνακες

$$\overline{A}\,\overline{R}^{2/3} = \left(1+2\overline{y}\sqrt{1+z^2}\right)^{-2/3}\left(\overline{y}\left(1+z\overline{y}\right)\right)^{5/3}$$


m=1.5
25
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
3, 20.6131121
fn αδιάστατο
y/b
Σειρά1

Κλίση και παροχή γνωστή υδραυλική επίλυση από πίνακες



Σχ. 8.11α: *Συναρτήσεις αγωγιμότητας και κρίσιμης ροής τραπεζοειδούς διατομής* $z = 1.5:1$.

$$\bar{f}_n = \frac{Q \cdot n}{S_0^{1/2} b_0^{8/3}}$$

Κρίσιμη ροή, επιδιώκω ροή υποκρίσιμη στους αγωγούς

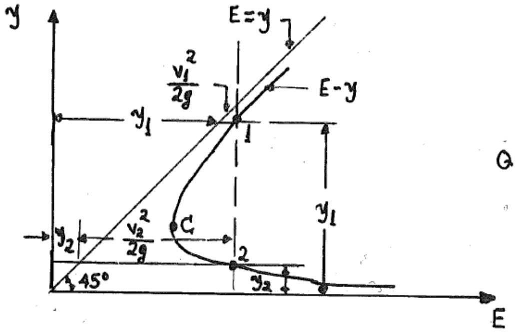
Κρίσιμη ροή

Ορίζεται για την ελάχιστη ειδική ενέργεια

Ειδική ενέργεια

- Ενέργεια ανά μονάδα βάρους του υγρού, σε μια διατομή, με επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα του αγωγού (z=0)

$$E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gA^2}$$



Q = σταθ.

Για $y \to 0$, $E \to \infty$, για $y \to \infty$, $E \to y \to \infty$

$E \to min$, για $y = y_c$ (κρίσιμο βάθος)

Χρυσάνθου, 2015

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{Q^2 B}{gA^3} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \quad \text{για } y = y_c}$$

- συζυγή βάθη ροής
- υποκρίσιμη, υπερκρίσιμη, κρίσιμη ροή

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = Fr^2 \Rightarrow \text{αριθμός Froude (Fr)}$$

$Fr < 1 \Rightarrow$ υποκρίσιμη ροή

$Fr > 1 \Rightarrow$ υπερκρίσιμη ροή

$Fr = 1 \Rightarrow$ κρίσιμη ροή

Έλεγχος κρίσιμης ροής με βάση τον αριθμό Fr ή το κρίσιμο βάθος

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = 1 \quad \text{για } y = y_c \Rightarrow Q^2 = \frac{g A^3}{B} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{g A^3}{B}} \Rightarrow Q = \sqrt{g}\, A \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\boxed{f_c = A\sqrt{\frac{A}{B}} \ : \ \text{συνάρτηση κρίσιμης ροής}}$$

$$\ldots\ldots Fr = 1 \Leftrightarrow A\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{Q}{\sqrt{g}}$$

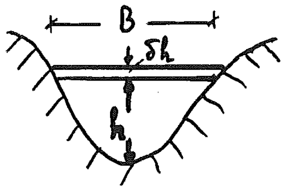
Χρυσάνθου, 2015

Πιο αναλυτικά

Κρίσιμες συνθήκες, ελάχιστη ειδική ενέργεια

26

Ανοικτοί αγωγοί μη ορθογωνικής διατομής



B : πλάτος της διατομής στην επιφάνεια του νερού

$$E = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

$$\frac{dE}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2}{A^3}\frac{dA}{dh}\right)$$

$$dA = B\,dh \Rightarrow \frac{dA}{dh} = B$$

$$\frac{dE}{dh} = 1 + \frac{Q^2}{2g}\left(-\frac{2B}{A^3}\right) \Rightarrow 0 = 1 + \frac{Q^2}{g}\left(-\frac{B}{A^3}\right) \Rightarrow$$

Κρίσιμες συνθήκες ροής:

Ελάχιστη ειδική ενέργεια

Froude = 1

$$\boxed{\frac{Q^2}{g} = \left(\frac{A^3}{B}\right) \quad h = h_c}$$

$$Q = A_c u_c$$

$$\frac{A_c^2 u_c^2}{g} = \frac{A_c^3}{B_c}$$

$$\boxed{u_c = \sqrt{\frac{A_c g}{B_c}}}$$

$$\frac{Q^2}{g}\left(\frac{B}{A^3}\right)_c = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{Q^2}{g}\left(\frac{B}{A^3}\right)_c} = 1 \Leftrightarrow \frac{Q}{A}\sqrt{\left(\frac{B}{gA}\right)_c} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_c}{\sqrt{g\frac{A_c}{B_c}}} = 1 \Leftrightarrow Fr = 1$$

Χρυσάνθου, 2014

Χρήσιμα συμπεράσματα για την κρίσιμη ροή

- Κρίσιμη ροή

$$\frac{Q^2}{g}\left(\frac{B}{A^3}\right)_c = 1$$

- Για δεδομένη παροχή αντιστοιχεί ένα κρίσιμο βάθος (ανεξάρτητα από άλλους παράγοντες παρά μόνο από τη γεωμετρία της διατομής)
- Τότε η ειδική ενέργεια είναι **ελάχιστη**

Γιατί dA/dy=B

Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ LEIBNITZ

Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{A(x)}^{B(x)} f(x,t)dt$ όπου οι συναρτήσεις *A(x)* και *B(x)* είναι παραγωγίσιμες ως προς x και *f(x,t)* και $\partial f(x,t)/\partial x$ είναι συνεχείς ως προς *x*, *t*. Τότε η παράγωγος *dF/dx* δίδεται από την εξίσωση:

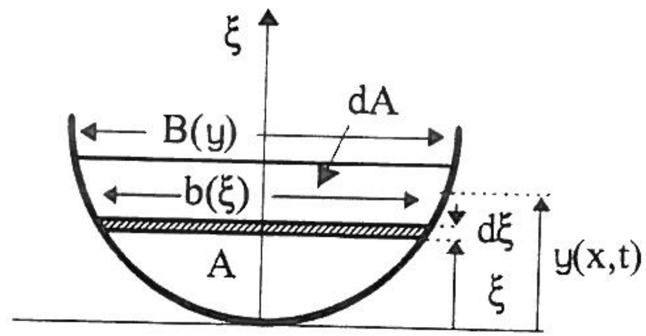
$$\frac{dF}{dx} = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x, B(x))\frac{dB}{dx} - f(x, A(x))\frac{dA}{dx}$$

Αλλά, όπως αποδεικνύεται στη συνέχεια, το πλάτος της ελεύθερης επιφάνειας B είναι ίσο με τη μεταβολή του εμβαδού A ως προς y. Πράγματι, είναι :

$$A = \int_0^y b(\xi)\, d\xi$$

και :

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y b(\xi)\, d\xi$$



Σχήμα 3.3

Διευκρίνιση στοιχείων διατομής

Σύμφωνα με τον κανόνα του Leibnitz η παράγωγος του ολοκληρώματος αυτού γίνεται :

προαιρετικό

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \int_0^y \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial y}\left[b(\xi)\right]} d\xi + 1\cdot\left[b\right]_{\xi=y} = B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Δαμασκηνίδου και Σιδηρόπουλος, 1996

Κρίσιμη ροή: Ελάχιστη ειδική ενεργεια

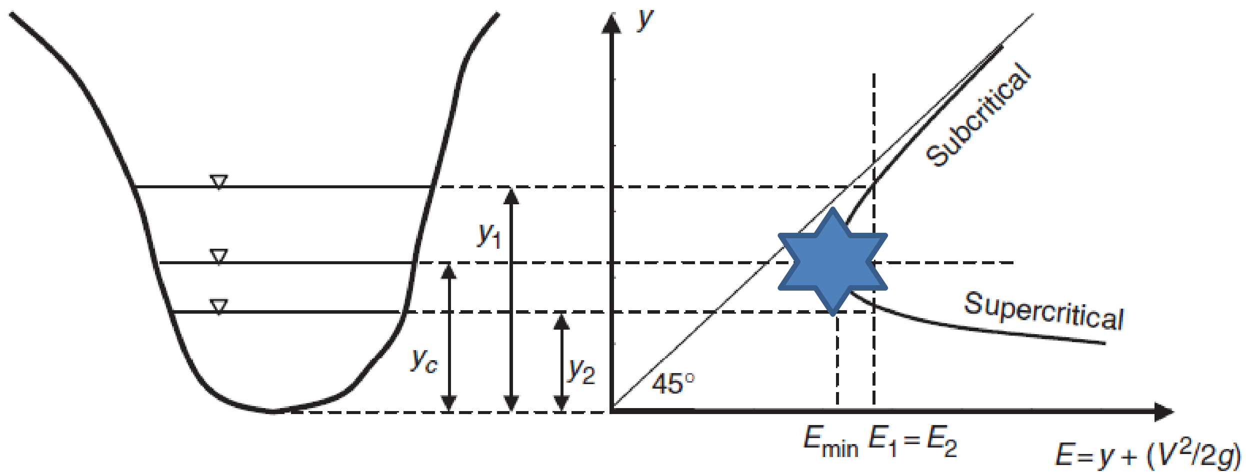


FIGURE 2.6 Specific energy diagram

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Κρίσιμη ροή, αδιαστατοποίηση

$$.....Fr = 1 \Leftrightarrow \frac{Q}{\sqrt{g\frac{A}{B}A^2}} = 1 \Leftrightarrow A\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{Q}{\sqrt{g}}$$

Εξαρτάται μόνο από την παροχή Και τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής

$$f_c = \frac{Q}{\sqrt{g}} \rightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{b_0^{5/2}\sqrt{g}}$$

$$.....Fr = 1 \Leftrightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{b_0^{5/2}\sqrt{g}} = \frac{1}{b_0^{5/2}} A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

Κρίσιμη ροή, τραπεζοειδής διατομή

$$.....Fr=1 \Leftrightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{b_0^{5/2}\sqrt{g}} = \frac{1}{b_0^{5/2}} A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\bar{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{b}} = \frac{(\mathrm{b}+2\mathrm{yz})}{\mathrm{b}} = 1+2\mathrm{z}\bar{\mathrm{y}}, \quad \bar{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{b}^2} = \frac{\mathrm{y}(\mathrm{b}+\mathrm{zy})}{\mathrm{b}^2} = \bar{\mathrm{y}}(1+\mathrm{z}\bar{\mathrm{y}})$$

$$\bar{f}_c = \frac{1}{b_0^{5/2}} A\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\bar{A}^3}{\bar{B}}} = \sqrt{\frac{\left[\bar{y}(1+z\bar{y})\right]^3}{1+2z\bar{y}}}$$

- Αδιάστατη συνάρτηση κρίσιμης ροής $\bar{f}_c$

- Συνάρτηση κρίσιμης ροής: $f_c = A\sqrt{A/B}$

$$\bar{f}_c = \frac{A}{b_0^2}\,\frac{\sqrt{A/B}}{b_0^{1/2}} = \frac{f_c}{b_0^{5/2}}$$

$$\boxed{\bar{f}_c = \frac{f_c}{b_0^{5/2}}}$$

για κρίσιμη ροή, Fr =1

$$Q = A\sqrt{g\frac{A}{B}} = f_c\sqrt{g} = b_0^{5/2}\bar{f}_c\sqrt{g}$$

$$\boxed{Q = b_0^{5/2}\bar{f}_c\sqrt{g}} \rightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{\sqrt{g}\cdot b_0^{5/2}}$$

Εξαρτάται μόνο από την παροχή Και τα γεωμετρικά στοιχεία της διατομής

Χρυσάνθου, 2015

Έλεγχος κρίσιμης ροής

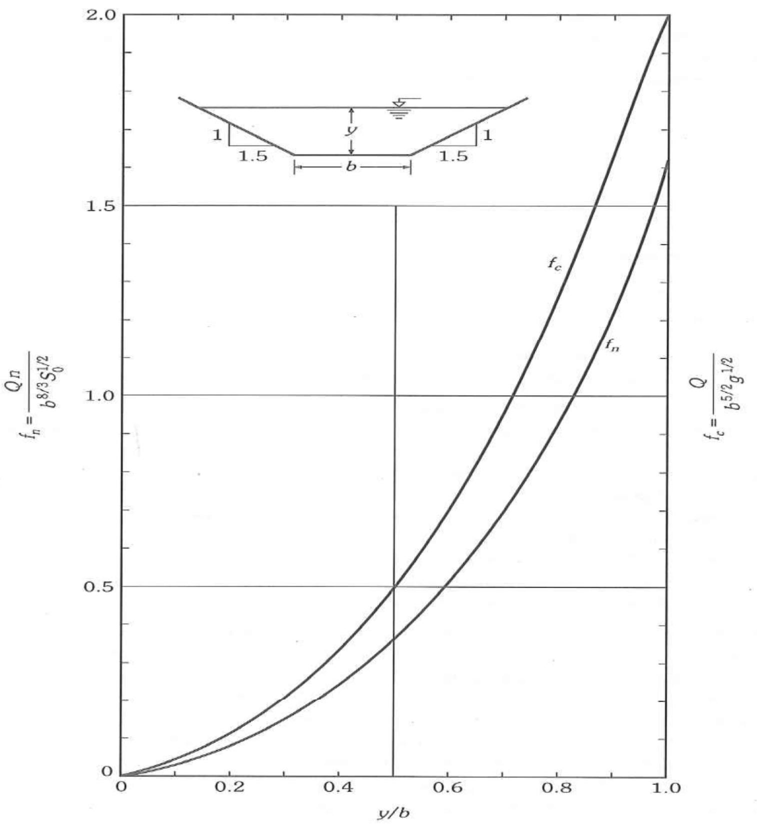
- Υπολογίζω:

$$\bar{f}_c = \frac{Q}{\sqrt{g} \cdot b_0^{5/2}}$$

- Επίλυση με πίνακες προσδιορισμός κρίσιμου βάθους
- Έλεγχος: θα πρέπει $y_n > y_c$ (ροή υποκρίσιμη)

Για δεδομένη παροχή και γεωμετρικά στοιχεία διατομής αντιστοιχεί ένα κρίσιμο βάθος

Έλεγχος ροή υποκρίσιμη



Σχ. 8.11α: *Συναρτήσεις αγωγιμότητας και κρίσιμης ροής τραπεζοειδούς διατομής z = 1.5 : 1.*

$$\rightarrow \bar{f}_c = \frac{Q}{\sqrt{g} \cdot b_0^{5/2}}$$

Ξανά («εικονικός» έλεγχος κρίσιμης ροής υπέρ της ασφάλειας)

- U.S. Bureau of Reclamation: Πρέπει $y_c < y_n'$, όπου y_n' το βάθος ομοιόμορφης ροής που προκύπτει για συντελεστή Manning $n' = n - 0.003$ (για μεγαλύτερη ασφάλεια)

Υπόθεση υπερ της ασφάλειας (εικονικό)

$n' = 0.014 - 0.003 = 0.011$

$$\bar{f}_n(\bar{y}_n') = \frac{n'Q}{b^{8/3} S_o^{1/2}} = 0.1345$$

Από τον Πίνακα Π3.1 $\Rightarrow \bar{y}_n' = 0.279$

$y_n' = \bar{y}_n' \times b = 0.279 \times 5.5 = 1.535 \text{ m}$

$y_c < y_n' \Rightarrow$ υποκρίσιμη ροή

Χρυσάνθου, 2015