

Μία πρώτη αναφορά στο
συντελεστή τριβής

Συντελεστής τριβής

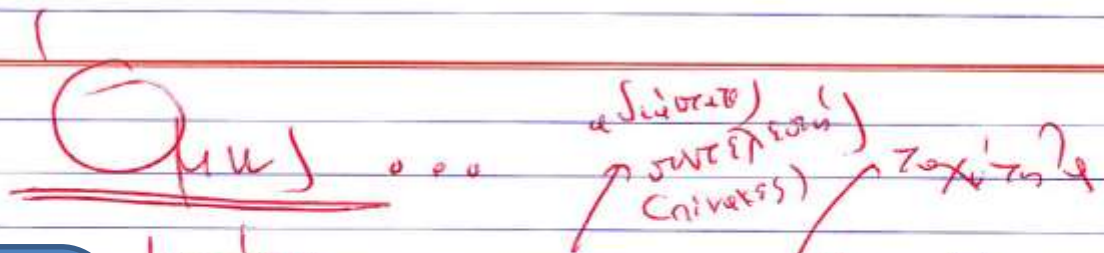
- Εξίσωση Darcy –Weisbach, για τις γραμμικές απώλειες ενέργειας σε μονάδες μήκους

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

- Για κυκλικούς αγωγούς ενσωματώνει το είδος της ροής και τη τραχύτητα του υλικού:

$$f = f(\text{Re}, k/D)$$

- Προέρχεται από την ανάλυση της ροής σε συνδυασμό με πειραματικά αποτελέσματα



Ισχύει:

$$T_0 = C_f \rho \frac{V_0^2}{2}$$

Οπότε
σταθερά

↓
Διατηρητική τάση
στο σπείρο έρπιο

Θεωρητική
αφετηρία

Τη χρ/ω σε περίπτωση περισσοτέρων σπείρων
ταίχωμα:

Έστω αυτή $C_f = \frac{f}{4} = \frac{\text{αδύστατο συναρτησιότητα}}{\text{Χρ/ω τη μέση ταχύτητα (ω) προς τη διατομή}}$

$$T_0 = \frac{f}{4} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) = \frac{f \rho V^2}{8}$$

Γενικά $f = f \left(\frac{\kappa/D}{2}, \frac{V \cdot D}{\nu} \right)$

$f = \text{συναρτησιότητα}$
 τριβής αδύστατο "Re"

Συντελεστής τριβής και εξίσωση Darcy Weisbach

- Εξίσωση Darcy Weisbach: φυσική βάση (ισορροπία δυνάμεων)
- Επιπλέον ενσωματώνει το συντελεστή τριβής f που συμπεριλαμβάνει:
 - Κατανομή ταχύτητας καθ' ύψος με βάση την τυρβώδη ροή
 - Πειραματικά δεδομένα και ανάλυση του είδους ροής

Περαιτέρω ανάλυση

- Τυρβώδης ροή
- Οριακό στρώμα
- Λογαριθμική κατανομή ταχυτήτων
- Υδραυλικά λείοι και τραχείς σωλήνες
- Διαστατική ανάλυση
- Ανάλυση Nikuradse και Colebrook

ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

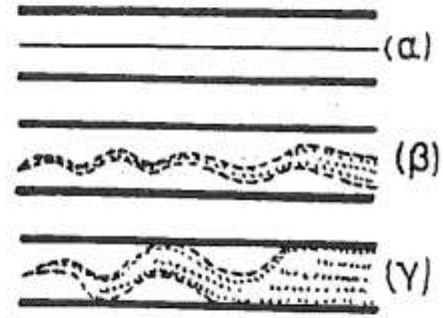
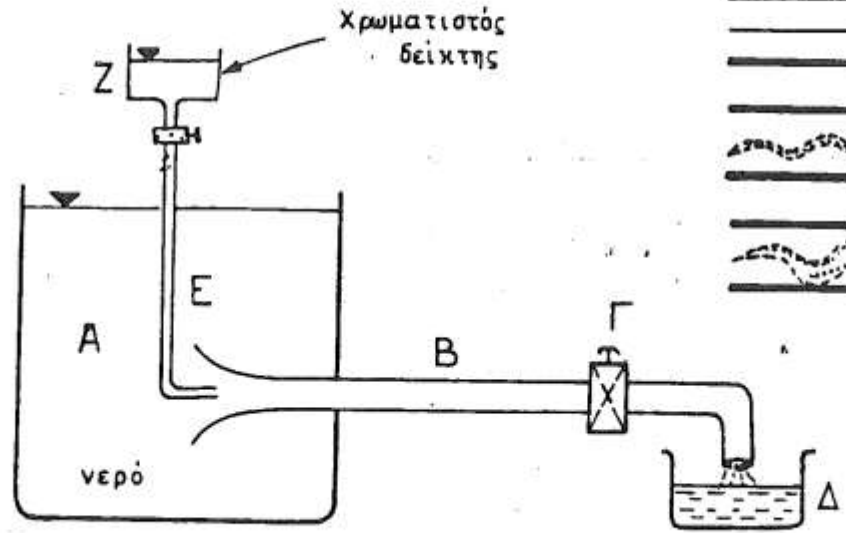
Ιξώδες

- Ερμηνεία οριακού στρώματος
- Αίτιο: κίνηση μορίων
- Όταν το νερό κινείται μεταξύ δύο σωματιδίων (που εμπεριέχουν σημαντικό αριθμό μορίων) παράγεται τριβή που η εξηγησή της είναι μοριακή.
- ίσος αριθμό μορίων ανταλλάσσονται στη διεπιφάνεια αλλά με διαφορετική ορμή.
- Υπόθεση: η διατμητική τάση εξαρτάται από την παραμόρφωση των ρευστών και κατά συνέπεια από το πεδίο ταχυτήτων.
- Navier-stokes γραμμική σχέση μεταξύ τανυστή τάσεων και παραμορφώσεων
- Μονοδιάστατη ροή $\tau = \mu du/dy$, μ : δυναμικό ιξώδες, χαρακτηριστικό του ρευστού
- Ιξώδες, μ : ανεξάρτητο της πυκνότητας, μέτρο ευκινησίας ρευστών, βαθμωτό μέγεθος για κάθε ρευστό, εξαρτάται από τη θερμοκρασία και όχι από τη ροή (Δημητρίου)
- $\nu = \mu/\rho$ (κινηματικό ιξώδες)

ΚΛΕΙΣΤΟΙ ΑΓΩΓΟΙ

Στρωτή και τυρβώδης ροή

Συσκευή
Reynolds



Αριθμός Reynolds: $Re = \frac{U \cdot D}{\nu}$

U : μέση ταχύτητα ροής

D : διάμετρος

ν : συντελεστής κινηματικού ιξώδους

Σχ. (α): στρωτή ή παράλληλη ροή για $Re < 2000$

Σχ. (γ): τυρβώδης ροή για $Re > 50000$

Σχ. (β): μεταβατική κατάσταση για $2000 < Re < 50000$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

\Rightarrow για στρωτή ροή

τ : διατμητική τάση

μ : συντελεστής δυναμικού ιξώδους

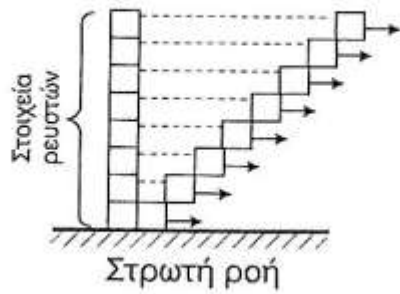
$\frac{du}{dy}$: βαθμίδα ταχύτητας

Στρωτή και τυρβώδη ροή (Κορωνάκης, Πειραματική Υδραυλική)

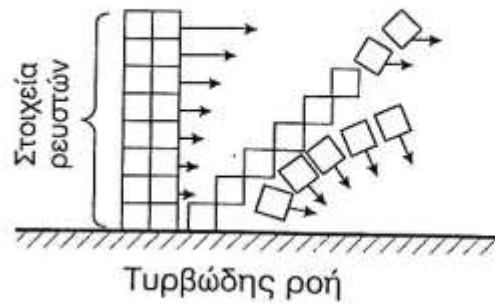
Κατά την αργή ροή ενός συνεκτικού ρευστού, οι δυνάμεις τριβής σε κάθε σημείο αναπτύσσονται κατά διευθύνσεις παράλληλες προς την ταχύτητα ροής και είναι αντίθετης φοράς με αυτήν. Σαν αποτέλεσμα, το ρευστό κινείται κατά στρώματα παράλληλα προς τις γραμμές ροής, με συνεχώς μειούμενη ταχύτητα όσο πλησιάζουμε προς τα τοιχώματα, παρεμποδίζοντας έτσι τη ροή. Το είδος αυτό της ροής λέγεται "στρωτή ροή" (laminar flow). Κατ' αυτήν δεν υπάρχει μακροσκοπική ανταλλαγή μάζας μεταξύ δυο διαδοχικών στρωμάτων ρευστού. Στην πραγματικότητα, εξ αιτίας της άτακτης μοριακής κίνησης, υπάρχει διάχυση των μορίων (μικροσκοπικής κλίμακας κινήσεις) που παρατηρείται σε όλα τα στοιχεία του ρευστού και που εξαρτάται από την θερμοκρασία.

Γι' αυτό, σαν στρωτή ροή ορίζουμε την ροή εκείνη κατά την οποία η ανταλλαγή μάζας και ορμής μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων ρευστού γίνεται μόνο μέσω διάχυσης (σε επίπεδο μορίων)).

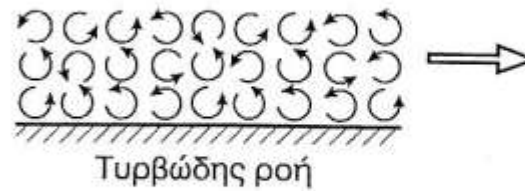
Η στρωτή ροή ευνοείται όταν το ρευστό είναι παχύρρευστο γιατί τότε οι δυνάμεις τριβής ενισχύονται. Ευνοείται επίσης όταν οι διαστάσεις και οι ταχύτητες της ροής είναι μικρές. Γιατί όταν οι διαστάσεις και οι ταχύτητες είναι μεγάλες, η αδράνεια του ρευστού και η ανάλογη προς αυτήν κινητική ενέργεια μεγαλώνει έτσι, μπορεί να φτάσουμε στο σημείο, όπου οι δυνάμεις τριβής δεν μπορούν πια να συγκρατήσουν μόνες τους σε χαμηλά επίπεδα τις ταχύτητες της ροής. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει βέβαια αν το ρευστό είναι λεπτόρρευστο, γιατί έτσι εξασθενούν οι δυνάμεις τριβής. Αυτοί είναι οι λόγοι, για τους οποίους ο αριθμός Re (που είναι ανάλογος προς την ταχύτητα και το χαρακτηριστικό μέγεθος της ροής και αντιστρόφως ανάλογος προς την κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού) μπορεί να χρησιμεύσει σαν ένα σωστό μέτρο για τον καθορισμό των ορίων ταχύτητας, πάνω από τα οποία η στρωτή ροή παύει να υπάρχει.



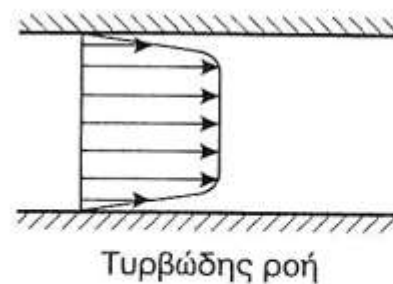
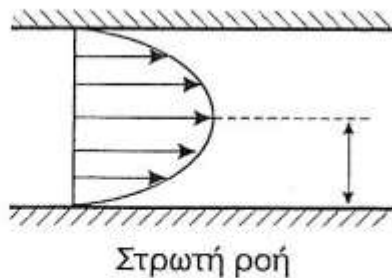
Σχήμα 1. Στρωτή ροή



Σχήμα 2. Τυρβώδης ροή



Σχήμα 3



Σχήμα 4. Μορφή κατανομής ταχύτητας σε στρωτή και τυρβώδη ροή

Οι τυρβώδεις ροές χαρακτηρίζονται από γρήγορες
αυανόηστες και μη προβλέψιμες διακυμάνσεις της
τοπικής ταχύτητας σε τυχόν σημείο της ροής και
από υψηλούς ρυθμούς διάχυσης και μείξης.

Συνεπώς η μεθοδολογία για συνμεικτές τυρβώδεις
ροές είναι η χρήση χρονικών μέσων ταχυτήτων.
Σε ένα τυχόν σημείο, η ταχύτητα αναλύεται στο
έλλοιμα της χρονικής μέσης τιμής $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ και
της διακυμάνσης

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w'$$

↑
διακυμάνση

R+T

Μέση τιμή και τυρβώδη διακύμανση

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w'$$

↑ Διακύμανση

όπου

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u dt, \quad \bar{v} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v dt, \quad \bar{w} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} w dt.$$

T: χρονικό διάστημα, κατά το οποίο εντάσσεται για να αποφέρει μια χρονικά μέση τιμή.

$$u' = u - \bar{u} \quad \left(\begin{array}{l} \text{τυρβώδης} \\ \text{διακύμανση} \end{array} \right)$$

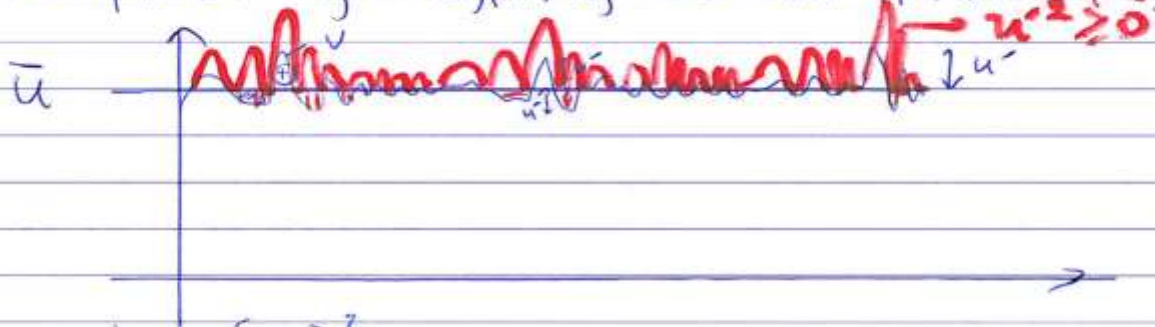
↑ ↑
πραγματική μέση
ταχύτητα τιμή

Επομένως, από τον ορισμό της μέσης τιμής με κατάλληλη ως προς το χρόνο απόκλιση:

$$\bar{u}' = \bar{v}' = \bar{w}' = 0$$

Μέση τιμή των τετραγώνων των διακυμάνσεων

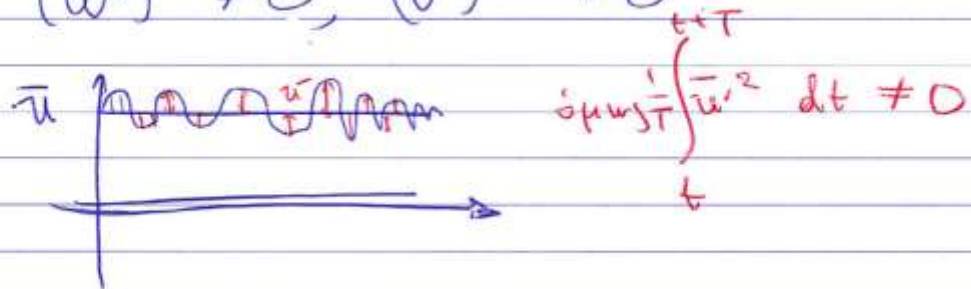
Όμως, η διακύμανση των τετραγώνων των διακυμάνσεων της ταχύτητας δεν είναι μηδενική όπως



Αποφάνει) $(u')^2 > 0$ και

$$\overline{(u')^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (u')^2 dt \neq 0$$

Όμοια $\overline{(w')^2} \neq 0$, $\overline{(v')^2} \neq 0$



Εξ. Navier – Stokes και χρονική ολοκλήρωση τυρβώδεις τάσεις

Ο/ντες της εξίσωσης Navier-Stokes ως προς το χρόνο προκύπτει:

xx'

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) =$$

(αίμα, ρ) (g ως προς x) → συντηρητικές ιδιότητες

$$= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] -$$

$$- \rho \left[\frac{\partial (\overline{u''^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u''v''})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u''w''})}{\partial z} \right]$$

Όμοια ως προς yy' και zz' (προβλεπόμενα μη σαφώς ορισμένα)

Προβλεπόμενα ότι οι στήλες των $\overline{u''^2}$ κ.λπ.

Περ/με ότι η επίωση των μέσων τιμών
Πορ/μίνει αμετάβλητη, αλλι της εμφάνισης
των τελευταίων όρων που έχουν διαστάσεις
τάσεων.

ορισμένο

Αυτοί οι όροι αντιστοιχούν στην ευρωβίση
(επιρροή της ιψίδους) μεταφορά ορμής λόγω των
τυχαίων διακυμάνσεων της ταχύτητας,
απόρροια με τη σωστή διαμητρική τάση, λόγω
ιψίδας, (μεγαλύτερος όρος μεξέδους)

Επιρροή θεωρώ τάσης (επιρροή της) λόγω τ/ρθης:

(xx')

$$T_{xx} = -\rho \overline{(u^p)^2}, \quad T_{xy} = -\rho \overline{u^p u}, \quad T_{xz} = \rho \overline{u^p w}$$

• Οι τάσεις αυτής (τάσεις Reynolds) ορίζονται
 του τανυστή τάσεων.

$$\begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{(v')^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{u'w'} & -\rho \overline{(w'v')} & -\rho \overline{(w')^2} \end{bmatrix}$$

Έστω μονοδιάστατη ροή

• Πολλοί προτιμούν ενομογενή των έννοιών της
 τυβιδού κινηματικές ιδιότητες:

ώστε

$$\tau = \overline{\tau_L} + \overline{\tau_T} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

\uparrow \uparrow
 σερμική τ_L τυβιδού
 (Laminar) τ_T τυβιδού
 σερμική μ_T (εμφανική
 τυβιδού ιδιότητα)

$$\tau_T = \mu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (\text{υπόθεση})$$

από τον Boussinesq, 1877.

Θα μπορούσε να υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ
 του τανυστή τυβιδών ~~και~~ τανυστή και
 του τανυστή ταχυτήτων (των μέσων) παρατηρούμενη

Υπόθεση Boussinesq

ν - κινηματική ιφώδης $(\frac{m^2}{s})$
εξαρτάται από το ρευστό για διάφορες θερμοκρασίες.

ή ισοδύναμα

κινηματική ιφώδης (ρηυτικότητα)

$$\tau = \rho (\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y}$$

ν ή ν_T (ρευστά) ρηυτικότητα

$\frac{\partial u}{\partial y}$ τυρβώδης

Το κινηματική ιφώδης λόγω τυρβώδης, ν_T , χαρακτηρίζεται από τη ροή και δεν έχει το είδος του ρευστού.

Δυστυχώς, ο ν_T δεν είναι αναγκαίως και μεταβιβάσεων εύρεως πέρα σε αριθμοποιή.

Ανταλλαγή ορμής –ιξώδες διατμητικές τάσεις

- Στην τυρβώδη ροή, οι τυρβώδεις (μακρόκοσμος) διατμητικές τάσεις είναι πολύ σημαντικότερες από τις ιξώδες διατμητικές τάσεις (αίτιο: μικρόκοσμος).
- Οι τυρβώδεις διατμητικές τάσεις είναι αποτέλεσμα της μεταφοράς ορμής των τυχαία κινούμενων σωματιδίων ρευστού.
- Επίσης η τύρβη είναι σημαντική σε περιβαλλοντικά θέματα ανάμειξης φλεβών ή πλουμίων και στη μεταφορά **θερμότητας (και στην παρασκευή φραπέ)**
- **Μονοδιάστατή (ως προς τις μέσες τιμές) τυρβώδη ροή:**

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} - \overline{\rho u' v'}$$

Οριακό στρώμα και τυρβώδη ροή

Οριακό στρώμα

- Prandtl: χωρισμός της ροής σε δύο περιοχές. Μία μικρή αλλά ουσιώδη κοντά στα στερεά όρια που επικρατούν οι δυνάμεις ιξώδους (οριακό στρώμα)
- Μία μεγαλύτερη περιοχή που προσομοιάζει τα τέλεια ρευστά
- Στο οριακό στρώμα λαμβάνει μεταφορά ορμής και θερμότητας του ρευστού με το περιβάλλον του
- Κλειδί για την κατανόηση του συντελεστή τριβής f

Τυπώδη Οπτική Στοιβάδα:

Αποτελείται από τρεις περιχίτj:

(1) Ηώδη υποστοιβάδα, περί τ του στέρνου.
οπίου

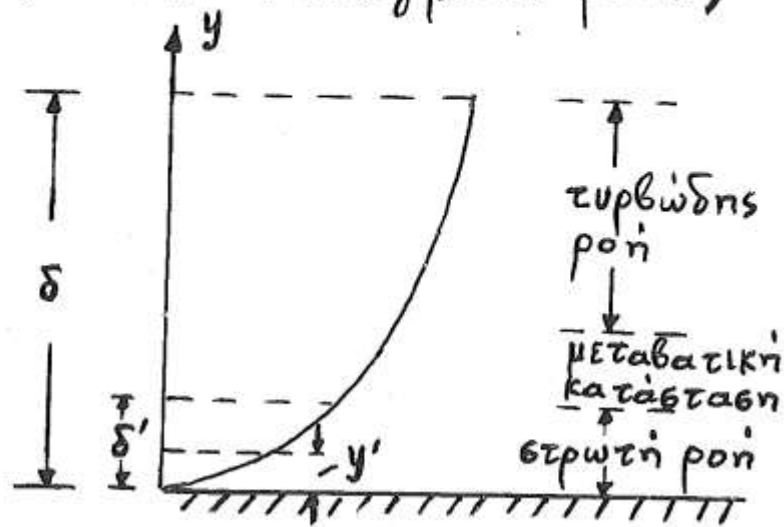
(2) Μεταβατική στοιβάδα

(3) Γνωστή τυπώδη στοιβάδα

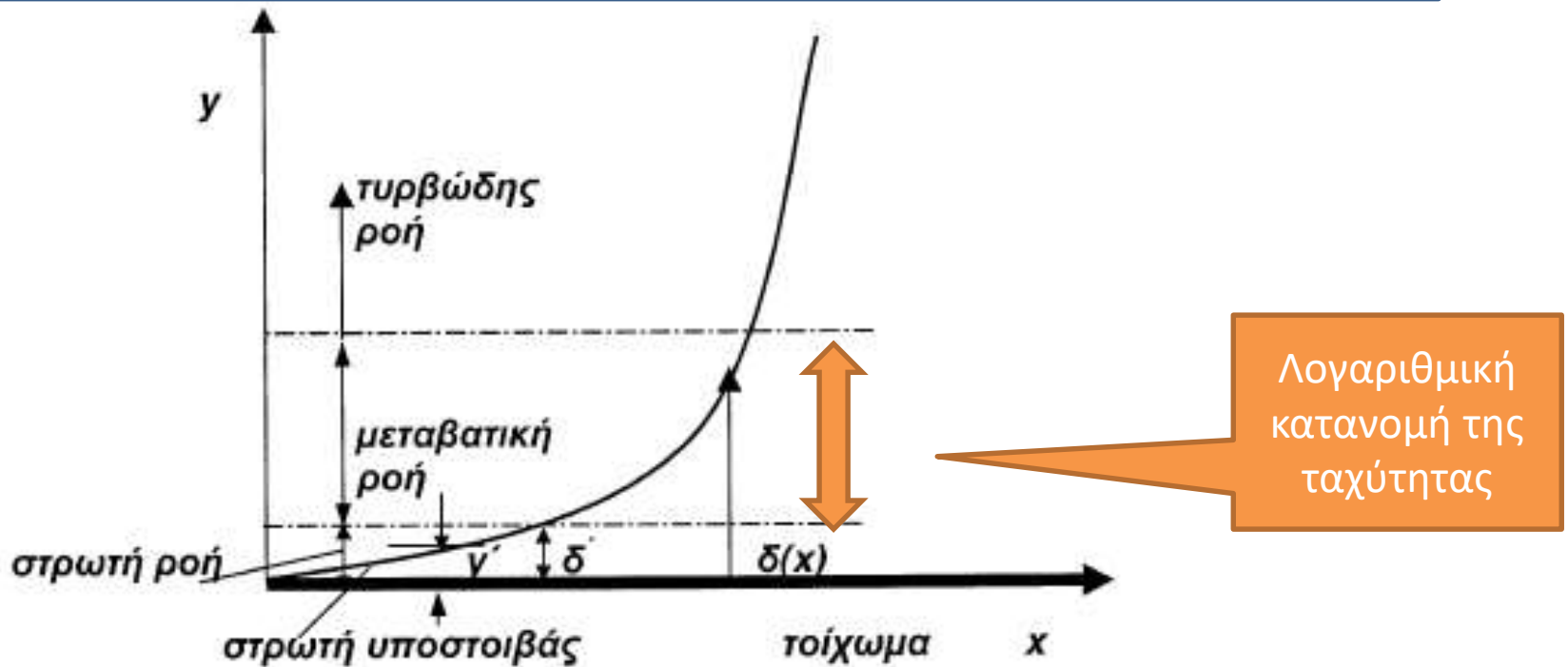
(1), (2) διακρίνονται ταχύτερα, εμφανίζονται ως
τη διακριτική τών ον στέρνι εμφάνιση

(3) Η άριστη τυπώδη παύ, εμφανίζεται ταχύτερα
από τών κείων της πίεσης

Κατανομή της ταχύτητας για τυρβώδη ροή και λεία τοιχώματα
(στην περιοχή της αναπτυγμένης ροής)




Στα συνήθη πρακτικά προβλήματα η ροή είναι τυρβώδη με εξαίρεση μία περιοχή περί το στερεό όριο, όπου η ταχύτητες είναι μικρές και έχουμε στρωτό οριακό στρώμα



Είδη ροής γύρω από λείο τοίχωμα

Λογαριθμικός νόμος ταχυτήτων—
κατανομή ταχυτήτων καθ ύψος χωρίς
«αναλυτική επίλυση»



Στόχος έκφραση της
διατμητικής τάσης χωρίς τη
βοήθεια της διατήρησης της
ορμής,

Μόνο με την **κατανομή της**
ταχύτητας

κινηματικό ιξώδες λόγω τύρβης

- κινηματικό ιξώδες λόγω τύρβης:
- Εξαρτάται από το ρευστό αλλά και από τις συνθήκες ροής
- Γερμανός φυσικός **Prandtl** θεώρησε ότι η τύρβη θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί ως μία χαοτική κίνηση στοιχείων ρευστού από ένα σημείο σε άλλο και κατέληξε σε μία έκφραση της χρονικής **διακύμανσης της ταχύτητας** σε σχέση με τη **διαφορά των μέσω τιμών** → σχέση διατμητικής τάσης με βάση την καθ ύψος κλίση των μέσω τιμών

Prandtl

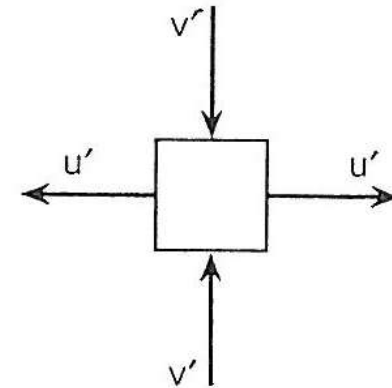
- Ένα σωματίδιο διανύει μία απόσταση L προτού μεταβληθεί η ορμή του στο νέο περιβάλλον, η χρονική διακύμανση θα είναι

$$u' \approx L \frac{du}{dy}$$

- Από την εξίσωση της συνέχειας ισχύει:

$$v' = u' \approx L \frac{du}{dy}$$

Ο Prandtl πρώτος επιχείρησε τον συσχετισμό του συντελεστή μ_t με τα χαρακτηριστικά της μέσης ροής. Αναφερόμενος σε δισδιάστατη παράλληλη ροή όπως εκείνη του Σχ. 11.3, ο Prandtl ανέπτυξε τη θεωρία του στηριζόμενος στις εξής δύο παραδοχές:



Σχήμα 11.4.

- Λόγω συνεχείας, οι διακυμάνσεις της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις x και y είναι της ίδιας τάξης μεγέθους και αντίθετου προσήμου (Σχ. 11.4).

$$|\overline{u'}| \propto |\overline{v'}| \quad (11.16a)$$

- Η διακύμανση της ταχύτητας u' συνδέεται με την μετακίνηση των ρευστών σωματιδίων μεταξύ των στρώσεων και το μέγεθος της διακύμανσης είναι ανάλογο μιας μέσης απόστασης ℓ_m (κάθετα προς την κύρια διεύθυνση της ροής) κατά την οποία κινούνται τα σωματίδια μέχρις ότου αποκτήσουν την ταχύτητα του νέου περιβάλλοντος.

$$|\overline{u'}| \propto \overset{L}{\ell_m} \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \quad (11.16\beta)$$

Από Θ. Taylor η τυρβώδη διακύμανση της ταχύτητας μπορεί να θεωρηθεί ανάλογη με την κλίση της μέσης ταχύτητας

$$|\overline{u}^2|$$

Εστω ανίσταται y από το τοίχωμα, έστω

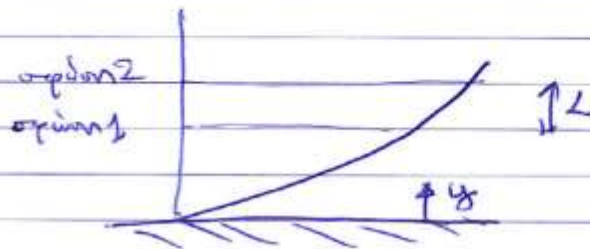
\bar{u} . Η κατά Taylor ισχύει μετά από L (L μικρός)

$$\bar{u}(y+l) \approx \bar{u}(y) + L \frac{d\bar{u}}{dy}$$

Μπορεί να θεωρηθεί ότι για αστάθμιστο L ,

η διαφορά των ταχυτήτων (επίσης L) δίνει τη διακύμανση της ταχύτητας:

$$\left(u^2 \approx L \frac{d\bar{u}}{dy} \right) \quad \text{(Ταπεινός ερπυστής του Prandtl)}$$



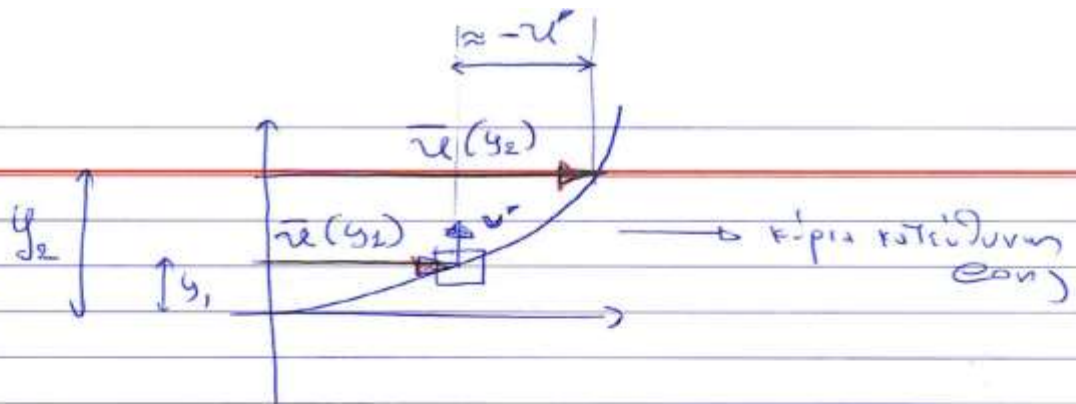
Διατμητική τάση τοιχώματος, μέτρο

$$\tau = \rho u'v'$$

- Prantl



$$\tau = \rho L^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$



$$L = k_L \cdot y$$

$$u_0 \approx v_0 \approx L \left(\frac{du}{dy} \right)$$

$$T = \rho v_0 u_0$$

$$\tau = \rho \left(L \frac{du}{dy} \right)^2$$

Misal temperatur
(w/ profil tar
difusi in) ponj

$$\text{misal } v_T = L^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$$

fungsi difusi = dp/dy

Sifat.
z-nya dp/dy
z/pBn

misal analisis
Prantl.

Μήκος ανάμειξης L

Κατανομή ταχύτητας σε τυρβώδη ροή

$$\tau = \rho \left(l \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

L : μήκος αναμίξεως του Prandtl

(απόσταση κατά την οποία εωμαζίδια ρευστού μιας τυρβώδους ροής κινούμενα εγκάρσια προς την κύρια διεύθυνση ροής, διατηρούν την αρχική τους ποσότητα κινήσεως)

L = κy κοντά στο στερεό τοίχωμα ($\tau = \tau_0$)

$\kappa = 0.4$, σταθερά του ν. Κάρμάν

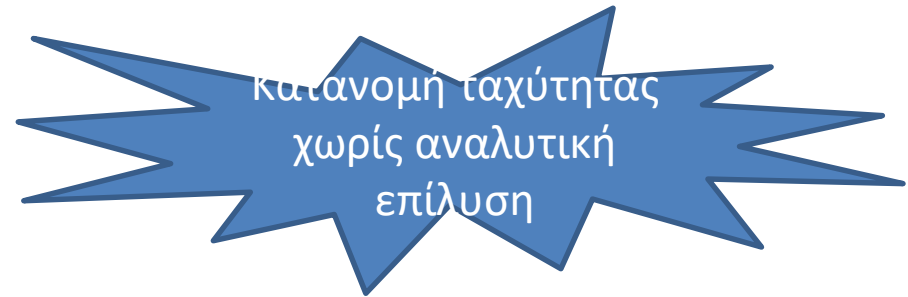
Λογαριθμική κατανομή της ταχύτητας

- Από **Prandtl** σε μία περιοχή περί τον πυθμένα (διάβασε τοιχώματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = L \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u^*, L = 0.4y$$

$$u^* = 0.4y \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$du = 2.5u^* \frac{dy}{y}$$



$$u = 2.5u^* \ln y + C$$

Λογαριθμικός νόμος σε σωλήνες

- Ολοκλήρωση της σχέσης:

$$\rho \left(L \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \tau_w \quad (*)$$
$$\Leftrightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \frac{1}{k_L y} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (**)$$



- Θεωρείται σταθερή τ_w
- Οριακές συνθήκες: Θεωρείται ένα μήκος y' στο οποίο η ταχύτητα είναι μηδέν
- Το μέγεθος y' προσδιορίζεται πειραματικά και είναι διαφορετικό για υδραυλικά λεία και για τραχέα τοιχώματα

Ταχύτητα τριβής: η διατμητική τάση
σε μονάδες ταχύτητας (τίποτε άλλο...)

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

: διατμητική ταχύτητα ή
ταχύτητα τριβής

Όρια ολοκλήρωσης , συμπερίληψη των
στερεών τοιχωμάτων

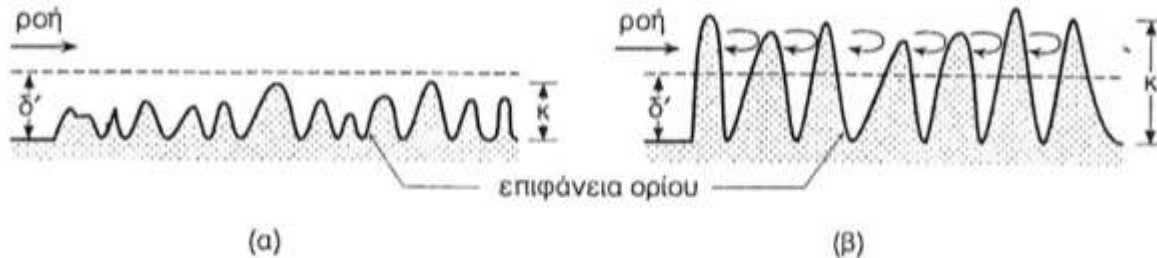
Σωλήνες ($L=K \cdot \gamma$, $K = 0.4$)

Οριακή συνθήκη, δε μπορώ να θέσω $\gamma=0$, υποθέτω
ένα μήκος γ'

Υδραυλικά λείοι και υδραυλικά
τραχείς σωλήνες
(βλπ οριακές συνθήκες)

Υδραυλικά λείοι και υδραυλικά τραχείς σωλήνες

Η επίδραση της τραχύτητας στα υδροδυναμικά μεγέθη τυρβώδους οριακού στρώματος εξαρτάται από τη διακοπή ή μή του στρωτού οριακού υποστρώματος δ' από τις προεξοχές και επομένως ο βαθμός επίδρασης της τραχύτητας εξαρτάται από τον λόγο κ_s/δ' .



Σχήμα 12.11.

Όπως φαίνεται στο Σχ. (12.11), αν $\kappa < \delta'$ οι προεξοχές παραμένουν βυθισμένες μέσα στο στρωτό υπόστρωμα, άρα η κίνηση των ρευστών σωματιδίων στην γειτονία των προεξοχών παραμένει στρωτή και οι ενδεχόμενες διακυμάνσεις μπορούν να αποσβεστούν από τις ισχυρές δυνάμεις συνεκτικότητας. Αν όμως $\kappa > \delta'$ τότε οι προεξοχές επιδρούν στην τυρβώδη κίνηση των σωματιδίων εκτός του στρωτού υποστρώματος, δημιουργώντας φαινόμενα αποκόλλησης και στροβιλισμούς που δεν μπορούν να αποσβε-

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

: Διατμητική ταχύτητα ή
ταχύτητα τριβής

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_* = 0.4 y \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$d\bar{u} = 2.5 u_* \frac{dy}{y} \Rightarrow \bar{u} = 2.5 u_* \ln y + C$$

Οριακή συνθήκη: $u=0$, όταν $y=y'$ $\Rightarrow C = -2.5 u_* \ln y'$

$$\bar{u} = 2.5 u_* \ln \frac{y}{y'}$$

$$\bar{u} = 5.75 u_* \log \frac{y}{y'}$$

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$

Προσδιορισμός y' (πειραματικά)

y' , με βάση πειράματα:

(A) Άερα: $y' = \frac{\delta^p}{107} = \frac{0.108 \text{ m}}{u_*}$

(B) ζωαία: $y' = \frac{K}{30}$

$$u = 2.5u^* \ln y + C$$

$$\bar{u} = 2.5 u_* \ln \frac{y}{y'}$$

$$u = 5.75u^* \log y + C$$

προσέγγιση για όλη τη διατομή, αέριος σίον ορμή ρU^2
Χείρα Τοιχώματα: (Roberson et al. 1998)

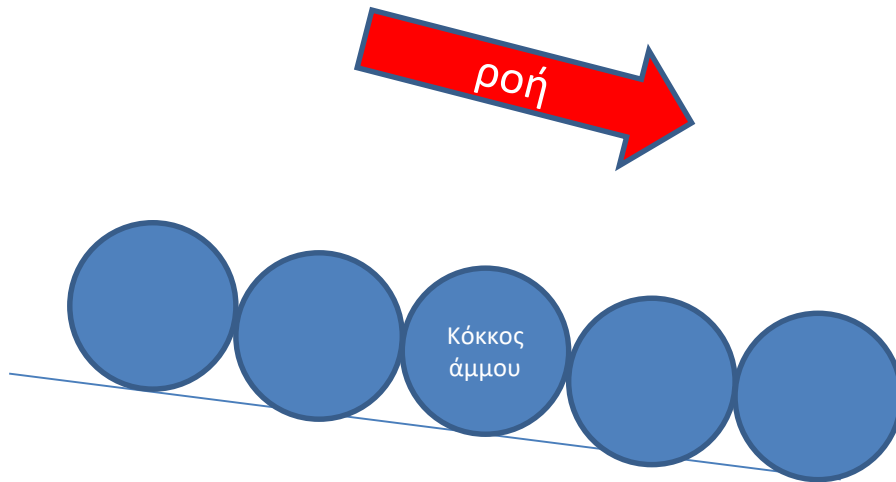
$$\frac{U}{U^*} = 5.75 \log \left(\frac{U^* y}{\nu} \right) + 5.5 \quad \left(\begin{array}{c} (E) \wedge \\ (A) \end{array} \right)$$

$(U^* = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} = \eta \text{ διατηρητική τάση σε μονάδες ταχύτητας, "ταχύτητα τριβής"})$
 "Εικονική ταχύτητα"

Τραχεία Τοιχώματα: $(E) \wedge (B)$

$$\frac{U}{U^*} = 5.75 \log \left(\frac{y}{K} \right) + 8.5$$

(Karman-Prandtl)



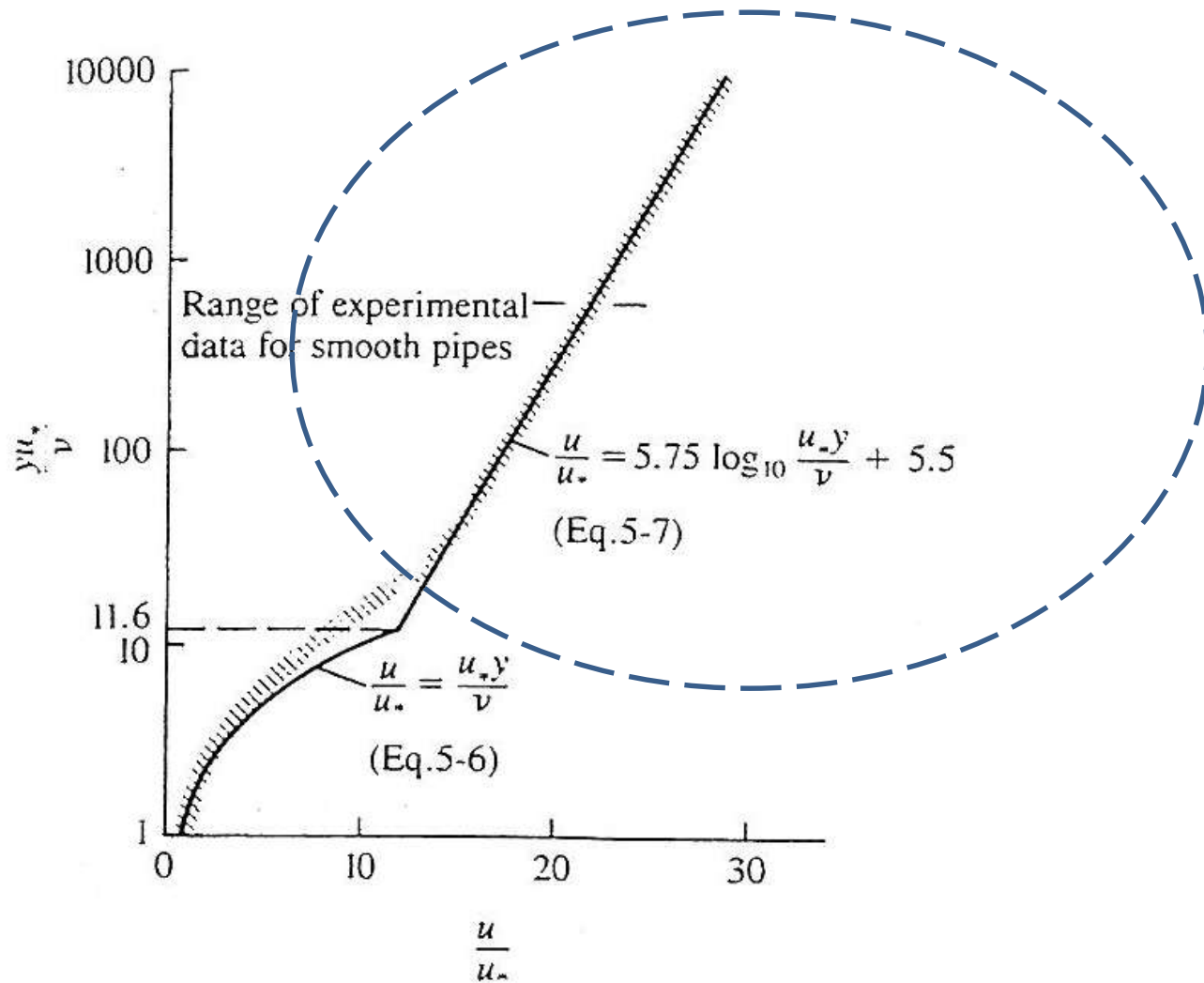
Τραχέα Τοιχώματα

$$\gamma' = k/30$$

Το διάγραμμα Moody και οι συνακόλουθες εξισώσεις αναφέρονται σε υλικά ενώ η των υπολογισμών δεν είναι του υλικού άμεσα αλλά η τραχύτητα που είναι ισοδύναμη με την τραχύτητα κόκκων άμμου

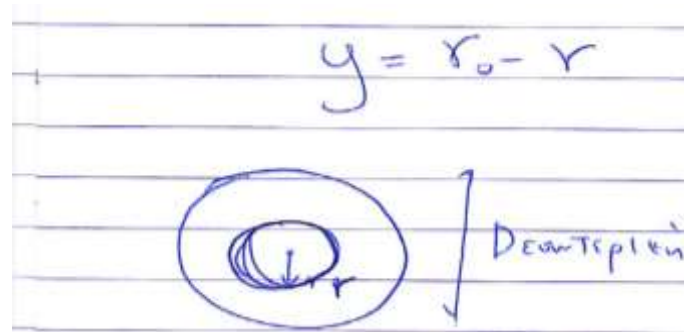
Συνεπώς οι υδραυλικοί υπολογισμοί γίνονται με την **ισοδύναμη τραχύτητα** (των κόκκων άμμου)

Για απλούστευση αναφερόμαστε απλά ως **τραχύτητα**



εκμετάλλευση της λογαριθμική κατανομής ταχυτήτων

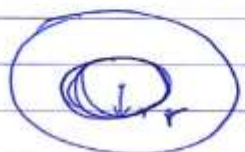
- Εφαρμογή σε σωλήνες και αλλαγή αξόνων από το κέντρο του σωλήνα: απόσταση r αντί της απόστασης y από το τοίχωμα: $y=r_0-r$
- **Ολοκλήρωση** από στοιχειώδη διατομή για εύρεση της **μέσης ταχύτητας**
- **Συσχέτιση** με **διατμητική τάση**



Νι Καραβσε, Παιδαγωγική επιθεωρήτρια...

• Τυρβίωση ραίης, σωλήνες,
ανόστιαση r από το κέντρο r_0 , σωλήνα:

$$y = r_0 - r$$



$$\text{Διαμέτρηση} = 2r_0, \bar{u}(r)$$

Αλλαγή
συστήματος
αξόνων
Κυλινδρικές
συντεταγμένες

Στο ίδιο για τις ίδιες χρονικές στιγμές \bar{u} , γράφω
από u ,

Για τοίχωνματα $u = u(r)$

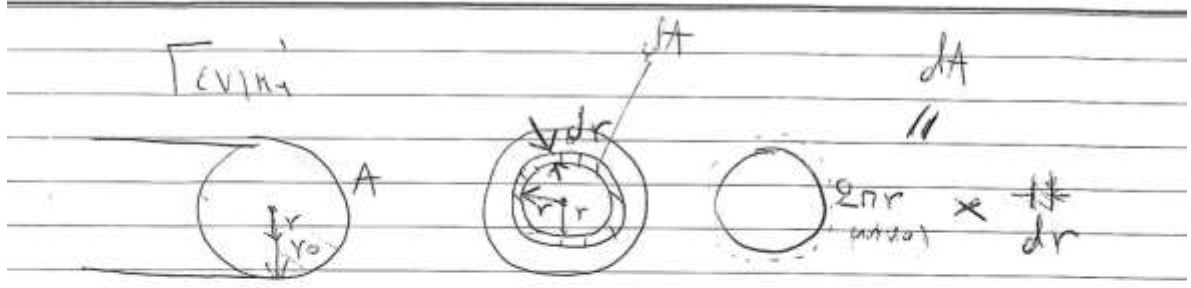
$$\frac{u}{u_a} = 5.75 \log\left(\frac{u_a(r_0 - r)}{r}\right) + 5.5$$

Γραφία: $u = u(y)$

$$\frac{u}{u_a} = 5.75 \log\left(\frac{r_0 - r}{K}\right) + 8.5$$

$u(y) \Rightarrow$ δέλω με υδραναιω
μόνο μέσω της τιμής:

Ολοκλήρωση ως προς τη
στοιχειώδη επιφάνεια για να
προκύψει μία σχέση για τη μέση
(ως προς τη διατομή) ταχύτητα, V



$$\bar{V} = \left(\frac{\int_{\text{πύλη}} u \cdot dA}{\int_{\text{πύλη}} dA} \right) = \frac{Q}{A}$$

$$= \frac{1}{A} \int_0^{r_0} u \cdot \underbrace{2\pi r dr}_{dA} =$$

$$= \frac{1}{A} \int_0^{r_0} u_* \left[5.75 \log \left(\frac{u_* (r_0 - r)}{\nu} \right) + 5.5 \right] 2\pi r dr$$



$$\frac{1}{A} \int_0^{r_0} u_* \left[5.75 \log \left(\frac{r_0 - r}{K} \right) + 8.5 \right] 2\pi r dr$$

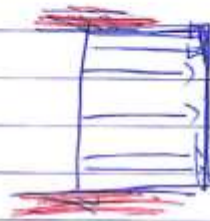
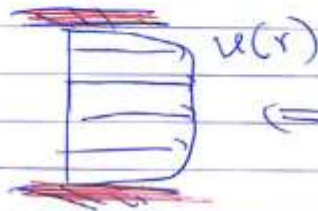
Ολοκλήρωση σε όλη τη διατομή

Πείρα: μέση Ταχύτητα με την διατομή

$$\frac{V}{u_*} = 5.75 \log \left(\frac{u_* r_0}{\nu} \right) + 1.75$$

πραγματικότητα

Μοντέλο (15 ερωτ με Χυρτιά)



V (μέση)
σταθερή σε όλη
τη διατομή

Πείρα: μέση Ταχύτητα!

$$\frac{V}{u_*} = 5.75 \log \left(\frac{r_0}{K} \right) + 4.75$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \text{ταχύτητα τριβής (επιφανειακή)} \\ \text{ή διατ. τάση στο τοίχωμα σε ταχύτητα} \\ \text{μονάδες ταχύτητας}$$

Προσδιορισμός συντελεστή τριβής f

- Διαφορετική εξίσωση σε υδραυλικά λεία και τραχέα τοιχώματα
- **Ολοκλήρωση** ταχυτήτων στη διατομή του σωλήνα και εύρεση μέσης ταχύτητας
- Αντικατάσταση διατμητικής τάσης τοιχωμάτων (ή διατμητικής ταχύτητας) με την εξίσωση από τη **διαστατική ανάλυση:**

ισχύει: $T_0 = C_f \rho \frac{U_0^2}{2}$ } Απειρίτητα
υποβλή

↓
διατμητική τάση
στο σημείο ύψους

- Ενδιάμεσα, μεταξύ λείων και τραχέων τοιχωμάτων?

Συνδυασμός εξ. για λεία τοιχώματα, πειραματικά δεδομένα

$$T_o = \frac{f \rho V^2}{8}$$

Επιφάνεια $V_{\text{ακ}} = \sqrt{\frac{T_o}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}}$

αντικαθιστών, για λεία τοιχώματα:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.91$$

Πείραμα: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(\text{Re} \sqrt{f}) - 0.8$

λεία τοιχώματα $f = f(\text{Re})$ μόνο

Συνδυασμός εξ. για τραχέα τοιχώματα, πειραματικά δεδομένα

Τραχεία: , ύψους , αντιστοίχως

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \left(\frac{r_0}{k} \right) + 1.75$$

Πείραμα: $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{r_0}{k} \right) + 1.75$

$$r_0 = D/4$$

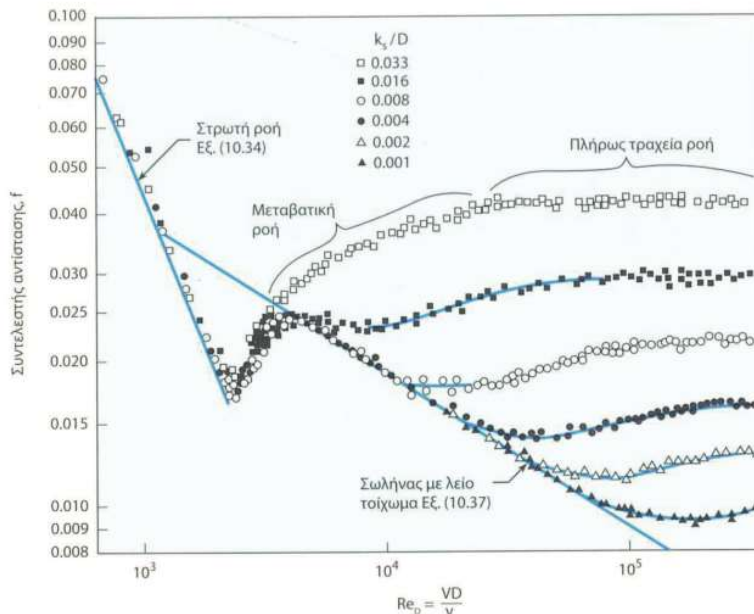
$$f = f(k/D)$$

Τραχεία
Μολύβι

Ισοδύναμη τραχύτητα

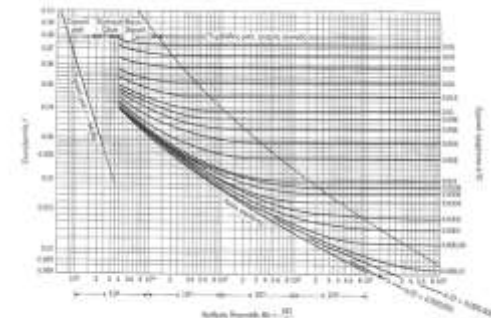
- Πείραμα Nikuradse

Ιδεατοί σωλήνες με επικόλληση κόκκων άμμου μετά από κόσκισμα, θεώρηση της τραχύτητας με βάση τη διάμετρο των κόκκων άμμου



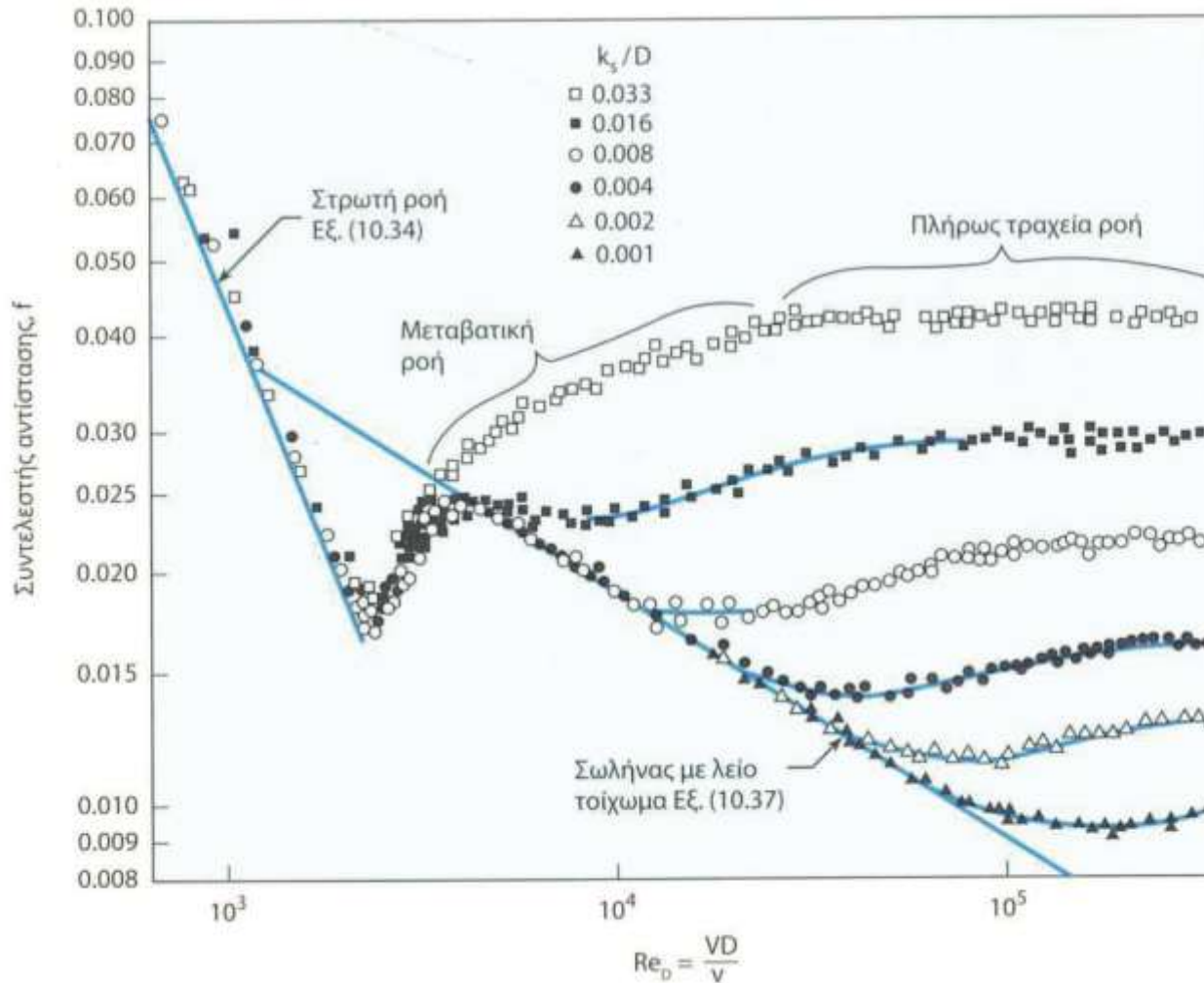
- Colebrook –White

Ο Colebrook ήταν μαθητής του Nikuradse και μελέτησε τους σωλήνες εμπορίου. Επινόησε την έννοια της **ισοδύναμης τραχύτητας (κόκκων άμμου)** που αναφέρεται σε τραχύτητα εργαστηριακού σωλήνα (με επικολημένους κόκκους άμμου) όταν και **οι δύο σωλήνες εμπορίου και εργαστηριακός έχουν το ίδιο συντελεστή τριβής f στην πλήρως αναπτυγμένη τυρβώδη (υδραυλικά τραχεία) περιοχή** (Δημητρίου, 1995).



Πείραμα Nikuradse

Ιδεατοί σωλήνες με επικόλληση κόκκων άμμου

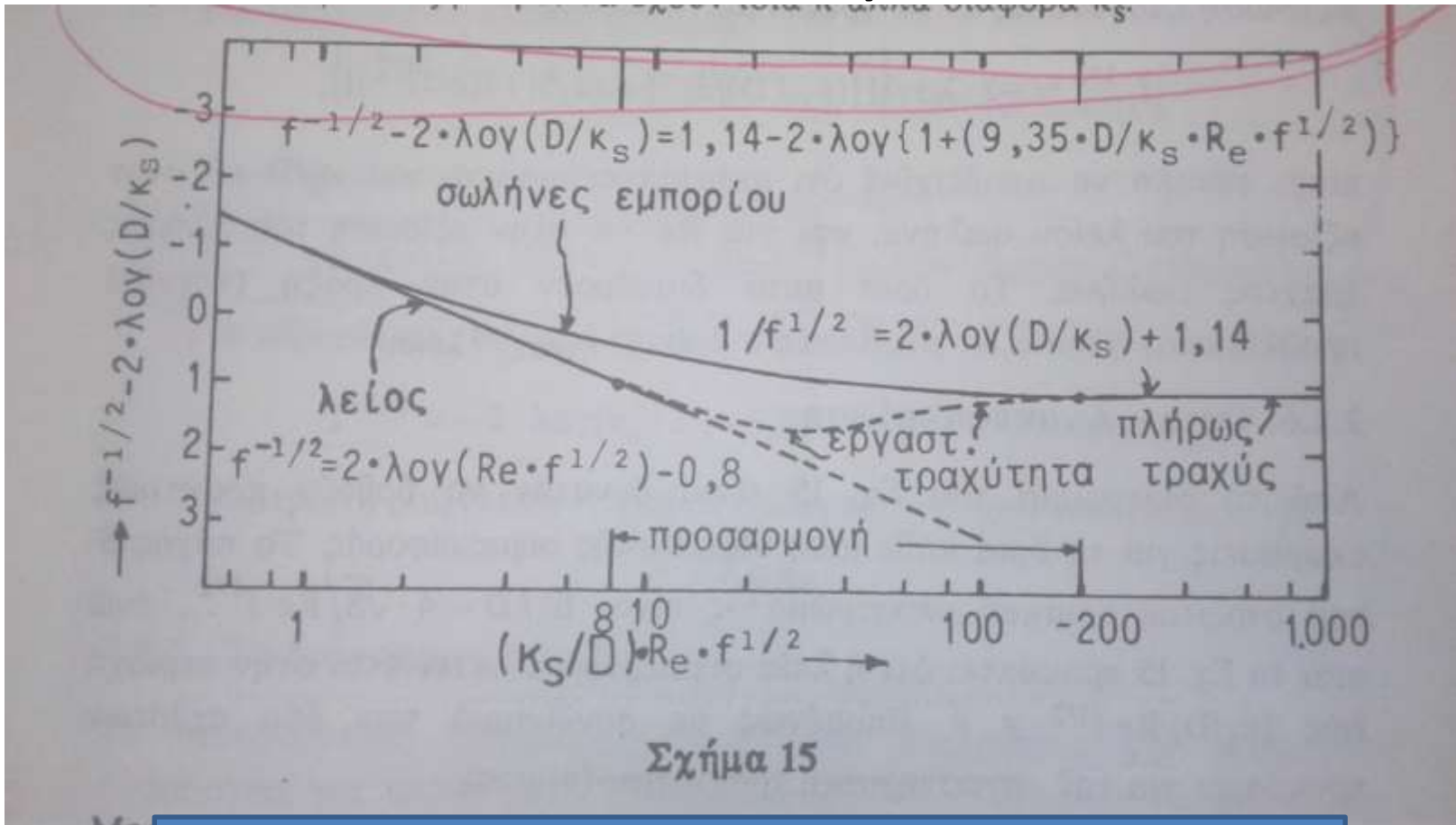


Colebrook και Nikuradse (Δημητρίου, 1995)

- Διαπίστωσε ότι για υψηλούς αριθμούς Re κάθε σωλήνας του εμπορίου **δίνει συντελεστές τριβής f ανεξάρτητες του Re**
- Τούτο επέτρεψε τη σύγκριση με το **συντελεστή τριβής των εργαστηριακών σωλήνων** με **κόκκους άμμου για την υδραυλικώς τραχεία περιοχή**

Για πλήρη υδραυλικά τραχεία τοιχώματα οι δύο θεωρήσεις συμπίπτουν. Διαφοροποιούνται στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ λείας και υδραυλικά τραχέων τοιχωμάτων


Colebrook and Nikuradse (Δημητρίου, 1995)



Για πλήρη υδραυλικά τραχέα τοιχώματα οι δύο θεωρήσεις συμπίπτουν. Διαφοροποιούνται στην ενδιάμεση περιοχή μεταξύ λείας και υδραυλικά τραχέων τοιχωμάτων

Colebrook and Nikuradse (3)

- Επιπλέον., ο Colebrook επινόησε την εξίσωση για το συντελεστή τριβής που ισχύει μεταξύ της λείας και της πλήρως τυρβώδους περιοχής για σωλήνες εμπορίου

Μεταβατική περιοχή		$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$	$Re > 4000$
-----------------------	--	---	-------------

Ισοδύναμη τραχύτητα

· 269

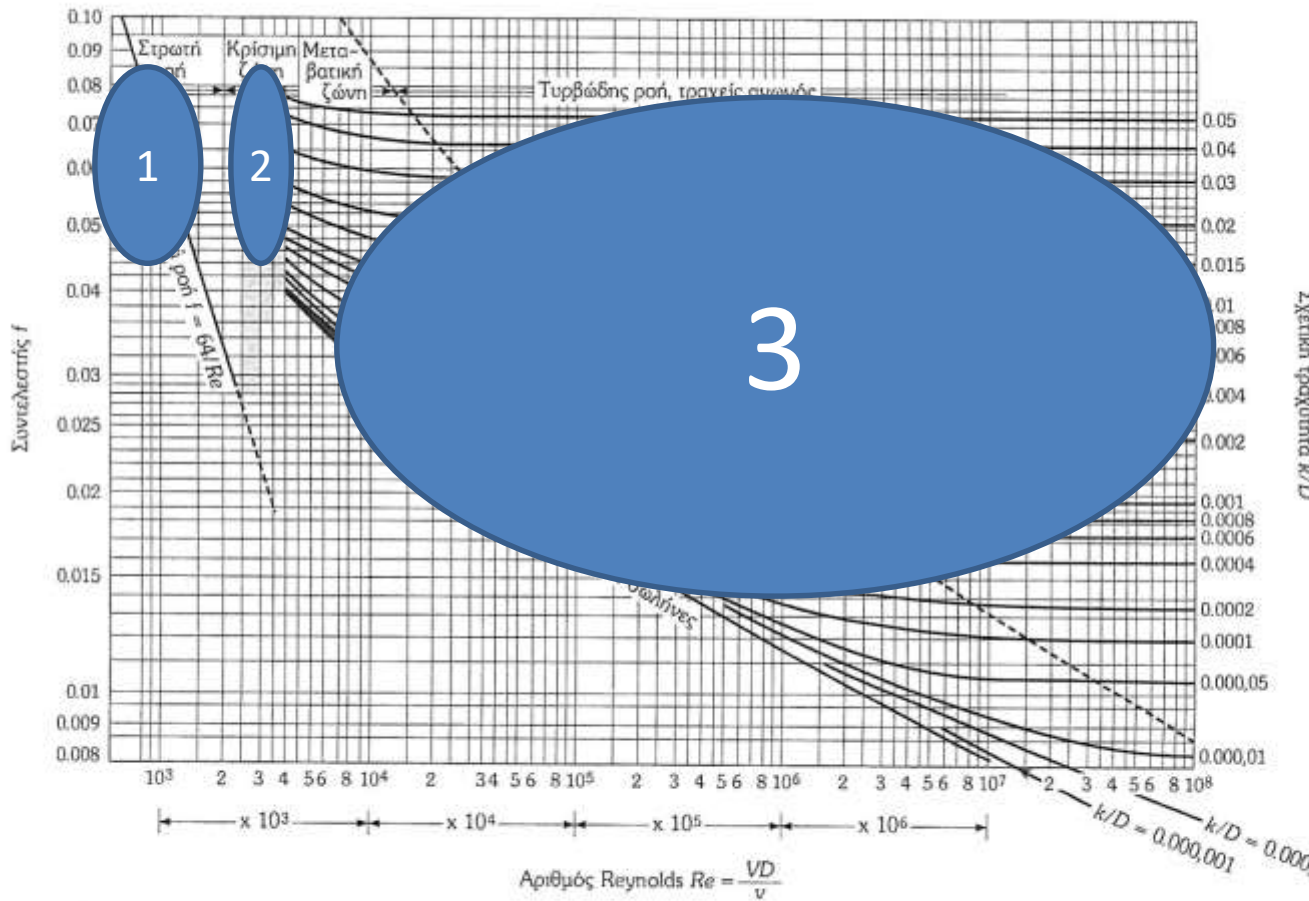
12.6.2 Υδραυλικά Λεία και Τραχέα Όρια

Όλα τα φυσικά στερεά όρια έχουν μικρές ή μεγάλες προεξοχές που αποτελούν την *τραχύτητα* κ του ορίου. Σε γενικές γραμμές, το μέγεθος των προεξοχών, η μορφή και η χωρική κατανομή τους επηρεάζουν τη ροή ρευστού που γίνεται σε επαφή με το θεωρούμενο στερεό όριο. Λόγω του μεγάλου πλήθους και ακανόνιστης διάταξης των προεξοχών η περιγραφή τους, όσον αφορά την επίδραση που έχουν στη ροή, γίνεται με τη βοήθεια του στατιστικού μεγέθους της ισοδύναμης ταχύτητας. *Ισοδύναμη ταχύτητα* κ_s είναι η τεχνητή τραχύτητα λείας επιφάνειας στην οποία έχουν επικολληθεί σε πυκνή διάταξη κόκκοι άμμου διαμέτρου κ_s και η οποία παρουσιάζει την ίδια αντίσταση τριβής με την θεωρούμενη φυσική επιφάνεια.

Η τραχύτητα των υπολογισμών μας δεν είναι η τραχύτητα του υλικού αλλά ή ισοδύναμη τραχύτητα μιας διάταξης σωλήνα επικολλημένων με κόκκους άμμου (ισοδύναμη τραχύτητα)

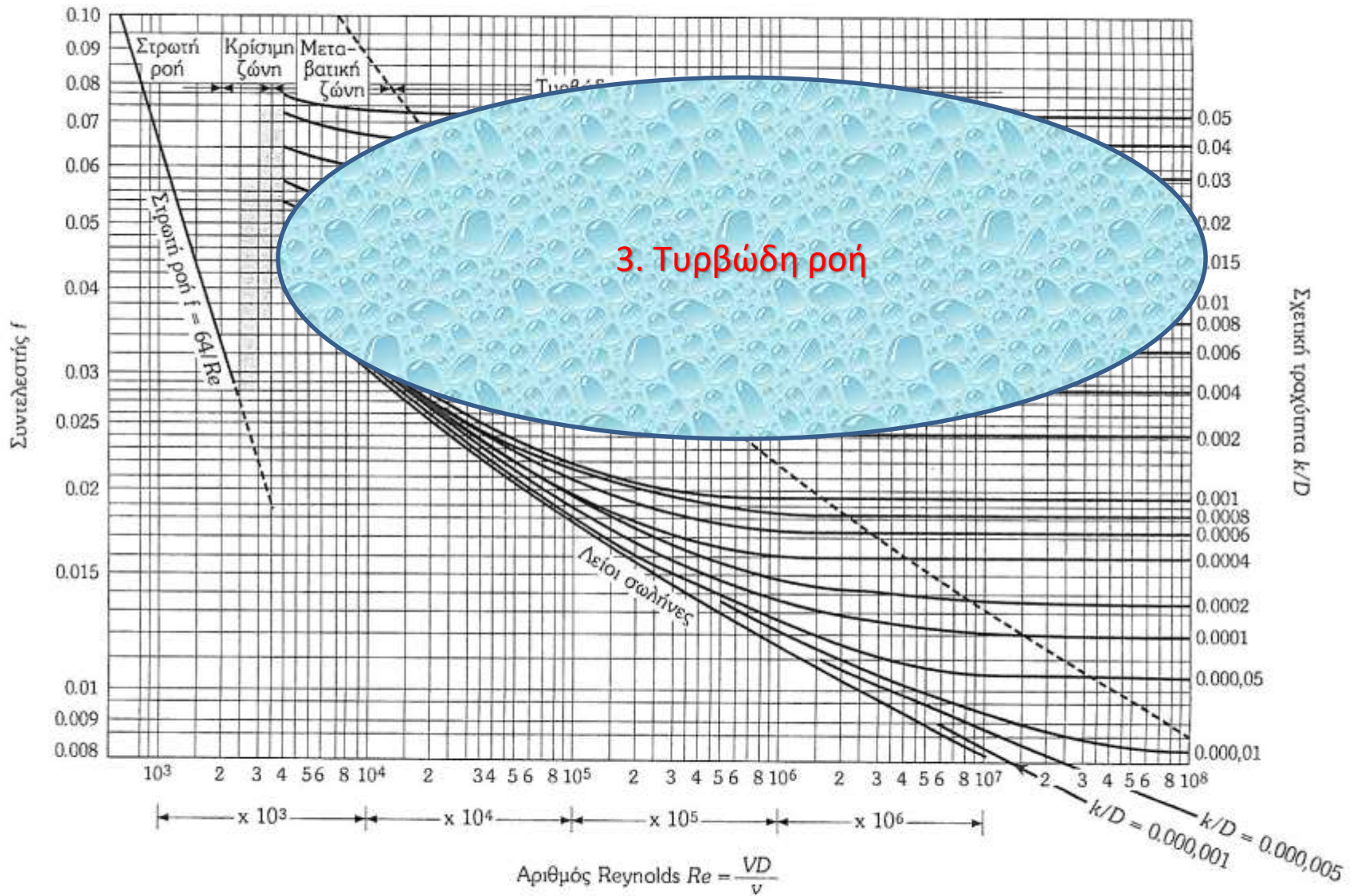
Διάγραμμα Moody, f

1. Στρωτή ροή
2. Μεταβατική περιοχή
3. Τυρβώδης ροή:
 - (Υδραυλικώς) Λείοι σωλήνες
 - (Υδραυλικώς) τραχείς σωλήνες
 - Μεταβατική περιοχή (εντός τυρβώδους ροής)



Σχ. 2.2: Διάγραμμα Moody.

Διάγραμμα
Moody
Εύρεση
συντελεστή
τριβής
Ενσωματώνει
όλη τη
θεωρητική
πληροφορία



Σχ. 2.2: Διάγραμμα Moody.

Στρωτή ροή από ΕΞ. Naviers-Stokes

$$h_1 - h_2 = \frac{64}{Re} \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

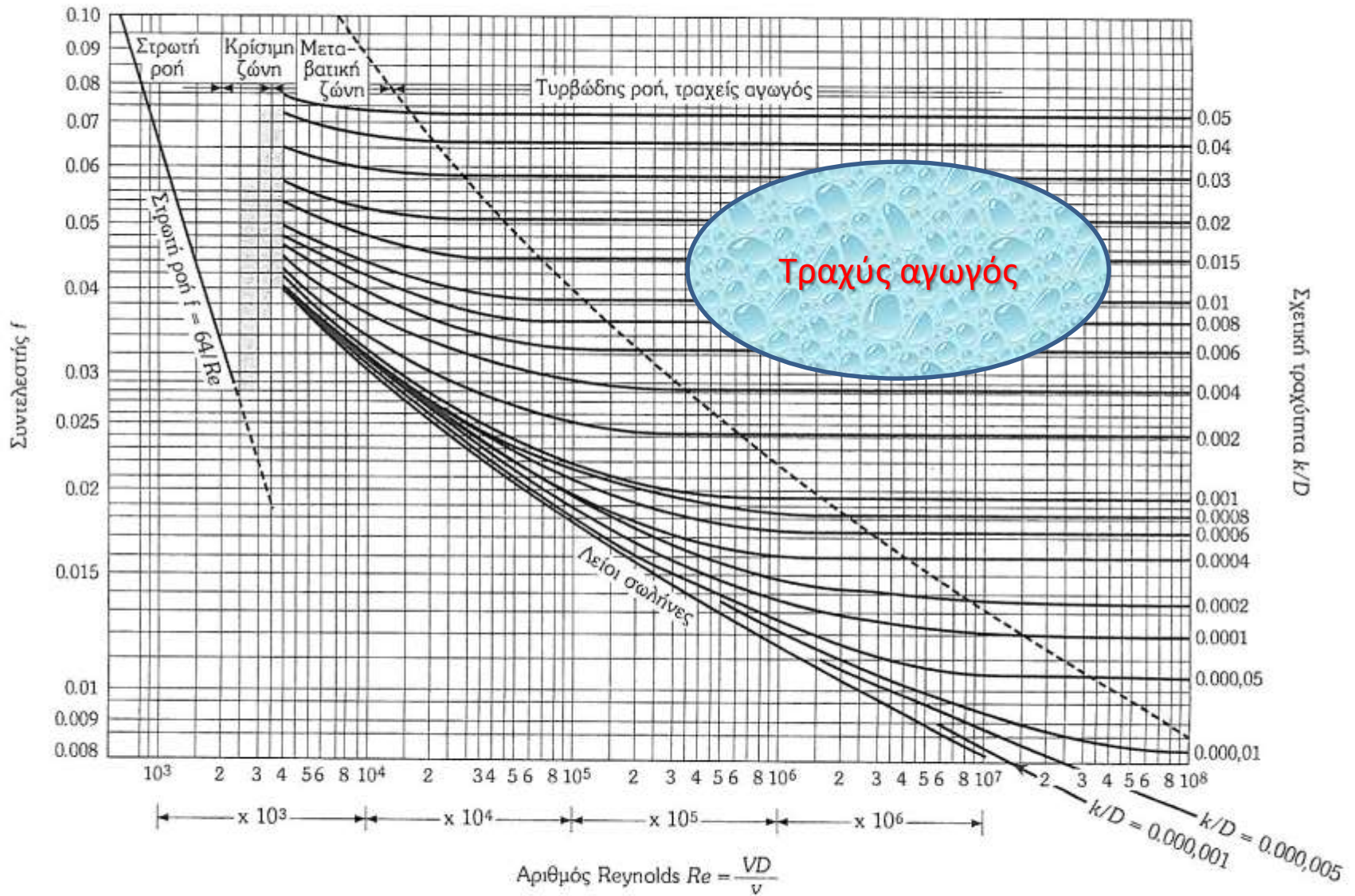
Απώλειες ενέργειας λόγω τριβής: (h_f)

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Εξίσωση Darcy-Weisbach

f : συντελεστής τριβής

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{για σταθερή στρωτή ροή}$$



Σχ. 2.2: Διάγραμμα Moody.

Για τραχείς αγωγούς ο συντελεστής τριβής εξαρτάται μόνο από τη σχετική τραχύτητα (ανεξάρτητος από το Re) και για δεδομένο υλικό και διάμετρο παραμένει σταθερός.

(Ισοδύναμη) Τραχύτητα αγωγών προσαύξηση για υδραυλικό δίκτυο

- Θεωρητικά: Τραχύτητα υλικού από εργοστάσια (Υδραυλική, σε ένα κόσμο αγγελικά πλασμένο...)
- Σε εφαρμογές: Αυξάνεται η τραχύτητα του υλικού μία και πλέον τάξη μεγέθους για να προβλεφθεί η γήρανση αλλά και οι τοπικές απώλειες (βλπ Τσακίρης και Σπηλιώτης, 2010)

Προσαύξηση τραχύτητας για υδραυλικό δίκτυο (Κουτσογιάννης και Ευστρατιάδης, 2014)

Τιμές της τραχύτητας σχεδιασμού

- Δεδομένου ότι τα δίκτυα διανομής σχεδιάζονται με ορίζοντα 40 ετών, οι τιμές εφαρμογής των συντελεστών τραχύτητας πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τη γήρανση των αγωγών.
- Κατά κανόνα οι τιμές εφαρμογής λαμβάνονται προσαυξημένες (ισοδύναμη τραχύτητα) προκειμένου να συμπεριληφθούν και τοπικές απώλειες (βλ. επόμενη σελίδα).
- Η ελάχιστη αποδεκτή ισοδύναμη τραχύτητα, με την προϋπόθεση νερού που δεν προκαλεί διάβρωση ή επικαθήσεις αλάτων, λαμβάνεται $\varepsilon = 0.1 \text{ mm}$ ($\varepsilon_* = 2$).
- Στη συνήθη περίπτωση πλαστικών αγωγών, με την υπόθεση ότι αναμένονται φαινόμενα διάβρωσης ή επικαθήσεων αλάτων, συστήνεται $\varepsilon = 1.0\text{-}2.0 \text{ mm}$ ($\varepsilon_* = 20\text{-}40$).

Ενδεικτικός πίνακας
εργαστηριακών τιμών
ισοδύναμης τραχύτητας τυπικών
υλικών (Δεν συστήνεται η χρήση
τους σε μελέτες δικτύων)

Υλικό	ε (mm)
Ορείχαλκος, χαλκός	0.0015
Χάλυβας εμπορίου ή σφυρήλατος σίδηρος	0.045
Χυτοσίδηρος με ασφαλική επάλειψη	0.12
Γαλβανισμένος σίδηρος	0.15
Χυτοσίδηρος χωρίς επάλειψη	0.26
Σκυρόδεμα	0.3 – 3.0
Πλαστικό (λείοι σωλήνες εργοστασίου)	< 0.01
Πλαστικό, μετά από χρήση	> 0.10

Ισοδύναμη τραχύτητα σε Υδραυλικά Έργα κατά την Ελληνική πρακτική.

- Μία άλλη προσέγγιση με ευρεία εφαρμογή στις Ελληνικές μελέτες, ιδιαίτερα στο εσωτερικό υδραγωγείο, αποτελεί η προσαύξηση της τραχύτητας προκειμένου να συμπεριληφθούν οι τοπικές απώλειες, κατά μία τουλάχιστον τάξη μεγέθους (Βαμβακερίδου, 2000 και Βασιλόπουλος, 2008). Έτσι σε αυτήν την περίπτωση προσαυξάνοντας την τραχύτητα του υλικού κατά μία τάξη μεγέθους, ενώ θα μπορούσε να ονοματισθεί η χρησιμοποιούμενη για τους υδραυλικούς υπολογισμούς τραχύτητα ως τραχύτητα υδραυλικού συστήματος (Τσακίρης και Σπηλιώτης, 2010).
- Πράγματι, συνήθως, σε ένα σύγγραμμα υδραυλικής οι εφαρμογές αναφέρονται σε συνθήκες εργαστηρίου (π.χ. σωλήνες μερικών εκατοστών) ενώ σε πραγματικά δίκτυα υπάρχουν χιλιόμετρα αγωγών με πλήθος εξαρτημάτων, αλλαγές ροής κ.λ.π. που είναι πρακτικά αδύνατον να προσδιοριστούν όλες αυτές οι συνακόλουθες τοπικές απώλειες.

Ανάλογα με τη μορφολογία του δικτύου . . .

- Είναι προφανές λοιπόν, ότι η επιλογή της τραχύτητας για υδραυλικές μελέτες εμπεριέχει μία εγγενή ασάφεια. Οι θεωρούμενες τιμές εξαρτώνται από το υλικό αλλά και από τη διάταξη του αγωγού στο δίκτυο. Ενδεικτικά αναφέρεται, ότι πολλοί Έλληνες μελετητές μηχανικοί στην περίπτωση των υδραυλικών συστημάτων, για χαλυβοσωλήνες επιλέγουν ισοδύναμη τραχύτητα 1-3 mm και για αγωγούς από πολυαιθυλένιο 0.1 - 1mm.
- Σύμφωνα με τον Παντοκράτορα, 2015, **καθοριστικό στοιχείο για την επιλογή της τραχύτητας στο εσωτερικό υδραγωγείο πρέπει να είναι η διάταξη του σωλήνα στο δίκτυο.** Η λογική της αύξησης της τραχύτητας στηρίζεται στο γεγονός ότι οι αγωγοί μεταφοράς μεγάλων αποστάσεων έχουν περιορισμένο αριθμό εξαρτημάτων και ειδικών τεμαχίων, **οι κύριοι αγωγοί των εσωτερικών δικτύων έχουν περισσότερα και οι αγωγοί διανομής ακόμη περισσότερα.** Για τους αγωγούς των εσωτερικών δικτύων **συνιστάται τιμή της τραχύτητας $k=0.4$ mm.** Σε δίκτυα ύδρευσης με **πολλαπλούς βρόχους η τιμή 0.4 mm αυξάνεται σε $k=1$ mm (Παντοκράτορας, 2015).**
- Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι οι τιμές που λαμβάνονται υπ' όψιν στην Ελβετία είναι ακόμη μεγαλύτερες. Για αγωγούς μεταφοράς λαμβάνεται τραχύτητα $k=0.1$ mm. Για κύριους αγωγούς των εσωτερικών δικτύων λαμβάνεται τιμή $k=1$ mm. Για τους αγωγούς διανομής του νερού των εσωτερικών δικτύων λαμβάνεται τιμή $k=5$ mm (Παντοκράτορας, 2015).

Σύνοψη

- Χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη τραχύτητα, δηλαδή μία εικονική τραχύτητα του πειράματος σωλήνα με κόκκους άμμου, που αντιστοιχεί στο σύστημα σωληνώσεων
- Δε χρησιμοποιούμε την ισοδύναμη τραχύτητα του σωλήνα από το εργοστάσιο αλλά την ισοδύναμη τραχύτητα του συστήματος σωληνώσεων (π.χ. ενσωμάτωση της γήρανσης ή των τοπικών απωλειών ενέργειας)

Στην ενδιάμεση περιοχή, συνδυασμός

- Εξ. Colebrook-White. Δυστυχώς, πεπλεγμένη μορφή

Μεταβατική περιοχή	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$	$Re > 4000$
--------------------	---	-------------



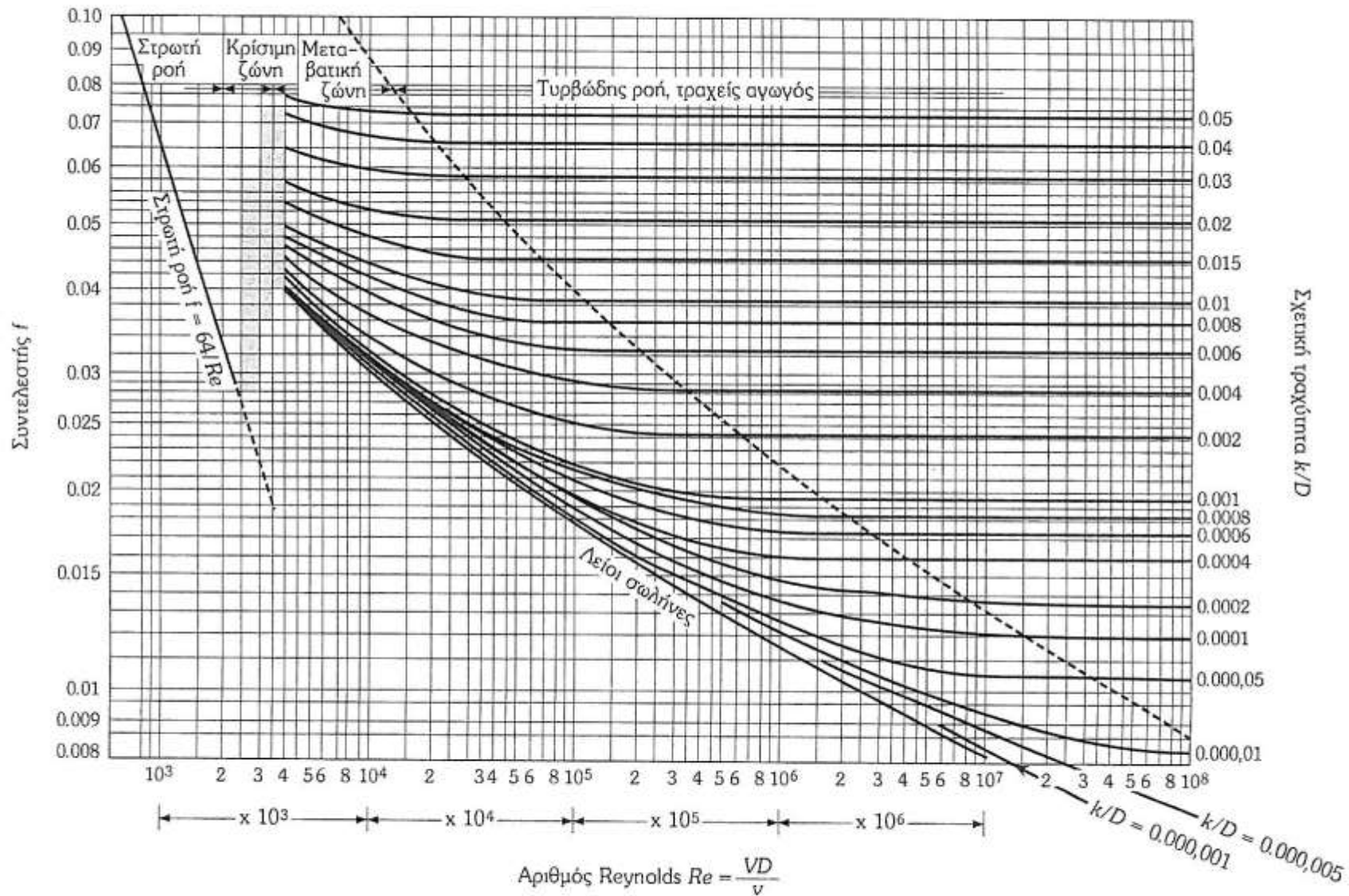
- Διάγραμμα Moody
 - Προσοχή ισοδύναμη τραχύτητα: Τραχύτητα υλικού που αντιστοιχεί σε διάμετρο κόκκου άμμου

- Η εξίσωση των Colebrook-White καλύπτει τις «ακραίες» καταστάσεις των λείων σωλήνων και των τραχέων σωλήνων εφόσον για $(k/D) \rightarrow 0$ ή $Re \rightarrow \infty$ αντίστοιχα οδηγούμαστε στις εξισώσεις των λείων σωλήνων και της πλήρους ανεπτυγμένης τυρβώδους ροής αντίστοιχα όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 2.1.

πρακτικά

Πίν. 2.1: Τιμές του συντελεστή τριβής f

Είδος Ροής	Εξίσωση f	Περιοχή ισχύος
Στρωτή	$f = \frac{64}{Re}$	$Re < 2100$
Λείοι σωλήνες	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$	$(k/D) \rightarrow 0, Re > 4000$
Μεταβατική περιοχή	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$	$Re > 4000$
Πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδη ροή	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} \right)$	$Re > 4000$, σημαντικοί αριθμοί Re και σημαντική τραχύτητα



Σχ. 2.2: Διάγραμμα Moody.

- Για $Re < 2100$ η ροή είναι στρωτή και ο συντελεστής τριβής μπορεί να προσδιοριστεί από την εξίσωση:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (2.14)$$

- Για τιμές μεταξύ $2100 < Re < 4000$ όπου πραγματοποιείται η μετάβαση από τη στρωτή στην τυρβώδη ροή υπάρχει αστάθεια στη ροή.
- Για τιμές $Re > 4000$ μπορεί με ικανοποιητική ακρίβεια να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση των Colebrook - White.
- Για τυρβώδη ροή και λείους σωλήνες ($k/D \rightarrow 0$) ο συντελεστής τριβής εξαρτάται μόνο από τον αριθμό Re και συγκεκριμένα η αύξηση του αριθμού Re οδηγεί σε μείωση του συντελεστή τριβής:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (\text{λείοι σωλήνες}) \quad (2.15)$$

Η περίπτωση των λείων σωλήνων περιγράφεται από την κάτω καμπύλη που περιβάλλει το διάγραμμα Moody. Παρατηρήστε ότι για μικρές τιμές της τραχύτητας και ένα εύρος τιμών Re οι καμπύλες του συντελεστή τριβής συγκλίνουν στην καμπύλη των λείων σωλήνων. Η χρήση νέων υλικών που χαρακτηρίζονται από μικρή τραχύτητα έδωσε αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον στην προσέγγιση των λείων σωλήνων (Larock et al., 2000).

- Η αύξηση του αριθμού Re οδηγεί σε μείωση του συντελεστή τριβής f ενώ από ένα σημείο και πέρα για αγωγό δεδομένης τραχύτητας, ο συντελεστής τριβής δεν αλλάζει με την περαιτέρω αύξηση του αριθμού Re . Επίσης, όσο αυξάνεται η τραχύτητα αυξάνεται και ο συντελεστής τριβής f . Για μεγάλες τιμές του αριθμού Re και σημαντική τραχύτητα ο συντελεστής τριβής εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της σχετικής τραχύτητας:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7D} \right) \quad (2.16)$$

(πλήρως ανεπτυγμένη τυρβώδης ροή, μεγάλες συγκριτικά τιμές Re και k/D).

Τσακίρης και
Σπηλιώτης, 2011

Γενίκευση Σε μη κυκλικές διατομές

δ) Συναρτησιακή εξίσωση τριβής

$$f = f \left(Re, \frac{\kappa}{D}, \text{εχήμα}, \text{μέγεθος} \right)$$

Διάγραμμα Moody

ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΣ

Επίλυση προβλημάτων σε σωληνωτούς αγωγούς
υπό πίεση

- Σταθερή (μόνιμη) ροή
- Ασυμπίεστα ρευστά ($\rho = \text{σταθ.}$)

α) Εξίσωση συνέχειας

$$Q = E \cdot V = \frac{\pi D^2}{4} V$$

β) Εξίσωση κίνησης Darcy-Weisbach

$$h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

γ) Συναρτησιακή εξίσωση τριβής

$$f = f \left(Re, \frac{\kappa}{D}, \text{σχήμα, μέγεθος} \right)$$

Διάγραμμα Moody

- 8 άγνωστα μεγέθη: $h_f, f, L, D, V, Q, \nu, \kappa$
- 3 εξισώσεις
- 5 μεταβλητές: γνωστές

Υπολογισμός της απώλειας φορτίου

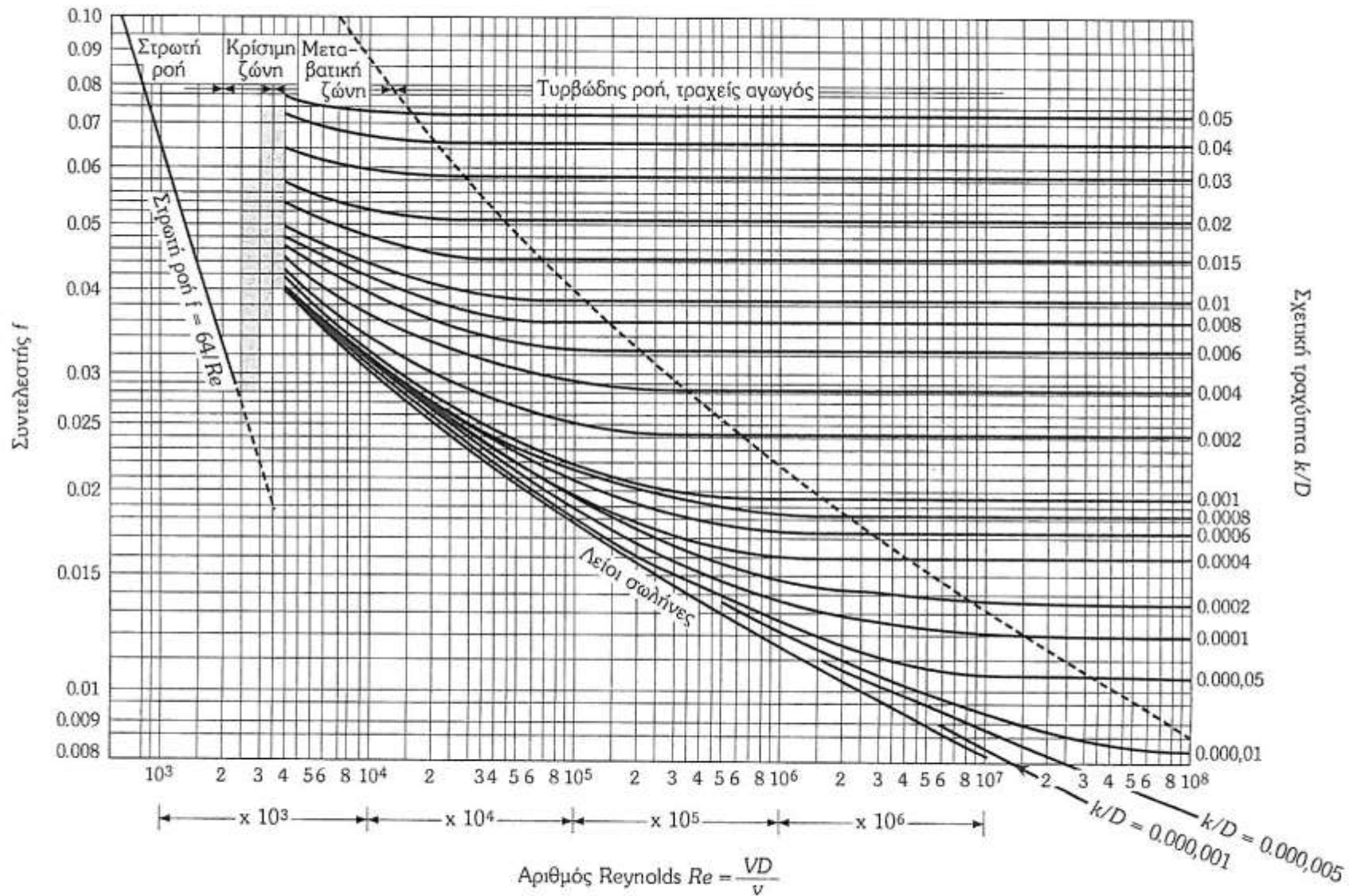
- Ζητείται : h_f
- Δίδονται : Q ή V, D, L, κ, ν
- Υπολογίζουμε : $\frac{\kappa}{D}, Re = \frac{VD}{\nu}$
- Διάγραμμα Moody : f
- $h_f = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$

Αριθμητικό παράδειγμα

- Σωληνωτός αγωγός από χυτοσίδηρο $\Rightarrow \kappa = 0.000259 \text{ m}$
- $D = 0.2032 \text{ m}, L = 1000 \text{ m}$
- $Q = 0.13 \text{ m}^3/\text{s}, \nu = 1.01 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \quad (20^\circ \text{C})$
- $h_f = ?$ (απώλεια λόγω τριβών στον αγωγό)

Λύση

- $\frac{\kappa}{D} = \frac{0.000259}{0.2032} = 0.001275$
- $V = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{4 \times 0.13}{3.14 \times 0.2032^2} = 4 \text{ m/s}$
- $Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4 \times 0.2032}{1.01 \times 10^{-6}} = 8.05 \times 10^5$
- Διάγραμμα Moody $\Rightarrow f = 0.0205$
- $h_f = 0.0205 \times \frac{1000}{0.2032} \times \frac{4^2}{2 \times 9.81} = 82.3 \text{ m}$



Σχ. 2.2: Διάγραμμα Moody.

Πίν. 2.2: Προσδιορισμός των γραμμικών απωλειών για κυκλικούς αγωγούς υπό πίεση

	Εξίσωση γραμμικών απωλειών ενέργειας	Αντίσταση αγωγού (διεθνές σύστημα μονάδων)	Εκθέτης της εξίσωσης
Darcy-Weisbach	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{8fL}{gn^2 D^5}$ μεταβλητή με την παροχή	$n = 2$
Darcy-Weisbach προσέγγιση λογαριθμικής ευθείας	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{8La}{gn^2 D^5}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 2 - b$ (a, b προκύπτουν από εκτίμηση του εύρους της παροχής)
Hazen-Williams	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{10.7L}{C^{1.852} D^{4.87}}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 1.852 < 2$
Manning	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{10.29 n_{MANNING}^2 L}{D^{5.33}}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 2$

Η εξίσωση Darcy-Weisbach πρέπει να προτιμάται από τις άλλες εμπειρικές ή ημιεμπειρικές εξισώσεις προσδιορισμού των απωλειών, γιατί έχει θεωρητική βάση (διατήρηση της ορμής) και ενσωματώνει με το συντελεστή f , πειραματικά δεδομένα που εδράζονται στη θεώρηση του οριακού στρώματος

Οι Darcy - Weisbach κατέληξαν στην παρακάτω σχέση που αποδίδει το γραμμικό ύψος απωλειών h_f , συναρτήση του συντελεστή τριβής f , της διαμέτρου του αγωγού, του μήκους του αγωγού και της ταχύτητας:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (2.9)$$

ή ισοδύναμα θέτοντας όπου $Q = V \cdot A = V \cdot \pi(D/2)^2$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(\pi D^2/4)^2},$$

ή ισοδύναμα:

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

όπου: $f = f(Re, k/D)$ = συντελεστής τριβής αδιάστατος αριθμός,

Q = παροχή (m^3/s),

V = ταχύτητα (m/s),

L = μήκος του αγωγού για το οποίο προσδιορίζονται οι απώλειες (m) και

D = (εσωτερική) διάμετρος του αγωγού (m).

Με τον όρο αντίσταση του αγωγού εννοείται η ποσότητα:

$$R = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} \quad (2.10)$$

Οπότε:

$$h_f = RQ^2 \quad (2.11)$$

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

όπου: $f = f(Re, k/D)$ = συντελεστής τριβής αδιάστατος αριθμός,
 Q = παροχή (m^3/s),
 V = ταχύτητα (m/s),
 L = μήκος του αγωγού για το οποίο προσδιορίζονται οι απώλειες
(m) και
 D = (εσωτερική) διάμετρος του αγωγού (m).

Με βάση τον παραπάνω μετασχηματισμό παρατηρείστε ότι με τη μείωση της διατομής (D) αυξάνονται σημαντικά οι απώλειες.
Αύξηση της διατομής \rightarrow σημαντική μείωση απωλειών,
αλλά...αύξηση κόστους

Για τυρβώδης ροές, $Re > 10^4$, προσεγγιστική εξίσωση:

Για να αντιμετωπισθεί το πρόβλημα της εύρεσης του f από μία πεπλεγμένη εξίσωση αναπτύχθηκαν διάφορες ρητές εξισώσεις.

Ευρέως διαδεδομένη είναι η ρητή εξίσωση των Swamee and Jain (1976) για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής f :

$$f = \frac{0.25}{\left[\log \left(\frac{5.74}{Re^{0.9}} + \frac{k/D}{3.7} \right) \right]^2} \quad (2.17)$$

Η εξίσωση των Swamee and Jain προσεγγίζει την εξίσωση των Colebrook-White με μεγάλη ακρίβεια και χρησιμοποιείται ευρύτατα στο σχεδιασμό αγωγών υπό πίεση. Το σφάλμα στο f είναι της τάξης του $\pm 1\%$ όταν $Re > 10^4$, γεγονόςς σύνηθες στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα κλειστών αγωγών.