



Διατμηματικό πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών
“ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ”

Δρ Βασίλειος Κιτσικούδης και Δρ Σπηλιώτης Μιχάλης

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΥΔΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

ΞΑΝΘΗ, 2015

- Παραδείγματα από Τριβέλλα Θ. Εφαρμοσμένη ανάλυση υδρολογικών χρονικών σειρών
- και από Λιώκη-Λειβαδά Ηρώ, Ασημακόπουλος Δημοσθένης Ν., 2010. Μαθήματα Εφαρμοσμένης Στατιστικής. Εκδόσεις Συμμετρία

Ορισμός και σκοπός χρονικής σειράς (time series)

3

Το σύνολο των στοιχείων που προέρχονται από διαδοχικές μετρήσεις που λαμβάνονται σε κανονικά χρονικά διαστήματα, συνήθως ίσα ή σχεδόν ίσα, αποτελούν μία **χρονική σειρά**.



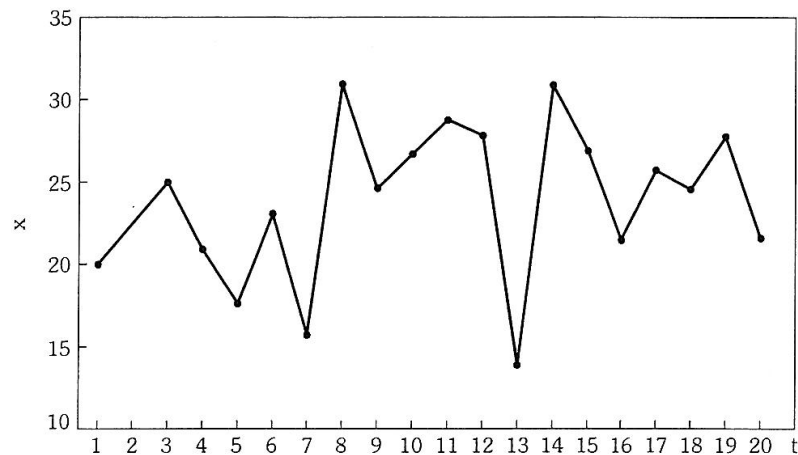
Η ανάλυση μιας χρονικής σειράς αποσκοπεί στην εύρεση ενός μαθηματικού μοντέλου που να αποδίδει τη δυναμική συμπεριφορά της.



Χρήση του μαθηματικού μοντέλου για μελλοντικές προβλέψεις (δεδομένου ότι διατηρούνται οι ίδιες συνθήκες).

Και χωροσειρές

Όπως προαναφέρθηκε σαν χρονοσειρές ορίζονται ακολουθίες παρατηρήσεων (ή μετρήσεων) διατεταγμένες σε ίσα χρονικά διαστήματα. (Αν πρόκειται για παρατηρήσεις ή μετρήσεις σε ίσες αποστάσεις στο χώρο, τότε πρόκειται για χωροσειρές οι οποίες μελετώνται κατά τον ίδιο τρόπο). Αν ως εκ τούτου δίνονται οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_N , της μεταβλητής X μετρημένες σε χρόνους t_1, t_2, \dots, t_N , τότε η χρονοσειρά συμβολίζεται ως $X = f(t)$ και παρίσταται γραφικά σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων από μια πολυγωνική γραμμή (Σχήμα 15.1).



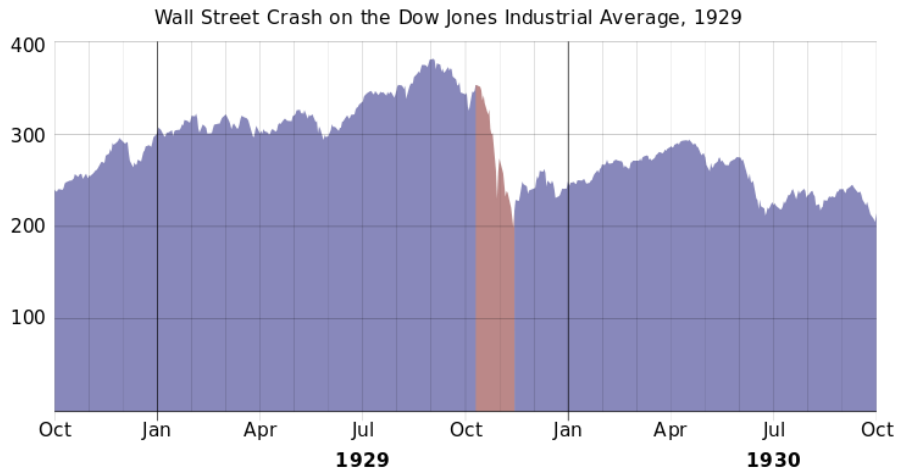
Σχ. 15.1: Γραφική απεικόνιση χρονοσειράς.

Λιώκη-Λειβαδά Ηρώ, Ασημακόπουλος Δημοσθένης Ν., 2010.
Μαθήματα Εφαρμοσμένης Στατιστικής. Εκδόσεις Συμμετρία

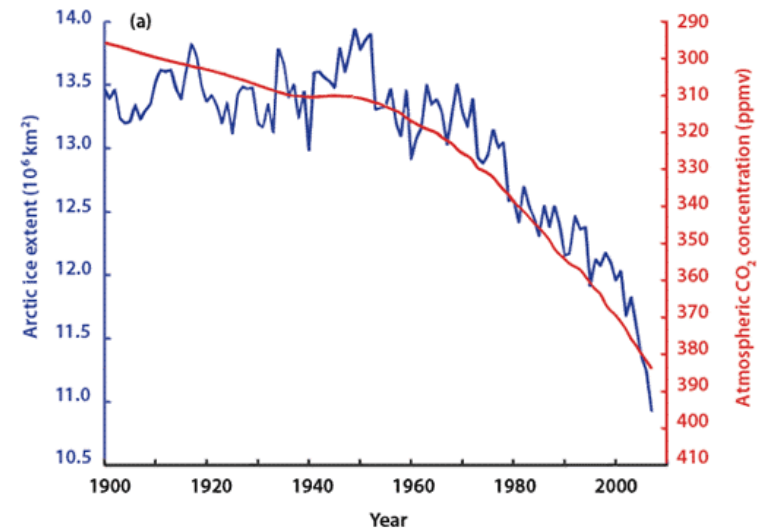
Οφέλη της μελέτης χρονικών σειρών

5

- Οι χρονικές σειρές αναπτύχθηκαν και χρησιμοποιούνται κυρίως σε άλλα αντικείμενα (μοντέλα πρόβλεψης στα οικονομικά, στην επεξεργασία σημάτων, στην πρόγνωση του καιρού κ.τ.λ.).



Χρονική σειρά που περιγράφει το κραχ του '29.



Χρονική σειρά που περιγράφει την μείωση της παγωμένης επιφάνειας του Αρκτικού Ωκεανού και την αύξηση του CO_2 .



Οφέλη της μελέτης χρονικών σειρών

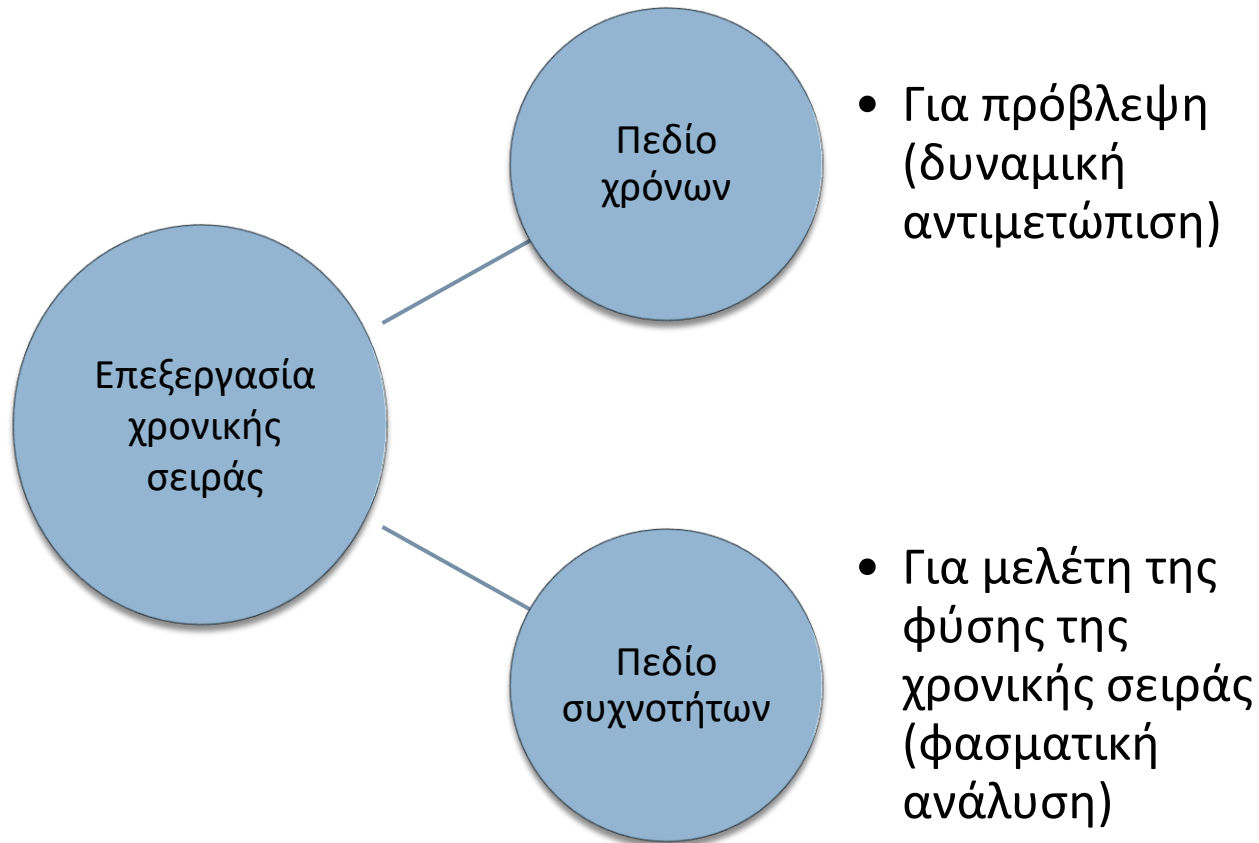
6

- Ικανότητα πρόβλεψης σε προβλήματα όπου η υπάρχουσα γνώση της φυσικής του προβλήματος κρίνεται ανεπαρκής.
- Δεν χρειάζονται δεδομένα πολλών μεταβλητών, η καταγραφή και ο υπολογισμός των οποίων ενδέχεται να είναι προβληματικοί.
- Πρόβλεψη τιμών σε προβλήματα που δεν έχουν μονοσήμαντες λύσεις (π.χ. hysteresis effect σε σχέσεις στάθμης-παροχής).



Επεξεργασία των στοιχείων μιας χρονικής σειράς

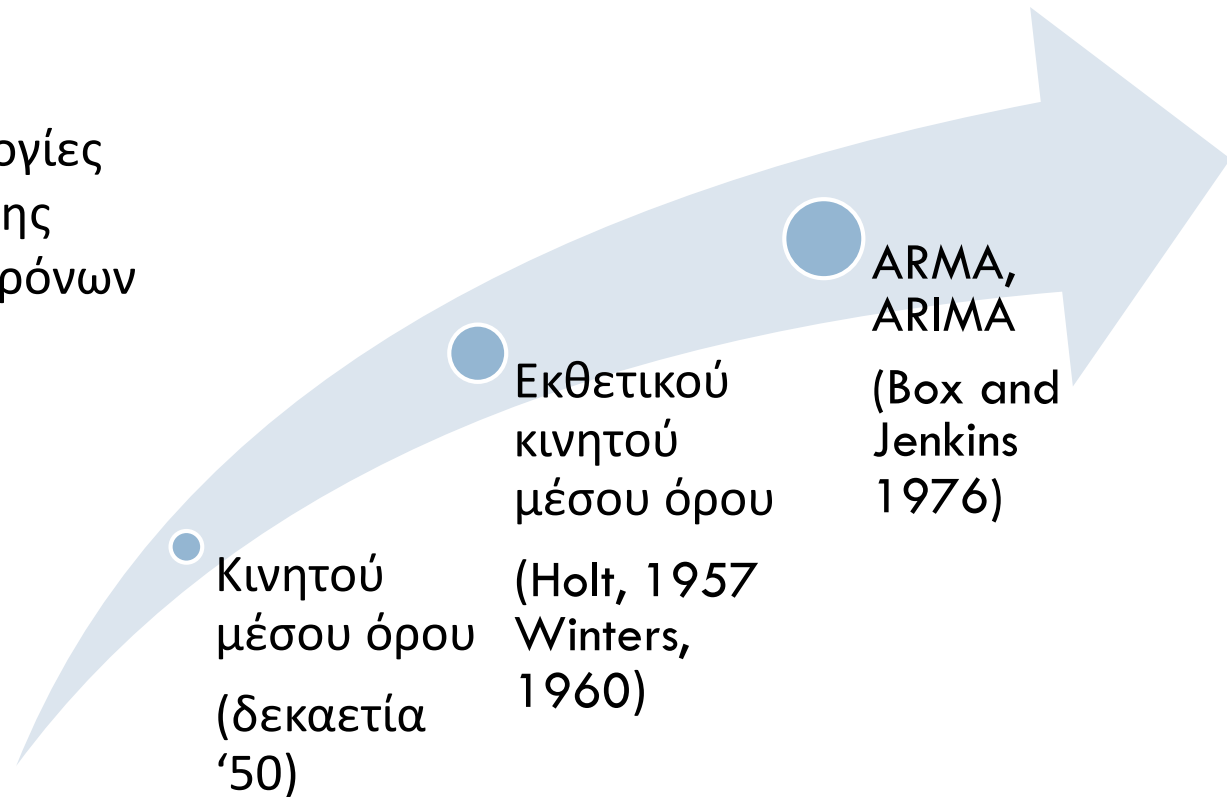
7



Εξέλιξη της ανάλυσης χρονοσειρών

8

Μεθοδολογίες
ανάλυσης
στο πεδίο χρόνων



- Box, George and Jenkins, Gwilym (1970) *Time series analysis: Forecasting and control*, San Francisco: Holden-Day.
- Holt, Charles C. (1957). "Forecasting Trends and Seasonal by Exponentially Weighted Averages". *Office of Naval Research Memorandum* 52.
- Winters, P. R. (April 1960). "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages". *Management Science* 6 (3): 324–342.



Χρήση κινητών μέσων όρων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στον Πίνακα 15.1.1 δίνεται για 20 χρόνια η ετήσια παραγωγή ελαιόλαδου σε τόνους ενός αγρού. Δεδομένου ότι η παραγωγή λαδιού εμφανίζει διετή κύκλο, να γίνει απαλοιφή αυτού με τη βοήθεια του απλού κινητού μέσου των 2 ετών.

ΠΙΝΑΚΑΣ 15.1.1.

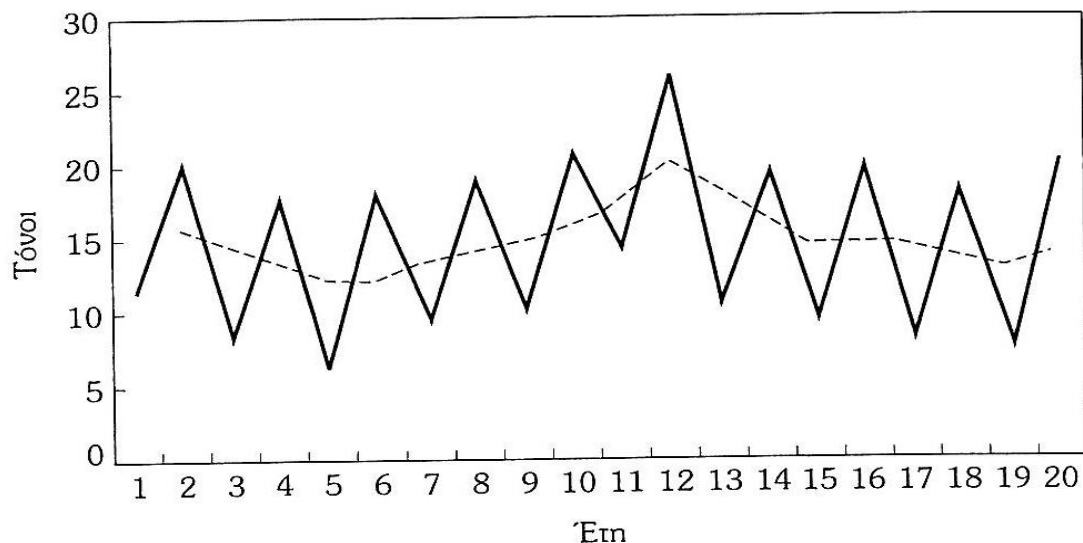
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}
11	19.5	8	17.2	6	17.5	8.9	18.3	10	20
X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}
14	25	10	18.5	9	19	8	17.5	7.3	19.5

Λιώκη-Λειβαδά Ηρώ, Ασημακόπουλος Δημοσθένης Ν., 2010.
Μαθήματα Εφαρμοσμένης Στατιστικής. Εκδόσεις Συμμετρία

ΛΥΣΗ

Για την αφαίρεση του διετούς κύκλου θα εφαρμοσθεί ο κινητός μέσος των δύο ετών ($v = 2$). Ως εκ τούτου η πρώτη τιμή αυτού $X_1^* = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{11 + 19.5}{2} = 15.5$

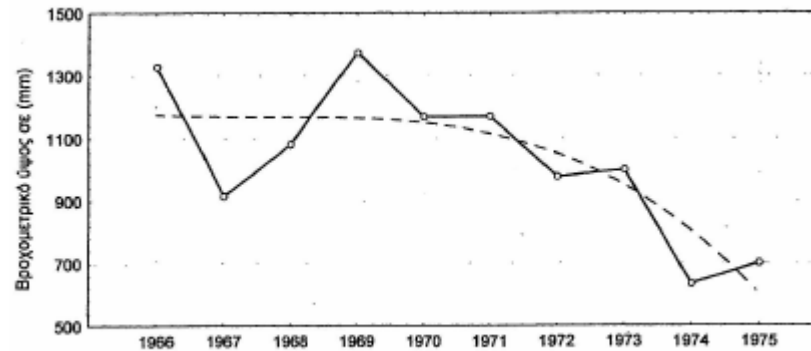
θα έπρεπε να τεθεί στη θέση ανάμεσα στη X_1 και τη X_2 , αφού $v = 2$ είναι άρτιος αριθμός. Στην πράξη οι τιμές X_i^* ξεκινούν από την τιμή X_2 (αν $v = 3$ θα ξεκινούσαν από την μεσαία μεταξύ των X_1, X_2, X_3 , δηλαδή από την X_2 , αν $v = 4$ θα έπρεπε να ξεκινήσουν από την μεσαία μεταξύ X_2, X_3 , άρα ξεκινούν από την X_3 κ.ο.κ.). Στη συνέχεια υπολογίζονται οι υπόλοιπες διαδοχικές τιμές X_i^* , και χαράσσεται η αρχική και η εξομαλυμένη χρονοσειρά στο παρακάτω διάγραμμα (Σχήμα 15.1.1), από το οποίο φαίνεται η εξομάλυνση ως προς τον διετή κύκλο.

**Σχ. 15.1.1.**

Συνιστώσες μιας χρονικής σειράς

11

Η τάση (trend)



Σχ.1. Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Χλόη

- Το κυρίαρχο στοιχείο του Σχ. 1 είναι μια φθίνουσα **τάση** (trend), που ορίζεται ως η μακροχρόνια μεταβολή της μέσης τιμής.

Συνιστώσες μιας χρονικής σειράς (συνέχεια)

12

Η περιοδική συνιστώσα

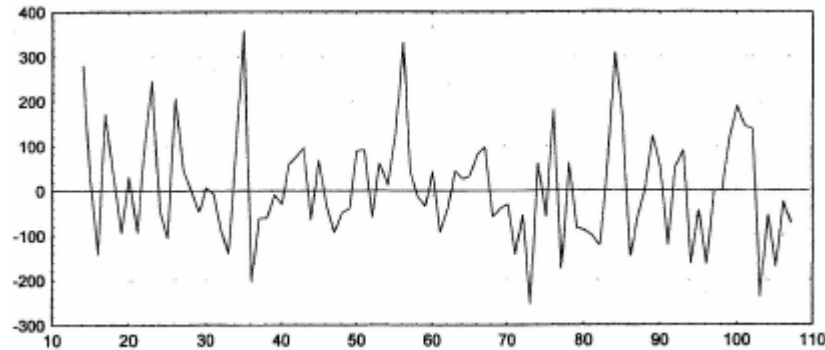


- Το κυρίαρχο στοιχείο του Σχ. 2 είναι μια τάση επανάληψης ορισμένων χαρακτηριστικών, παρουσιάζεται δηλαδή μία **εποχικότητα** (seasonality).

Συνιστώσες μιας χρονικής σειράς (συνέχεια)

13

Η τυχαία συνιστώσα (θόρυβος)

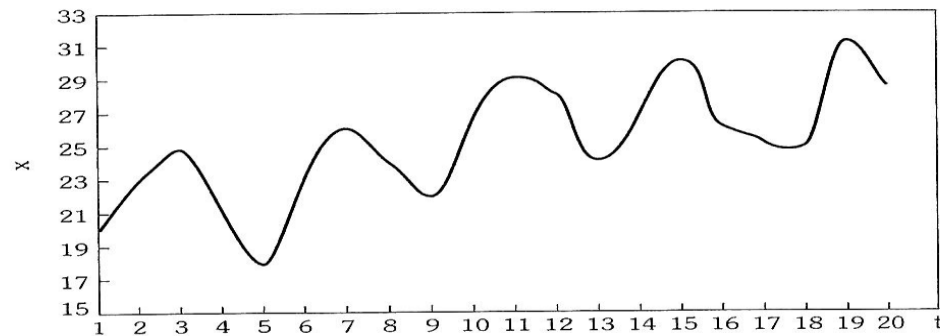


Σχ.3. Χρονική σειρά "θορύβων"

- Το Σχ. 3 δεν παρουσιάζει κάποιο συγκεκριμένο πρότυπο μεταβολής, η χρονοσειρά ακολουθεί “τυχαία βήματα” και ονομάζεται **θόρυβος** (noise).

Μπορεί να προστεθεί και κυκλική συνιστώσα (εκτός εφαρμογής)

- Κινήσεις μεγάλης περιόδου (π.χ. αιώνιες), οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν από τις παρατηρούμενες «τάσεις» (Σχήμα 15.2) οι οποίες θα μελετηθούν σε επόμενες παραγράφους. Αυτές μπορούν να ερευνηθούν μαθηματικά και να θεμελιωθούν στατιστικά, αλλά δεν μπορούν να ορίσουν προγνωστικούς δείκτες γιατί η χρονοσειρά μπορεί να αποτελεί ένα τμήμα μιας ευρύτερης κύμανσης η οποία δεν μπορεί να διαπιστωθεί από την διατιθέμενη χρονοσειρά και επί πλέον σε μελλοντικό χρόνο να αναστραφεί υπό την επίδραση εξωτερικών παραγόντων.



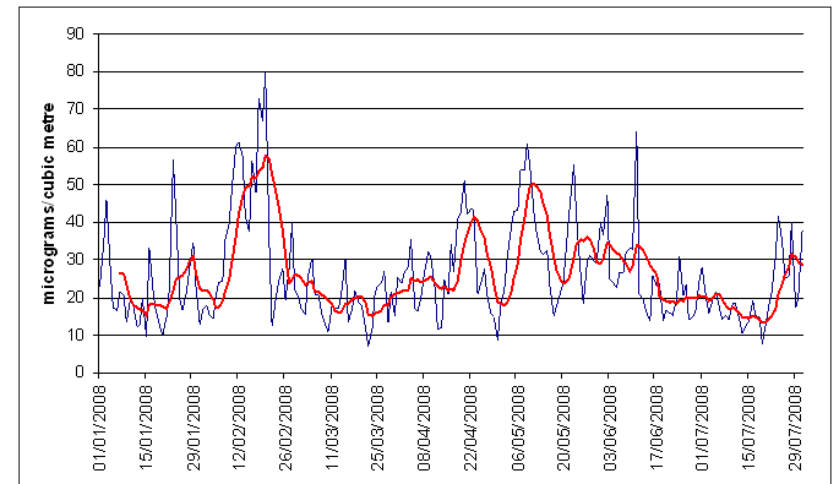
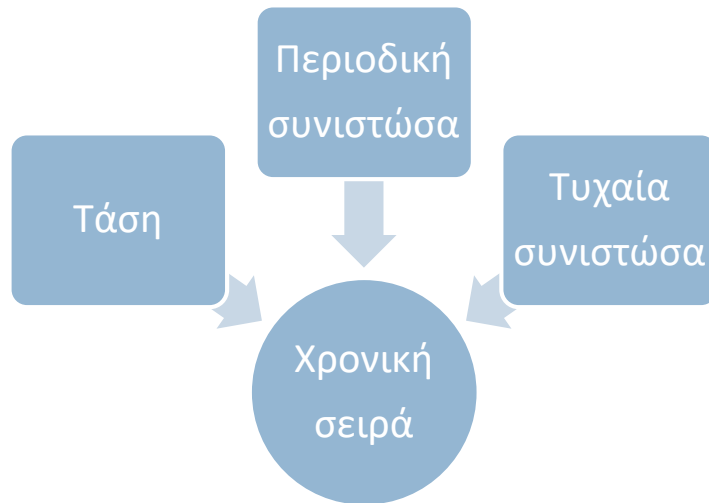
Σχ. 15.2: Χρονοσειρά με αυξητική τάση.

- «Κυκλικές κινήσεις», που ορίζουν μια ταλάντωση των τιμών της χρονοσειράς γύρω από μια ευθεία. Οι ταλαντώσεις μπορεί να είναι περιοδικές ή όχι, ως εκ τούτου δεν είναι δυνατόν χωρίς να ληφθεί υπόψη η φυσική σημασία τους να προκύψει το συμπέρασμα ότι ακολουθούν ή όχι κάποιο μοντέλο μέσα σε τακτά διαστήματα χρόνου (Σχήμα 15.3).

Δομή μιας χρονικής σειράς

15

- Το ουσιαστικό πρόβλημα κατά την επεξεργασία μιας χρονικής σειράς συνδέεται με τον τρόπο που οι τιμές της συναρτώνται με το χρόνο.



Χρονική σειρά που περιγράφει την ποιότητα του αέρα στο Λονδίνο

Στρατηγικές πρόβλεψης

16

- Προβλέψεις μελλοντικών τιμών μιας χρονικής σειράς

διαχωρισμός
(decomposition)
της σειράς

εξομάλυνση
(smoothing)
της σειράς

- Τόσο οι αποσυνθετικές όσο και οι διαδικασίες εξομάλυνσης είναι εμπειρικές και δεν έχουν κάποια θεωρητική δομή.



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της

17

- Μια μετρηθείσα χρονοσειρά μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα τριών συνιστωσών:

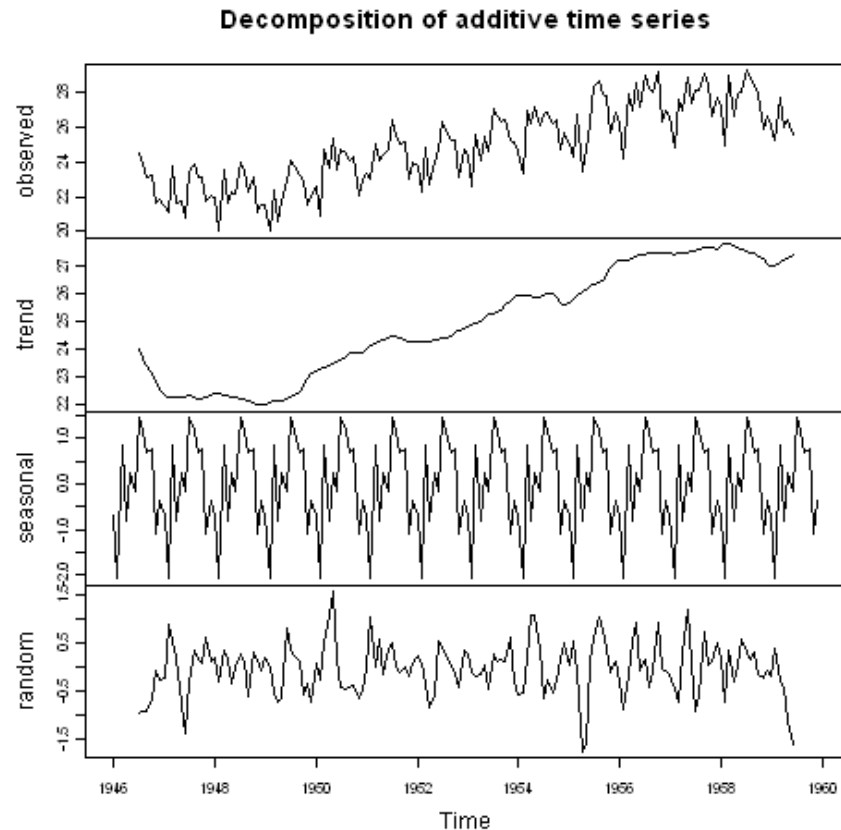
$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) + x_r(t)$$

όπου:

$x_t(t)$: τάση (trend)

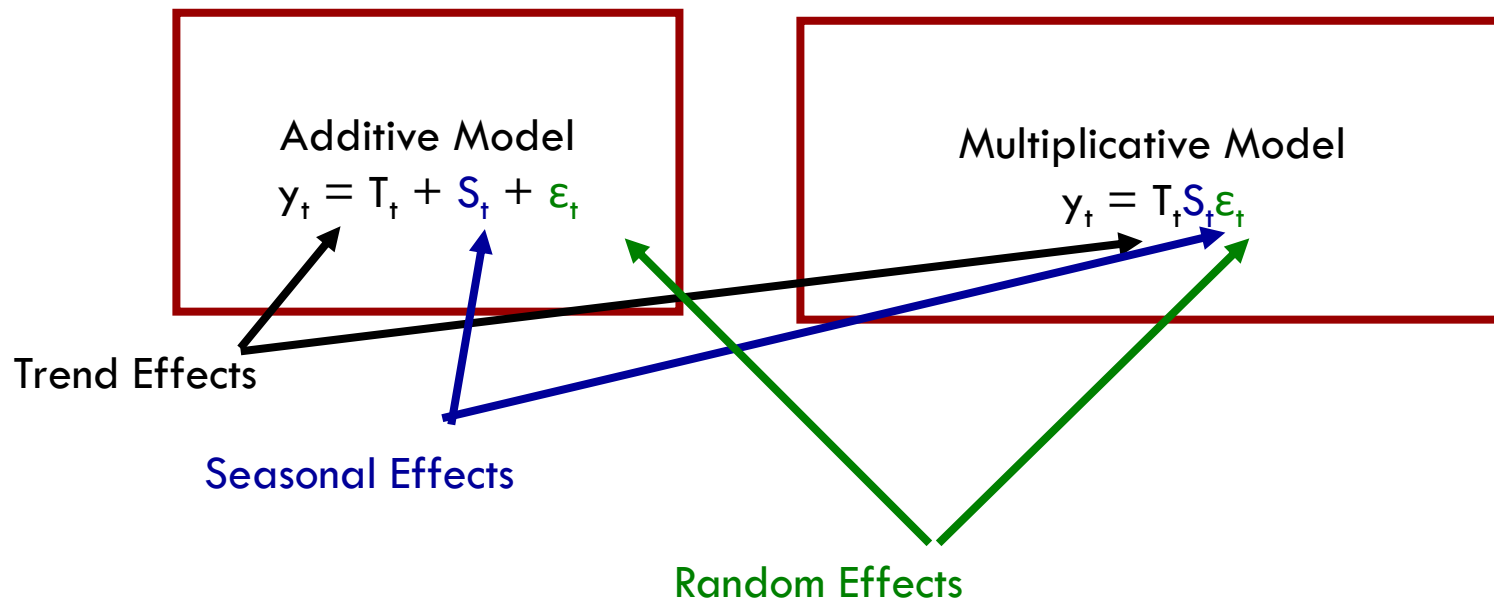
$x_p(t)$: περιοδική συνιστώσα

$x_r(t)$: τυχαία συνιστώσα



Types of Seasonal Models

Two possible models are:



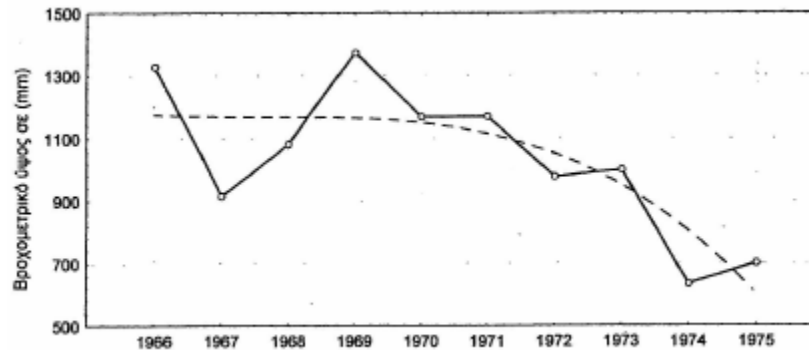
Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης

19

Αριθμητική Εφαρμογή 1:

Προσδιορισμός της τάσης (σε δεδομένα χωρίς εποχικότητα)

Έτη	Ύψος βροχής (mm)
1966	1329,0
1967	915,0
1968	1081,5
1969	1373,0
1970	1169,0
1971	1171,0
1972	977,0
1973	998,0
1974	634,0
1975	700,0



Σχ. 1. Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Χλόη

• Εφαρμογή πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης, θεωρώντας κάθε δύναμη του χρόνου ως μια ανεξάρτητη μεταβλητή

$$h_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

Γραμμική παλινδρόμηση

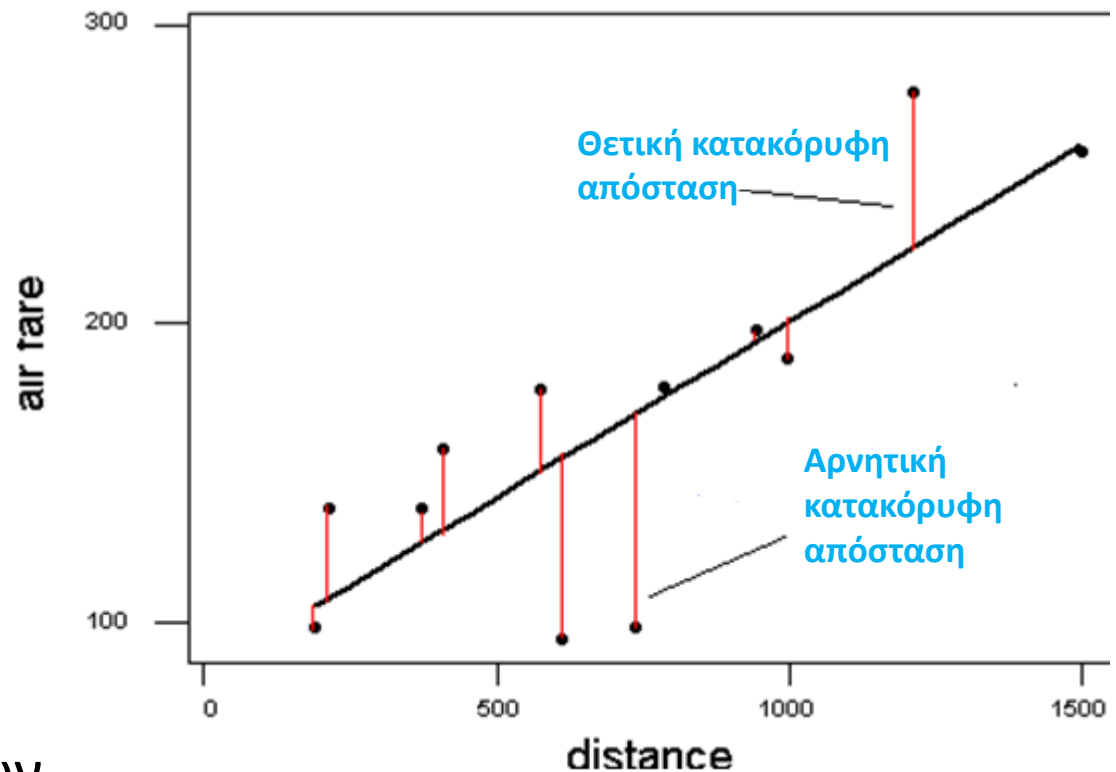
Βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς

Μητρική μορφή

Συμβατική γραμμική παλινδρόμηση

Επιλογή γραμμής παλινδρόμησης

- Σφάλμα κατακόρυφη απόσταση = $(Y - Y')$
 - ▣ Θετικό ή αρνητικό
- Γραμμή παλινδρόμησης,
$$Y' = \beta_0 + \beta_1 X$$
- Βέλτιστη γραμμική λύση όταν τα α και β ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων του σφάλματος $\sum (Y - Y')^2$



Ανάλυση ισχύος της ανάλυσης
με βάση τη στατιστική και
γενίκευση των αποτελεσμάτων

Βασική μέθοδος:
Βελτιστοποίηση χωρίς
περιορισμούς

$$\begin{aligned} \text{minimize } D &= \sum_{j=1}^m \varepsilon_j^2 = \\ & \hat{a}_0, \dots, \hat{a}_n \\ &= \sum_{j=1}^m (y_j - \hat{y}_j)^2 = \\ & \sum_{j=1}^m \left(y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1j} - \dots - \hat{\beta}_n x_{nj} \right)^2 \end{aligned}$$

Μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης (βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς) (1)

$$\text{Minimize } D = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$

$$= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ik})]^2$$

Ελαχιστοποίηση: η μερική παράγωγος του $\sum(Y - Y')^2$ ως προς β_0 και β_1 είναι μηδέν

1 μεταβλητή ανεξάρτητη

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0)^2] \right)}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial (y_i - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0)^2}{\partial \hat{\beta}_0} \right] = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial (y_i - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0)^2}{\partial (y_i - \beta x_i - \hat{\beta}_0)} \cdot \frac{\partial (y_i - \beta x_i - \hat{\beta}_0)}{\partial \hat{\beta}_0} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \left[2(y_i - \hat{\beta}_1 x_i - \hat{\beta}_0) \cdot (-1) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \square}{\partial x} = \frac{\partial \square}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

π.χ.

$$\frac{\partial \square^2}{\partial x} = \frac{\partial \square^2}{\partial \square} \frac{\partial \square}{\partial x} = 2\square \cdot \frac{\partial \square}{\partial x}$$

(βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Στο ακρότατο θα μηδενίζονται όλοι οι μερικοί παράγωγοι,

μεταβλητές: οι συντελεστές παλινδρόμησης
(2)

$$\left[\frac{\partial D}{\partial \beta_0} \right]_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \dots - \hat{\beta}_k x_{ik}) = 0$$

$$\left[\frac{\partial D}{\partial \beta_j} \right]_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik}) x_{ij} = 0,$$

Επομένως καταλήγω στο παρακάτω σύστημα

$$\begin{array}{r}
 n\hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n x_{i1}\hat{\beta}_1 + \sum_{i=1}^n x_{i2}\hat{\beta}_2 + \dots + \sum_{i=1}^n x_{ik}\hat{\beta}_k = \sum_{i=1}^n y_i \\
 \sum_{i=1}^n x_{i1}\hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n x_{i1}^2\hat{\beta}_1 + \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2}\hat{\beta}_2 + \dots + \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ik}\hat{\beta}_k = \sum_{i=1}^n y_i x_{i1} \\
 \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 \sum_{i=1}^n x_{ik}\hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i1}\hat{\beta}_1 + \sum_{i=1}^n x_{ik}x_{i2}\hat{\beta}_2 + \dots + \sum_{i=1}^n x_{ik}^2\hat{\beta}_k = \sum_{i=1}^n y_i x_{ik}
 \end{array}$$

Σε μητρική μορφή ορίζονται (4)

$$y = X\beta + \epsilon$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}$$

Επομένως καταλήγω στο παρακάτω σύστημα (Mays and Tung, 1992) (5)

$i, j = 1, 2, \dots, k$ και $j = 1, 2, \dots, k$.

In matrix form, the normal equations (6.3.12) can be expressed as

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (6.3.13)$$

in which T indicates the transpose of a matrix or a vector. Equation (6.3.13) can be solved for $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ to obtain the following mathematical expression of the ordinary least square regression coefficients,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (6.3.14)$$

in which $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)^T$. The $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ is a square symmetric $(k + 1) \times (k + 1)$ matrix whose inverse always exists if the independent variables are linearly independent; that is, no column of the \mathbf{X} matrix is a linear combination of the other columns.

ΤΕΛΟΣ

Μη γραμμική παλινδρόμηση

- Βοηθητικές μεταβλητές
- Μη χρήση στατιστικής
- Συντελεστής R^2
$$E' = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SS_e}{S_{yy}}$$
- Συντελεστής R^2 (προσαρμοσμένου)
- Πρόβλημα υπερ-εκπαίδευσης ή υποεκπαίδευσης

$$y_j = a_0 + a_1 x_j + \dots + a_n x_j^n$$

Ο συντελεστής αποδοτικότητας (ή προσδιορισμού) R^2 (Nash and Sutcliffe, 1970)

ορίζεται ως η αφαίρεση από τη μονάδα του αθροίσματος της διαφοράς των τετραγώνων μεταξύ των υπολογισμένων και των παρατηρούμενων δεδομένων προς τη διασπορά των παρατηρούμενων δεδομένων (Krause et al. 2005):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{SS_e}{S_{yy}}$$

Πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές X (πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση)

όπου

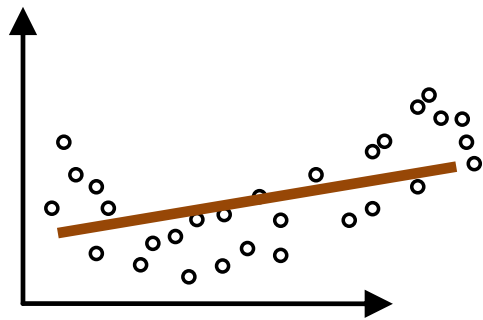
$$SS_e = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2$$

η ποσότητα που μετράει την έλλειψη προσαρμογής μεταξύ των υπολογισμένων και παρατηρούμενων παρατηρήσεων

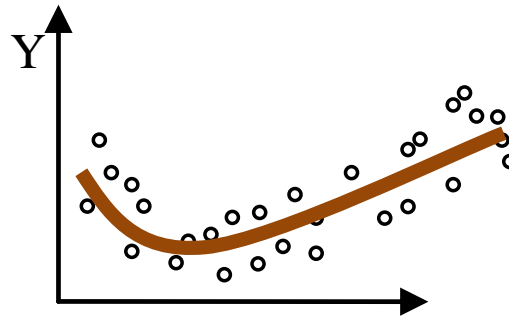
$$S_{yy} = \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

το ολικό άθροισμα των τετραγώνων της απόστασης της εξαρτημένης μεταβλητής από τη μέση τιμή της.

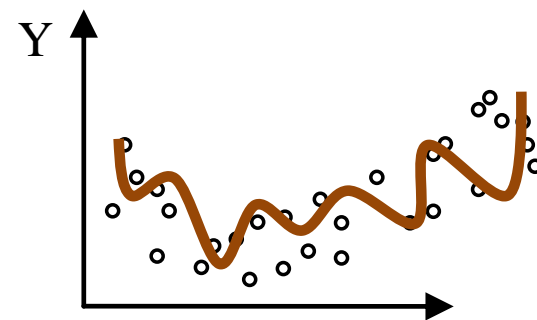
Ο αριθμητής του λόγου πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερος από τον παρανομαστή



(a) undertraining



(b) balanced approach



(c) overtraining

Figure 1: Fitting the best curve for polynomial regression

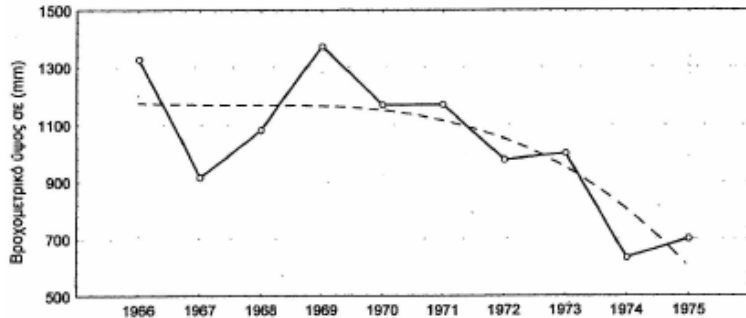
Από τον ορισμό του συντελεστή προσδιορισμού προκύπτει ότι η προσθήκη μιας επιπλέον ανεξάρτητης μεταβλητής οδηγεί **πάντοτε** στην αύξηση του ποσοστού της μεταβλητότητας της εξαρτημένης μεταβλητής που προσδιορίζεται από τις ανεξάρτητες, επομένως σε αύξηση του συντελεστή προσδιορισμού. Ωστόσο, κάθε επιπλέον ανεξάρτητη μεταβλητή μειώνει κατά έναν τους **βαθμούς ελευθερίας**²⁷. Συνεπώς θα πρέπει να αποτιμηθεί σε ποιο βαθμό η αύξηση της τιμής του συντελεστή προσδιορισμού είναι σημαντική ώστε να δικαιολογεί την απώλεια ενός βαθμού ελευθερίας. Η προσθήκη πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση της τιμής του R^2 που ωστόσο δεν θα έχει αξία διότι ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών θα είναι πολύ υψηλός σε σχέση με το μέγεθος του δείγματος. Για το λόγο αυτό πολύ συχνά χρησιμοποιείται ο **διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού** (adjusted coefficient of determination) \bar{R}^2 (adjusted R-Square) που λαμβάνει υπόψη του την απώλεια των βαθμών ελευθερίας και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SS_{res}/(n-1)}{SS_{tot}/(n-p-1)} = 1 - (1-R^2) \cdot \frac{n-1}{n-p-1} = R^2 - (1-R^2) \cdot \frac{p}{n-p-1} \quad (7.11)$$

όπου n το μέγεθος του **δείγματος**²⁸ και p ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης (συνέχεια)

33



Σχ.1. Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Χλόη

Έτη	Ύψος βροχής (mm)
1966	1329,0
1967	915,0
1968	1081,5
1969	1373,0
1970	1169,0
1971	1171,0
1972	977,0
1973	998,0
1974	634,0
1975	700,0

Μεθοδολογικό σχόλιο

$$h_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$X = \begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10^0 & 10^1 & 10^2 & 10^3 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 1329 \\ 915 \\ \vdots \\ 700 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'h = \begin{bmatrix} 1196,2 \\ -29,9 \\ 11,2 \\ -1,4 \end{bmatrix}$$

Αντί 1966-1967 θέτω 1, 2 κλπ έτη



Ανάλυση τάσης

- Χρήση γραμμικού μοντέλου
- Χρήση μη γραμμικού μοντέλου (με λίγο λάθος με ίδια μαθηματικά, βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς, τις μεταβλητές t^2, t^3) τις βλέπω ως επιπρόσθετες μεταβλητές για την εξαγωγή των συντελεστών
- Δυνατότητα εισαγωγής ψευδομεταβλητών, που λειτουργούν ως διακόπτες

Μεθοδολογικό σχόλιο

35

Οι πωλυωνιμικοί όροι για τη μητρική επίλυση με λίγο λάθος μπορούν να ειδωθούν ως νέες ανεξάρτητες μεταβλητές

$$h_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$X = \begin{bmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10^0 & 10^1 & 10^2 & 10^3 \end{bmatrix}$$

Έτη	Ύψος βροχής (mm)
1966	1329,0
1967	915,0
1968	1081,5
1969	1373,0
1970	1169,0
1971	1171,0
1972	977,0
1973	998,0
1974	634,0
1975	700,0

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'h = \begin{bmatrix} 1196,2 \\ -29,9 \\ 11,2 \\ -1,4 \end{bmatrix}$$



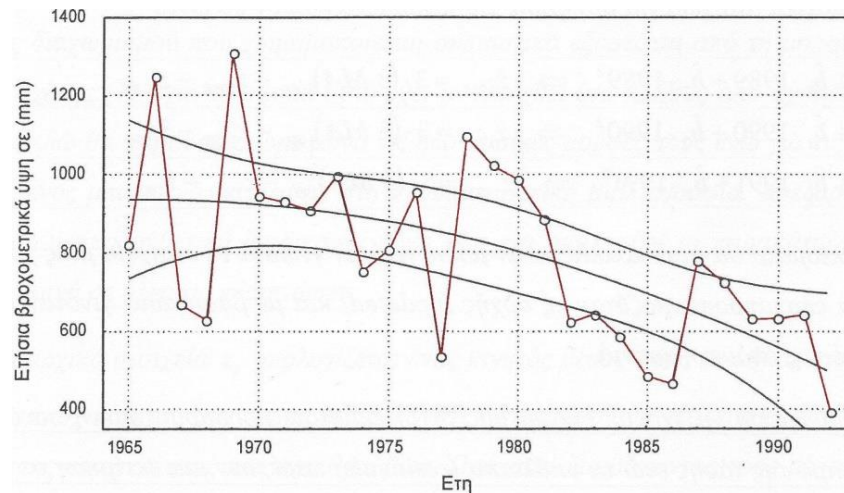
Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης (συνέχεια)

36

Αριθμητική Εφαρμογή 2:

Προσδιορισμός της τάσης με εξομάλυνση

✓ Απλούστερος τρόπος: η μέθοδος του κινητού μέσου όρου



Σχ.4. Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Ξάνθης

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης (συνέχεια)

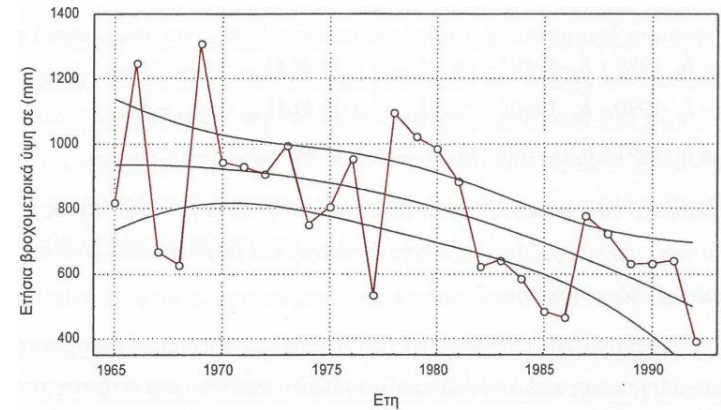
Η μέθοδος του κινητού μέσου όρου

Πίνακας 2: Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Ξάνθη σε (mm)

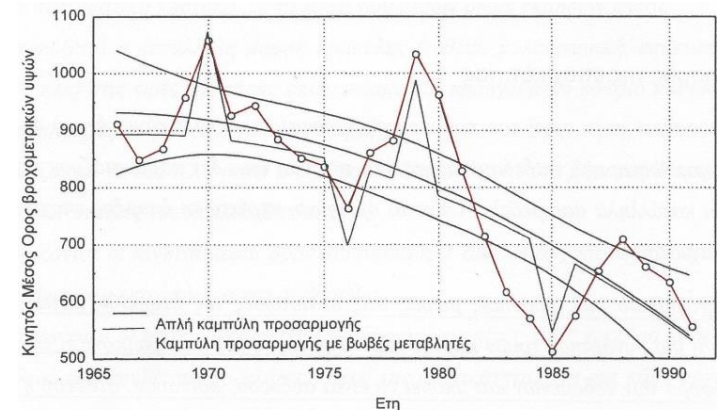
ΕΤΗ	ΞΑΝΘΗ	3 ΜΑ	ΕΤΗ	ΞΑΝΘΗ	3 ΜΑ	ΕΤΗ	ΞΑΝΘΗ	3 ΜΑ
1965	821,0		1973	996,2	885,2	1981	882,1	829,4
1966	1248,8	912,3	1974	751,2	851,9	1982	620,1	714,8
1967	667,1	847,8	1975	808,2	837,2	1983	642,1	616,3
1968	627,5	867,1	1976	952,2	764,3	1984	586,6	571,1
1969	1306,8	959,5	1977	532,5	860,1	1985	484,6	511,9
1970	944,2	1059,8	1978	1095,6	883,0	1986	464,5	576,0
1971	928,3	926,9	1979	1020,9	1034,2	1987	778,9	654,8
1972	908,2	944,2	1980	986,0	963,0	1988	720,9	709,6
						1989	629,0	

$$(3MA)_t = b_0 + b_1t + b_2t^2$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2289320 \\ 2330,9 \\ -0,59306 \end{bmatrix} \Rightarrow R^2 = 0,63$$



Σχ.4. Ετήσια βροχομετρικά ύψη σταθμού Ξάνθης



Σχ.5. Καμπύλες προσαρμογής



Ψευδομεταβλητές

- Ευκολία στην επίλυση
- Χάνεται η γραμμικότητα
- Μεταβλητές διακόπτες 0/1
- Σε χρονιές με έντονη ξηρασία ή βροχοπτώσεις
- Σε άλλες επιστήμες π.χ. διάκριση αστικού-αγροτικού χώρου, διάκριση ηλικίας κλ.π.

$$v_{1t} = \begin{cases} 1, & t = 1970, 1979 \\ 0, & \forall t \neq 1970, 1979 \end{cases}$$

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης (συνέχεια)

39

Εισαγωγή βωβών μεταβλητών (ή
ψευδομεταβλητών) (dummy variables)

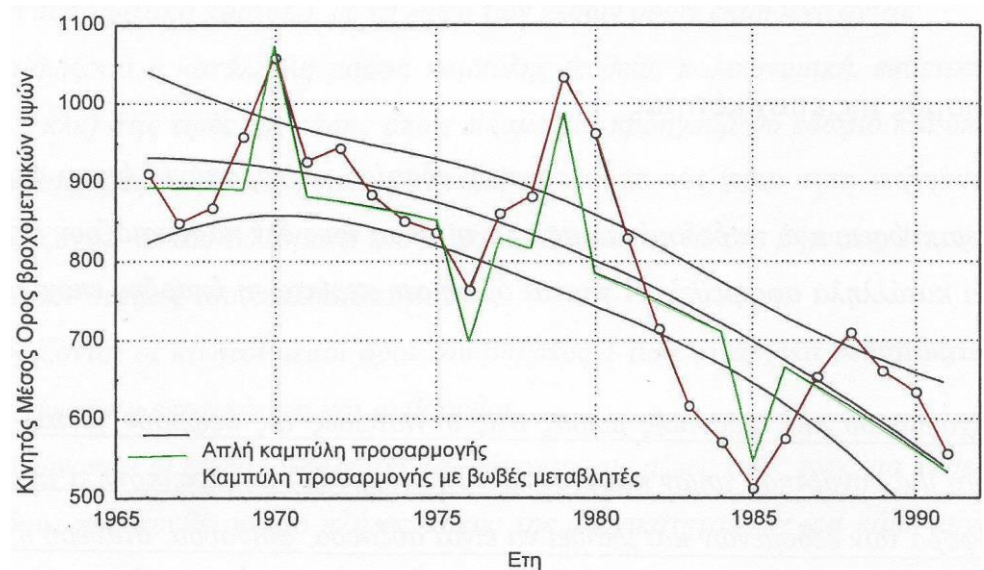
$$(3MA)_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 V1_t + b_4 V2_t$$

$$V1_t = \begin{cases} 1, & t = 1970, 1979 \\ 0, & \forall t \neq 1970, 1979 \end{cases}$$

$$V2_t = \begin{cases} 1, & t = 1976, 1985 \\ 0, & \forall t \neq 1976, 1985 \end{cases}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2392164 \\ 2433,4 \\ -0,61862 \\ 186,779 \\ -142,902 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad R^2 = 0,81$$

✓ Οι τιμές των b_0, b_1, b_2 είναι παρόμοιες για τις 2 περιπτώσεις



Σχ.5. Καμπύλες προσαρμογής



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της τάσης (συνέχεια)

40

- Μελλοντικές προβλέψεις με βάση τη μέθοδο του κινητού μέσου όρου και παλινδρόμηση

ΕΤΗ	ΣΑΝΘΗ	Προβλέψεις	
		mod1	mod2
1990	631,5	194,8	276,6
1991	640,7	590,6	602,9
1992	393,6	492,1	504,9
$mod1: (3 MA)_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$			
$mod2: (3 MA)_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 V1_t + b_4 V2_t$			

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας

41

Οι μέθοδοι διαχωρισμού μιας χρονικής σειράς στις συνιστώσες της θεωρούν γενικά ότι τα στοιχεία της είναι μια συνάρτηση 3 παραγόντων.

- Της τάσης (T) που απεικονίζει τη μακροχρόνια συμπεριφορά των δεδομένων
- Της εποχικότητας (E) που συνδέεται με τις περιοδικές διακυμάνσεις σταθερού μήκους.
- Της κυκλικότητας (K) που αντιστοιχεί στις ανόδους και πτώσεις των τιμών που συμβαίνουν σε μεγάλες και μάλλον ακανόνιστες χρονικές περιόδους.

$$z_t = f(T, E, K) + e_t$$

όπου e_t = οι λευκοί θόρυβοι



Πιο γενικά (εκτός εφαρμογής)

Η ανάλυση μιας χρονοσειράς συνίσταται στον ορισμό μιας μαθηματικής έκφρασης που να περιλαμβάνει όλες τις επί μέρους συνιστώσες της κίνησης των τιμών της χρονοσειράς. Θα μπορούσε π.χ. να ορισθεί σαν το γινόμενο:

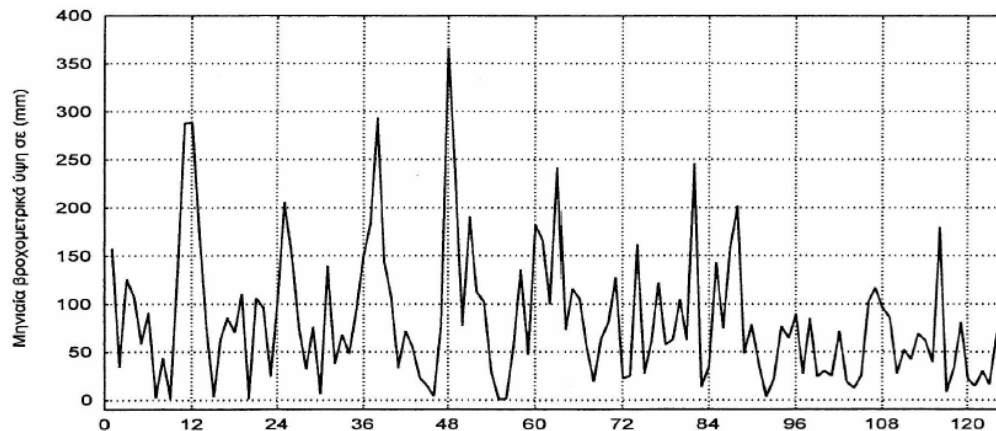
$$X = [\text{Τάση}] \cdot [\text{Κυκλική κίνηση}] \cdot [\text{Περιοδική κίνηση}] \cdot [\text{Τυχαίες κινήσεις}]$$

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

43

Αριθμητική Εφαρμογή 3:

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της



Σχ.6. Μηνιαία βροχομετρικά ύψη στο σταθμό Χλόη

$$f(T, E, K) \equiv T_t \cdot E_t \cdot K_t \Rightarrow z_t = T_t \cdot E_t \cdot K_t \cdot e_t$$

- ✓ Η μορφή αυτή προτιμάται όταν η εποχική αυξομείωση (fluctuation) εξαρτάται από τη μέση στάθμη της σειράς. Διαφορετικά, η μορφή της συνάρτησης (f) είναι προσθετική.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

Η αποσυνθετική διαδικασία

1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

45

1^ο βήμα

- Επειδή τα δεδομένα είναι μηνιαία το μήκος της εποχικότητας είναι ίσο με 12.

$$(12MA)_1 = \frac{158 + 34 + \dots + 289}{12} = 110,8$$

$$(12MA)_2 = \frac{34 + 126 + \dots + 173}{12} = 112,1$$

$$(2 \times 12MA)_1 = \frac{110,8 + 112,1}{2} = 111,5$$

	Δεδομένα		Τάση	
	ΧΛΟΗ	12 ΜΑ	2x12 ΜΑ	T _t
Ιαν-66	158,0			
Φεβ-66	34,0			
Μαρ-66	126,0			
Απρ-66	107,0			
Μαΐ-66	58,0			
Ιουν-66	91,0			
Ιουλ-66	2,0	110,8	111,5	97,9
Αυγ-66	44,0	112,1	113,8	98,2
Σεπ-66	1,0	115,6	110,5	98,5
Οκτ-66	132,0	105,3	103,5	98,8
Νοε-66	288,0	101,7	102,8	99,1
Δεκ-66	289,0	104,0	103,1	99,3
Ιαν-67	173,0	102,3	106,8	99,6
Φεβ-67	76,0	111,3	109,5	99,8
Μαρ-67	3,0	107,8	112,1	100,0
Απρ-67	63,0	116,5	115,0	100,2
Μαΐ-67	86,0	113,5	102,5	100,4
Ιουν-67	70,0	91,5	83,9	100,5
Ιουλ-67	111,0	76,3	77,7	100,7
Αυγ-67	1,0	79,1	82,2	100,8
Σεπ-67	106,0	85,3	88,3	101,0
Οκτ-67	96,0	91,3	90,0	101,1
Νοε-67	24,0	88,8	88,3	101,2
Δεκ-67	107,0	87,9	85,3	101,3
Ιαν-68	206,0	82,6	83,8	101,3
Φεβ-68	151,0	85,0	86,5	101,4



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

Η αποσυνθετική διαδικασία

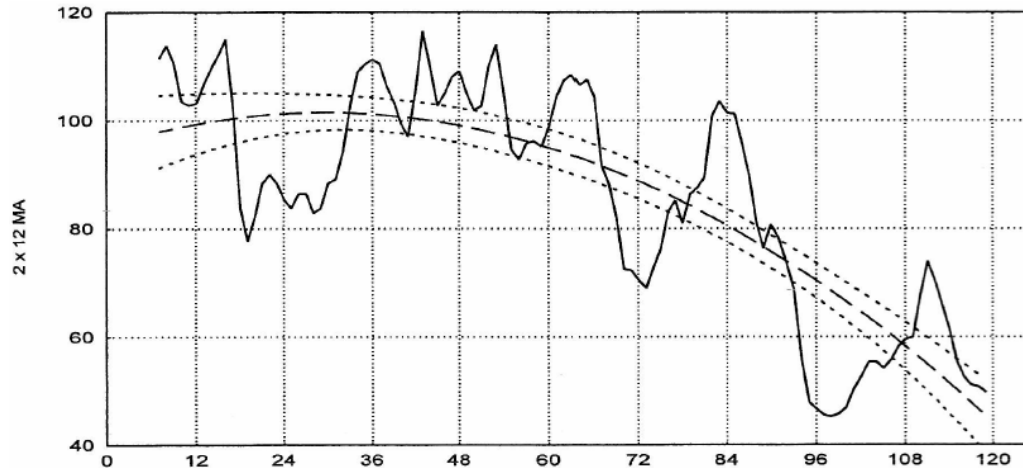
1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

47

2^ο βήμα

- ✓ Οι τιμές που προκύπτουν από το βήμα 1 είναι απαλλαγμένες από την εποχικότητα, κάτι που φαίνεται από το Σχ. 7, και αποτελούν τις εκτιμήσεις των συνιστωσών της τάσης και της κυκλικότητας.



Σχήμα 7

- ✓ Για να απομονωθεί η τάση προσαρμόζεται μια καμπύλη, η οποία μετά από δοκιμές προκύπτει ότι είναι 2^{ου} βαθμού (σύμφωνα με την αρχή οικονομικότητας).

$$(2 \times 12MA)_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

Η αποσυνθετική διαδικασία

1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

49

3^ο βήμα

- ✓ Η βέλτιστη εξίσωση παλινδρόμησης που προέκυψε είναι:

$$T_t = 95,34 + 0,4154 t - 0,00703 t^2$$

	Δεδομένα		Τάση		
	ΧΛΟΗ		12 ΜΑ	2x12 ΜΑ	T _t
Ιαν-66	158,0				
Φεβ-66	34,0				
Μαρ-66	126,0				
Απρ-66	107,0				
Μαΐ-66	58,0				
Ιουν-66	91,0				
Ιουλ-66	2,0	110,8	111,5	97,9	
Αυγ-66	44,0	112,1	113,8	98,2	
Σεπ-66	1,0	115,6	110,5	98,5	
Οκτ-66	132,0	105,3	103,5	98,8	
Νοε-66	288,0	101,7	102,8	99,1	
Δεκ-66	289,0	104,0	103,1	99,3	
Ιαν-67	173,0	102,3	106,8	99,6	
Φεβ-67	76,0	111,3	109,5	99,8	
Μαρ-67	3,0	107,8	112,1	100,0	
Απρ-67	63,0	116,5	115,0	100,2	
Μαΐ-67	86,0	113,5	102,5	100,4	
Ιουν-67	70,0	91,5	83,9	100,5	
Ιουλ-67	111,0	76,3	77,7	100,7	
Αυγ-67	1,0	79,1	82,2	100,8	
Σεπ-67	106,0	85,3	88,3	101,0	
Οκτ-67	96,0	91,3	90,0	101,1	
Νοε-67	24,0	88,8	88,3	101,2	
Δεκ-67	107,0	87,9	85,3	101,3	
Ιαν-68	206,0	82,6	83,8	101,3	
Φεβ-68	151,0	85,0	86,5	101,4	



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

50

Η αποσυνθετική διαδικασία

1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

51

4^ο βήμα

- ✓ Για τον διαχωρισμό της εποχικότητας διαιρούνται οι αρχικές τιμές με τις αντίστοιχες της στήλης **(2x12 MA)**



Τα στοιχεία που προκύπτουν αποτελούν της εκτιμήσεις της εποχικότητας και των θορύβων που υπεισέρχονται στα αρχικά δεδομένα.

Δεδομένα	Τάση			Εποχικότητα		
	ΧΛΟΗ	12 MA	2x12 MA	T _t	E _t x e _t	E _t
Ιαν-66	158,0					
Φεβ-66	34,0					
Μαρ-66	126,0					
Απρ-66	107,0					
Μαϊ-66	58,0					
Ιουν-66	91,0					
Ιουλ-66	2,0	110,8	111,5	97,9	0,0	0,7
Αυγ-66	44,0	112,1	113,8	98,2	0,4	0,3
Σεπ-66	1,0	115,6	110,5	98,5	0,0	0,5
Οκτ-66	132,0	105,3	103,5	98,8	1,3	1,2
Νοε-66	288,0	101,7	102,8	99,1	2,8	1,3
Δεκ-66	289,0	104,0	103,1	99,3	2,8	1,5
Ιαν-67	173,0	102,3	106,8	99,6	1,6	1,6
Φεβ-67	76,0	111,3	109,5	99,8	0,7	1,4
Μαρ-67	3,0	107,8	112,1	100,0	0,0	1,1
Απρ-67	63,0	116,5	115,0	100,2	0,5	0,7
Μαϊ-67	86,0	113,5	102,5	100,4	0,8	0,9
Ιουν-67	70,0	91,5	83,9	100,5	0,8	0,8
Ιουλ-67	111,0	76,3	77,7	100,7	1,4	0,7
Αυγ-67	1,0	79,1	82,2	100,8	0,0	0,3
Σεπ-67	106,0	85,3	88,3	101,0	1,2	0,5
Οκτ-67	96,0	91,3	90,0	101,1	1,1	1,2
Νοε-67	24,0	88,8	88,3	101,2	0,3	1,3
Δεκ-67	107,0	87,9	85,3	101,3	1,3	1,5
Ιαν-68	206,0	82,6	83,8	101,3	2,5	1,6
Φεβ-68	151,0	85,0	86,5	101,4	1,7	1,4

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

Η αποσυνθετική διαδικασία

1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

53

5^ο βήμα

- ✓ Για την εκτίμηση των εποχικών τελεστών κατασκευάζεται ο Πίνακας 5, όπου για τον αντίστοιχο μήνα του κάθε έτους τοποθετούνται οι τιμές του βήματος 4 και υπολογίζονται οι εξομαλυμένες μέσες τιμές τους, οι οποίες ανάγονται στις αντίστοιχες τιμές που έχουν άθροισμα την εποχικότητα (δηλαδή 12).

Πίνακας 5: Εποχικοί τελεστές σειράς Χλόη

	Ιαν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μια	Ιουν	Ιουλ	Αυγ	Σεπ	Οκτ	Νοεμ	Δεκ
1966						0,0	0,4	0,0	1,3	2,8	2,8	
1967	1,6	0,7	0,0	0,5	0,8	0,8	1,4	0,0	1,2	1,1	0,3	1,3
1968	2,5	1,7	0,9	0,4	0,9	0,1	1,6	0,4	0,7	0,4	0,8	1,3
1969	1,7	2,8	1,4	1,1	0,3	0,7	0,5	0,2	0,1	0,0	0,7	3,4
1970	2,2	0,8	1,9	1,0	0,9	0,3	0,0	0,0	0,6	1,4	0,5	1,9
1971	1,6	0,9	2,2	0,7	1,1	1,0	0,6	0,2	0,8	1,1	1,8	0,3
1972	0,4	2,2	0,4	0,7	1,4	0,7	0,7	1,2	0,7	2,4	0,1	0,3
1973	1,4	0,8	1,8	2,5	0,6	1,0	0,5	0,0	0,3	1,4	1,3	1,9
1974	0,6	1,9	0,5	0,6	0,5	1,4	0,3	0,2	0,5	1,8	2,0	1,6
1975	1,4	0,4	0,7	0,6	1,0	1,0	0,7	3,4	0,2	0,6	1,6	
Μ.Ο.	1,6	1,4	1,1	0,7	0,9	0,8	0,7	0,3	0,5	1,2	1,3	1,5

κανονικοποιημέ
vo

Δεδομένα	Τάση			Εποχικότητα		
	ΧΛΟΗ	12 ΜΑ	2x12 ΜΑ	T _t	E _t x e _t	E _t
Ιαν-66	158,0					
Φεβ-66	34,0					
Μαρ-66	126,0					
Απρ-66	107,0					
Μαϊ-66	58,0					
Ιουν-66	91,0					
Ιουλ-66	2,0	110,8	111,5	97,9	0,0	0,7
Αυγ-66	44,0	112,1	113,8	98,2	0,4	0,3
Σεπ-66	1,0	115,6	110,5	98,5	0,0	0,5
Οκτ-66	132,0	105,3	103,5	98,8	1,3	1,2
Νοε-66	288,0	101,7	102,8	99,1	2,8	1,3
Δεκ-66	289,0	104,0	103,1	99,3	2,8	1,5
Ιαν-67	173,0	102,3	106,8	99,6	1,6	1,6
Φεβ-67	76,0	111,3	109,5	99,8	0,7	1,4
Μαρ-67	3,0	107,8	112,1	100,0	0,0	1,1
Απρ-67	63,0	116,5	115,0	100,2	0,5	0,7
Μαϊ-67	86,0	113,5	102,5	100,4	0,8	0,9
Ιουν-67	70,0	91,5	83,9	100,5	0,8	0,8
Ιουλ-67	111,0	76,3	77,7	100,7	1,4	0,7
Αυγ-67	1,0	79,1	82,2	100,8	0,0	0,3
Σεπ-67	106,0	85,3	88,3	101,0	1,2	0,5
Οκτ-67	96,0	91,3	90,0	101,1	1,1	1,2
Νοε-67	24,0	88,8	88,3	101,2	0,3	1,3
Δεκ-67	107,0	87,9	85,3	101,3	1,3	1,5
Ιαν-68	206,0	82,6	83,8	101,3	2,5	1,6
Φεβ-68	151,0	85,0	86,5	101,4	1,7	1,4

- ✓ Τα αποτελέσματα δείχνουν καθαρά την υπεροχή των χειμερινών μηνών έναντι των θερινών



Εναλλακτικά...

- Αντί του μέσου όρου στον πίνακα 5 για τον προσδιορισμό της εποχικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διάμεσος
 - Διάμεσος (median): η τιμή που χωρίζει ένα σύνολο δεδομένων στη μέση όταν τοποθετηθούν σε αύξουσα σειρά η τιμή για την οποία το 50% των μετρήσεων είναι μικρότερες και το 50% μεγαλύτερες από αυτή
 - Δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη ακραίων τιμών

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

55

Η αποσυνθετική διαδικασία

1. Από τα αρχικά στοιχεία z_t υπολογίζεται ένας κινητός μέσος όρος σε μήκος ίσο προς το μήκος της εποχικότητας της σειράς (π.χ. 12 για μηνιαίες τιμές) για την εξάλειψη της εποχικότητας και των θορύβων.
2. Προσαρμόζεται η κατάλληλη μορφή καμπύλης στις τιμές της τάσης.
3. Διαχωρίζονται τα αποτελέσματα του βήματος 2 από εκείνα του βήματος 1 προκειμένου να προκύψουν οι τιμές του κυκλικού τελεστή.
4. Διαχωρίζονται οι κινητοί μέσοι όροι του βήματος 1 από τα αρχικά δεδομένα προκειμένου να προκύψουν η εποχικότητα και οι θόρυβοι.
5. Απομονώνονται οι εποχικοί τελεστές λαμβάνοντας τις μέσες τιμές τους για κάθε μια από τις περιόδους που συνθέτουν το πλήρες μήκος της εποχικότητας.
6. Διαχωρίζοντας από τα αρχικά στοιχεία τα αποτελέσματα της τάσης, της κυκλικότητας και της εποχικότητας που προέκυψαν, απομένουν οι θόρυβοι.



Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Προσδιορισμός της εποχικότητας (συνέχεια)

56

6^ο βήμα

- ✓ Διαιρώντας τις αρχικές τιμές της στήλης (ΧΛΟΗ) με το γινόμενο των τιμών της τάσης και της εποχικότητας (T_t και E_t) προκύπτουν οι εκτιμήσεις των τιμών του θορύβου (e_t).

Πίνακας 4: Μηνιαία βροχομετρικά ύψη σταθμού Χλόης (1966 - 1975)

	Δεδομένα ΧΛΟΗ	Τάση			Εποχικότητα		Σφάλματα
		12 ΜΑ	2x12 ΜΑ	T_t	$E_t \times e_t$	E_t	e_t
Ιαν-66	158,0						
Φεβ-66	34,0						
Μαρ-66	126,0						
Απρ-66	107,0						
Μαΐ-66	58,0						
Ιουν-66	91,0						
Ιουλ-66	2,0	110,8	111,5	97,9	0,0	0,7	0,0
Αυγ-66	44,0	112,1	113,8	98,2	0,4	0,3	1,4
Σεπ-66	1,0	115,6	110,5	98,5	0,0	0,5	0,0
Οκτ-66	132,0	105,3	103,5	98,8	1,3	1,2	1,1
Νοε-66	288,0	101,7	102,8	99,1	2,8	1,3	2,3
Δεκ-66	289,0	104,0	103,1	99,3	2,8	1,5	1,9
Ιαν-67	173,0	102,3	106,8	99,6	1,6	1,6	1,1
Φεβ-67	76,0	111,3	109,5	99,8	0,7	1,4	0,5
Μαρ-67	3,0	107,8	112,1	100,0	0,0	1,1	0,0
Απρ-67	63,0	116,5	115,0	100,2	0,5	0,7	0,8
Μαΐ-67	86,0	113,5	102,5	100,4	0,8	0,9	1,0
Ιουν-67	70,0	91,5	83,9	100,5	0,8	0,8	0,9
Ιουλ-67	111,0	76,3	77,7	100,7	1,4	0,7	1,7
Αυγ-67	1,0	79,1	82,2	100,8	0,0	0,3	0,0
Σεπ-67	106,0	85,3	88,3	101,0	1,2	0,5	2,0
Οκτ-67	96,0	91,3	90,0	101,1	1,1	1,2	0,8
Νοε-67	24,0	88,8	88,3	101,2	0,3	1,3	0,2
Δεκ-67	107,0	87,9	85,3	101,3	1,3	1,5	0,7
Ιαν-68	206,0	82,6	83,8	101,3	2,5	1,6	1,3
Φεβ-68	151,0	85,0	86,5	101,4	1,7	1,4	1,1

Διαχωρισμός χρονικής σειράς στις συνιστώσες της: Εκτίμηση μελλοντικών τιμών

57

- Τα στοιχεία που προέκυψαν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εκτίμηση των μελλοντικών τιμών της σειράς, π.χ. η εκτίμηση της τιμής του Ιανουαρίου 1976:

$$E_{IAN} = 1,6 \quad K_{IAN,76} = 1 \quad e_{IAN,76} = 1$$

$$T_{IAN,76} = 95,34 + 0,4154 \cdot 121 - 0,00703 \cdot 121^2 = 42,71$$

$$\hat{Z}_{IAN,76} = T_{IAN,76} \cdot E_{IAN} \cdot K_{IAN,76} \cdot e_{IAN,76} = 42,71 \cdot 1,6 \cdot 1 \cdot 1 = 66,4$$

Πίνακας 6: Προβλέψεις χρονικής σειράς Χλόη

Χρόνος	ΧΛΟΗ	Προβλ. Τάση	Κατωτ. Όριο προβλ. Τάσης	Ανωτ. Όριο προβλ. Τάσης	Εποχ. Σ/τες	Προβλ. Τιμή	Κατωτ. Όριο προβλ. Τιμής	Ανωτ. Όριο προβλ. Τιμής
Ιαν-76	14	43	17	68	1,6	66	27	106
Φεβ-76	30	41	16	67	1,4	59	23	94
Μαρ-76	16	40	15	66	1,1	45	17	74
Απρ-76	69	39	13	64	0,7	29	10	48
Μαϊ-76	17	37	12	63	0,9	33	10	56

Στις προβλέψεις σε αυτά τα προβλήματα δε λαμβάνω υπόψη το λευκό θόρυβο (μη κανονικότητα) και θέτω $e = 1$



Αξιολόγηση της μεθόδου επέκτασης των καμπύλων τάσης

58

- + Η μέθοδος είναι απλή και ενδείκνυται για μακροχρόνιες προβλέψεις όπου δεν συμφέρει να προσαρμοστεί στα στοιχεία ένα πολύπλοκο μοντέλο, καθώς είναι πιθανό στο μέλλον να αλλάξει.
- Συχνά δεν υπάρχει κάποια λογική βάση στην επιλογή μιας συγκεκριμένης μορφής καμπύλης προσαρμογής στα στοιχεία και το μόνο κριτήριο είναι εκείνο της καλύτερης προσαρμογής.



- Μπορεί διάφορες καμπύλες να προσαρμόζονται περίπου το ίδιο καλά στα στοιχεία, η επέκτασή τους όμως στο μέλλον να παρέχει εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα.

Εκθετική εξομάλυνση

59

- Η μέθοδος αυτή προτάθηκε για την πρόβλεψη χρονικών σειρών αρχικά από τον Holt (1957) και από τον Winters (1960) για χρονικές σειρές που δεν έχουν περιοδικότητα ή έχει αφαιρεθεί κατάλληλα.
- Ενώ με την μέθοδο του κινητού μέσου όρου οι παρελθοντικές παρατηρήσεις είχαν τα ίδια βάρη, στην εκθετική εξομάλυνση αποδίδονται μεγαλύτερα βάρη στις πρόσφατες παρατηρήσεις.

Holt, Charles C. (1957). "Forecasting Trends and Seasonal by Exponentially Weighted Averages". *Office of Naval Research Memorandum* **52**. reprinted in Holt, Charles C. (January–March 2004). "Forecasting Trends and Seasonal by Exponentially Weighted Averages". *International Journal of Forecasting* **20** (1): 5–10.

Winters, P. R. (April 1960). "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages". *Management Science* **6** (3): 324–342.



Εκθετική εξομάλυνση (συνέχεια)

60

- Αν θεωρηθεί η στατική (stationary) χρονική σειρά

$$Z_{n+1} = W_0 Z_n + W_1 Z_{n-1} + W_2 Z_{n-2} + \dots$$

όπου w_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) είναι τα βάρη, θα αποδίδεται περισσότερο βάρος στις πρόσφατες παρατηρήσεις και λιγότερο στις παλαιότερες.

- Από την άποψη αυτή τα βάρη μπορούν να θεωρηθούν ως όροι μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

$$w_j = \alpha(1 - \alpha)^j$$

όπου α είναι μια σταθερά $0 < \alpha < 1$ (συνήθως $0,1 - 0,3$)

