**Άσκηση Δεξαμενών**

**Στο παρακάτω σύστημα σωληνώσεων και δεξαμενών ζητείται:**

**α) το ύψος ενέργειας στη θέση Κ**

**β) οι παροχές των αγωγών**

**γ) να γίνει απλό σκαρίφημα της γραμμής ενέργειας για κάθε αγωγό**

**Θεωρείστε αμελητέες τις τοπικές απώλειες ενέργειας (συμπεριλαμβάνονται στην ισοδύναμη τραχύτητα k). Επίσης θεωρείστε ότι στο σύστημα των αγωγών υπό πίεση και με βάση το εύρος της ταχύτητας, ότι η πιεζομετρική γραμμή ταυτίζεται με τη γραμμή ενέργειας ( κινητικό ύψος ενέργειας αμελητέο). Δίνεται ισοδύναμη τραχύτητα k = 1mm και κινηματική συνεκτικότητα του νερού v = 10-6 m2/sec**

180 **m**

**A**

?

 130 m 100 m C

 κ

 B 85 m D

**Οι στάθμες των ελευθέρων επιφανειών του νερού στις δεξαμενές θεωρούνται σταθερές και δίνονται στο σχήμα. Τα χαρακτηριστικά των αγωγών δίνονται στο παρακάτω Πίνακα.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Aγωγός** | **Μήκος (m)** | **(Εσωτερική) Διάμετρος (mm)** |
| **AΚ** | **10000** | **450** |
| **BΚ** | **6000** | **250** |
| **CΚ** | **3300** | **250** |
| **DΚ** | **3220** | **350** |

**Λύση**

**(σε αυτά τα πρακτικά προβλήματα κλειστών αγωγών υπό πίεση σε ύδρευση και εγγειοβελτιωτικά έργα θεωρούμε το ύψος κινητικής ενέργειας αμελητέο, επομένως γραμμή ενέργειας και ΠΓ ταυτίζονται. Επιπλέον οι τοπικές απώλειες υπολογίζονται έμμεσα με τη προσαύξηση τα ισοδύναμης τραχύτητάς και επομένως, με την προσαύξηση των γραμμικών απωλειών ενέργειας)>**

**Έστω ο κόμβος Κ έχει ενέργεια J = 120 m (υπόθεση) .** Άρα η κίνηση του νερού θα γίνει από τη δεξαμενή Α προς τον κόμβο Κ (ZA >JK), από τη δεξαμενή Β προς το κόμβο Κ ( ZB>JK), από το κόμβο K προς τη δεξαμενή C (JK>ZC) και από το κόμβο Κ προς τη δεξαμενή D (JK>ZD).

Ορίζω ότι οι παροχές, άρα και οι ταχύτητες **που εισέρχονται** του κόμβου θα έχουν θετικό πρόσημο. Αντίθετα οι παροχές, άρα και οι ταχύτητες που εξέρχονται του κόμβου θα έχουν αρνητικό πρόσημο.

Βρίσκω τις ταχύτητες με τον εξής τύπο

$$v=-sign(z-J)∙2∙\sqrt{\frac{2g\left|z-J\right|D}{L}}log⁡(\frac{k}{3.7D} +\frac{2.51ν}{D}\sqrt{\frac{L}{2g\left|z-J\right|D}})$$

Αν z – J> 0 τότε sign (z –J) =1

Αν z – J < 0 τότε sign (z – J) = -1

$$V\_{AK}=-sign(z\_{A}-J\_{o})∙2∙\sqrt{\frac{2g\left|z\_{A}-J\_{0}\right|D\_{AK}}{L}}log⁡(\frac{k}{3.7D\_{AK}} +\frac{2.51ν}{D\_{AK}}\sqrt{\frac{L\_{AK}}{2g\left|z\_{A}-J\_{0}\right|D\_{AK}}})$$

$$V\_{AK}=1.475 m/sec$$

ReAK = $\frac{V\_{AK}∙D\_{AK}}{ν}=\frac{1,475∙0,45}{10^{-6}}=663740$

fAK = $\frac{0.25}{\left[log\left(\frac{5.74}{Re\_{AK}^{0.9}}+\frac{\frac{k}{D\_{AK}}}{3.7}\right)\right]^{2}}=0.0244$

$$R\_{AK}=\frac{8∙f\_{AK}∙L\_{AK}}{g∙π^{2}∙D\_{AK}^{5}}=\frac{8∙0.0244∙10000}{9.81∙3.14^{2}∙0.45^{5}}=1095.57$$

$$Q\_{AK}=V\_{AK}∙\frac{π∙D\_{AK}^{2}}{4}=1.475∙\frac{3.14∙0.45^{2}}{4}=0.2345 m^{3}/sec$$

Όμοια βρίσκω και για τους άλλους αγωγούς τα παραπάνω μεγέθη

$$V\_{ΒK}=-sign(z\_{Β}-J\_{o})∙2∙\sqrt{\frac{2g\left|z\_{Β}-J\_{0}\right|D\_{ΒΚ}}{L}}log⁡(\frac{k}{3.7D\_{ΒΚ}} +\frac{2.51ν}{D\_{ΒΚ}}\sqrt{\frac{L\_{ΒK}}{2g\left|z\_{Β}-J\_{0}\right|D\_{ΒK}}})$$

$V\_{ΒK}=0,528 $m/sec

ReBK = $\frac{V\_{BK}∙D\_{BK}}{ν}=\frac{0.528∙0,25}{10^{-6}}=132173$

fBK = $\frac{0.25}{\left[log\left(\frac{5.74}{Re\_{BK}^{0.9}}+\frac{\frac{k}{D\_{BK}}}{3.7}\right)\right]^{2}}=0.0295$

$$R\_{BK}=\frac{8∙f\_{BK}∙L\_{BK}}{g∙π^{2}∙D\_{BK}^{5}}=\frac{8∙0.0295∙6000}{9.81∙3.14^{2}∙0.25^{5}}=14973.54$$

$$Q\_{BK}=V\_{BK}∙\frac{3.14∙D\_{BK}^{2}}{4}=0.528∙\frac{3.14∙0.25^{2}}{4}=0.0259 m^{3}/sec$$

$$V\_{CK}=-sign(z\_{C}-J\_{o})∙2∙\sqrt{\frac{2g\left|z\_{C}-J\_{0}\right|D\_{CΚ}}{L}}log⁡(\frac{k}{3.7D\_{CΚ}} +\frac{2.51ν}{D\_{CΚ}}\sqrt{\frac{L\_{CK}}{2g\left|z\_{C}-J\_{0}\right|D\_{CK}}})$$

$V\_{CK}=-1.015 $m/sec ( η παροχή εξέρχεται από το κόμβο Κ με κατεύθυνση τη δεξαμενή C)

ReCK = $\frac{V\_{CK}∙D\_{CK}}{ν}=\frac{1.015∙0,25}{10^{-6}}=253741$

fCK = $\frac{0.25}{\left[log\left(\frac{5.74}{Re\_{CK}^{0.9}}+\frac{\frac{k}{D\_{CK}}}{3.7}\right)\right]^{2}}=0.029$

$$R\_{CK}=\frac{8∙f\_{CK}∙L\_{CK}}{g∙π^{2}∙D\_{BK}^{5}}=\frac{8∙0.029∙3300}{9.81∙3.14^{2}∙0.25^{5}}=8107.64$$

$$Q\_{CK}=V\_{CK}∙\frac{3.14∙D\_{CK}^{2}}{4}=-1.015∙\frac{3.14∙0.25^{2}}{4}=-0.0498 m^{3}/sec$$

$$V\_{DK}=-sign(z\_{D}-J\_{o})∙2∙\sqrt{\frac{2g\left|z\_{D}-J\_{0}\right|D\_{DΚ}}{L}}log⁡(\frac{k}{3.7D\_{DΚ}} +\frac{2.51ν}{D\_{DΚ}}\sqrt{\frac{L\_{DK}}{2g\left|z\_{D}-J\_{0}\right|D\_{DK}}})$$

$V\_{DK}=-1.692 m/sec$ ( η παροχή εξέρχεται από το κόμβο Κ με κατεύθυνση τη δεξαμενή D)

ReDK = $\frac{V\_{DK}∙D\_{DK}}{ν}=\frac{1.692∙0,35}{10^{-6}}=592426$

fDK = $\frac{0.25}{\left[log\left(\frac{5.74}{Re\_{DK}^{0.9}}+\frac{\frac{k}{D\_{DK}}}{3.7}\right)\right]^{2}}=0.026$

$$R\_{DK}=\frac{8∙f\_{DK}∙L\_{DK}}{g∙π^{2}∙D\_{DK}^{5}}=\frac{8∙0.029∙3220}{9.81∙3.14^{2}∙0.35^{5}}=1325.85$$

$$Q\_{DK}=V\_{DK}∙\frac{3.14∙D\_{DK}^{2}}{4}=-1.692∙\frac{3.14∙0.35^{2}}{4}=-0.1628 m^{3}/sec$$

Το αλγεβρικό άθροισμα των παροχών στο κόμβο Κ για το αρχικό ύψος

 J0 = 120 m ισούται με

F(J0) = $\sum\_{}^{}Q\_{i}=$ $Q\_{AK}+Q\_{BK}+Q\_{CK}+Q\_{DK}=0.0478>0$.

**Δεν έχω ισορροπία παροχών στο κόμβο Κ (εισροές=εκροές, διατήρηση της μάζας-άτοπο-επανάληψη) .** Συγκεκριμένα οι εισροές μου στον κόμβο Κ είναι μεγαλύτερες από τις εκροές στον κόμβο Κ. Πρέπει να τις μειώσω οπότε θα αυξηθούν οι εκροές από αυτόν και θα επέλθει αλγεβρική ισορροπία.

Οι εισροές στον κόμβο Κ προέρχονται από τις δεξαμενές Α και Β. Άρα πρέπει να μειωθούν οι παροχές QAK και QBK.. Αυτό για να γίνει πρέπει το J στο K να αυξηθεί. Είναι προφανές ότι μικρά ύψη απωλειών ενέργειας οδηγούν σε μικρές παροχές. Με δεδομένα τα υψόμετρα των δεξαμενών , τα μικρά ύψη απωλειών ενεργείας μεταφράζονται σε μεγαλύτερο ύψος πιεζομετρικής γραμμής στο J.

Αυτό αποδεικνύεται πιο μαθηματικά, και με το παρακάτω τύπο. Η μεταβολή του J, ΔJ η οποία θα οδηγήσει σε ισορροπία των παροχών στο κόμβο Κ δίνεται από τον εξής τύπο

 $\frac{dF}{dJ },J=J\_{0}= -\frac{1}{2}∙\sum\_{}^{}\frac{1}{\left|R\_{i}∙Q\_{i}\right|}<0$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω μέθοδος είναι επαναληπτική. Θα σταματήσει όταν πρακτικά επαληθεύεται η διατήρηση της μάζας στη διακλάδωση δηλαδή όταν F=0

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1η Επανάληψη | 2η Επανάληψη |
| J(n) | 127.046 | 126.742 |
| VAK | 1.385 | 1.389 |
| VBK | 0.284 | 0.299 |
| VCK | -1.181 | -1.175 |
| VDK | -1.856 | -1.849 |
| QAK | 0.220 | 0.221 |
| QBK | 0.014 | 0.015 |
| QCK | -0.058 | -0.058 |
| QDK | -0.178 | -0.178 |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Β’ τρόπος Newton –Raphson –διαδοχικών προσεγγίσεων

Η εξίσωση μάζας μπορεί να γραφεί ισοδύναμα:



από Newton –Raphson για επίλυση μη γραμμικής εξίσωσης ισχύει

ΔJ = - $\frac{F(J)}{\frac{dF}{dJ },\_{J=J\_{0}}}$

Για J = 120 m ισχύει

$\frac{dF}{dJ }= -\frac{1}{2}∙(\frac{1}{\left|R\_{AK}∙Q\_{AK}\right|}+\frac{1}{\left|R\_{BK}∙Q\_{BK}\right|}+\frac{1}{\left|R\_{CK}∙Q\_{CK}\right|}+\frac{1}{\left|R\_{DK}∙Q\_{DK}\right|}$)

$\frac{dF}{dJ }= -\frac{1}{2}∙(\frac{1}{\left|1095.57∙0.2345\right|}+\frac{1}{\left|14973.54∙0.0259\right|}+\frac{1}{\left|8107.64∙(-0.0498)\right|}+\frac{1}{\left|1325.85∙(-0.1628)\right|}$)

$$\frac{dF}{dJ }=-0.006789$$

ΔJ = - $\frac{F(J)}{\frac{dF}{dJ },J=J\_{0}}=-\frac{0,0478}{-0,006789}=7,046 m$

J1 = J0 + ΔJ = 120+7.046 = 127.046 m

Επαναλαμβάνω ακριβώς την ίδια διαδικασία μέχρι το J στο K να συγκλίνει σε συγκεκριμένο αριθμό. Στο παρακάτω Πίνακα δίνονται οι τιμές όλων των μεγεθών που βρέθηκαν αναλυτικά. Η όλη διαδικασία επαναλήφθηκε δυο φορές και επιτεύχθηκε ικανοποιητική σύγκλιση (ΔJ μικρής τάξης μεγέθους)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1η Επανάληψη | 2η Επανάληψη |
| J(n) | 127.046 | 126.742 |
| VAK | 1.385 | 1.389 |
| VBK | 0.284 | 0.299 |
| VCK | -1.181 | -1.175 |
| VDK | -1.856 | -1.849 |
| QAK | 0.220 | 0.221 |
| QBK | 0.014 | 0.015 |
| QCK | -0.058 | -0.058 |
| QDK | -0.178 | -0.178 |
| ΔJ | -0.304 | 0.0048 |

Το ΔJ αρκετά μικρό, οπότε σταματάω εδώ. Οι τελικές παροχές φαίνονται στη τελευταία στήλη.

Β Τρόπος Διαγραμματικά

Κάνω γραφική παράσταση ( F – J) και βρίσκω γραφικά για ποιο J προκύπτει F = 0

Παρατηρώ ότι το F μηδενίζεται για τιμές του J κοντά στο 127.