

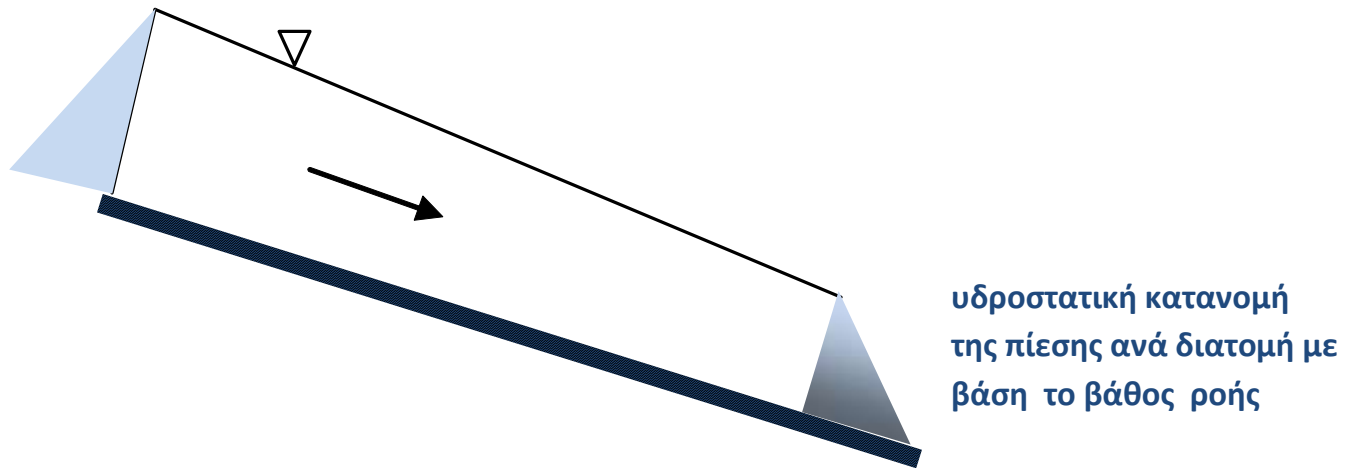
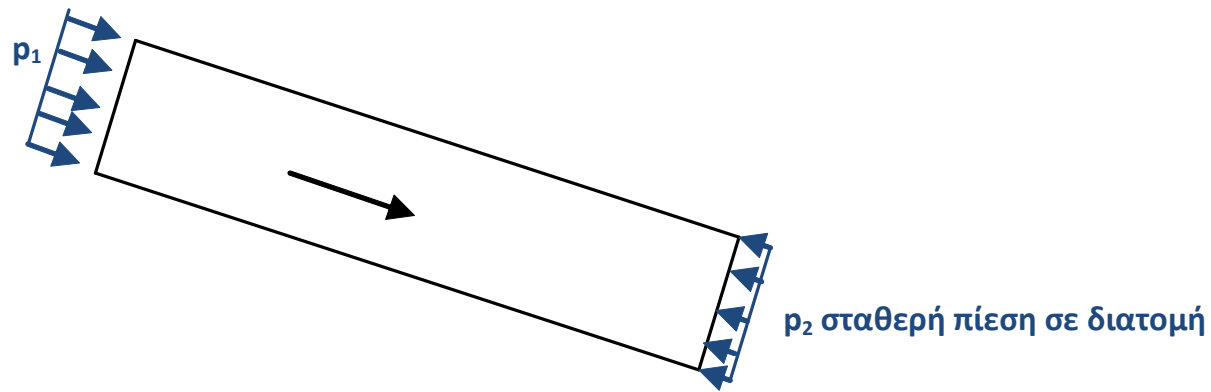
# Υδραυλική κλειστών αγωγών

Δρ Μ.Σπηλιώτης

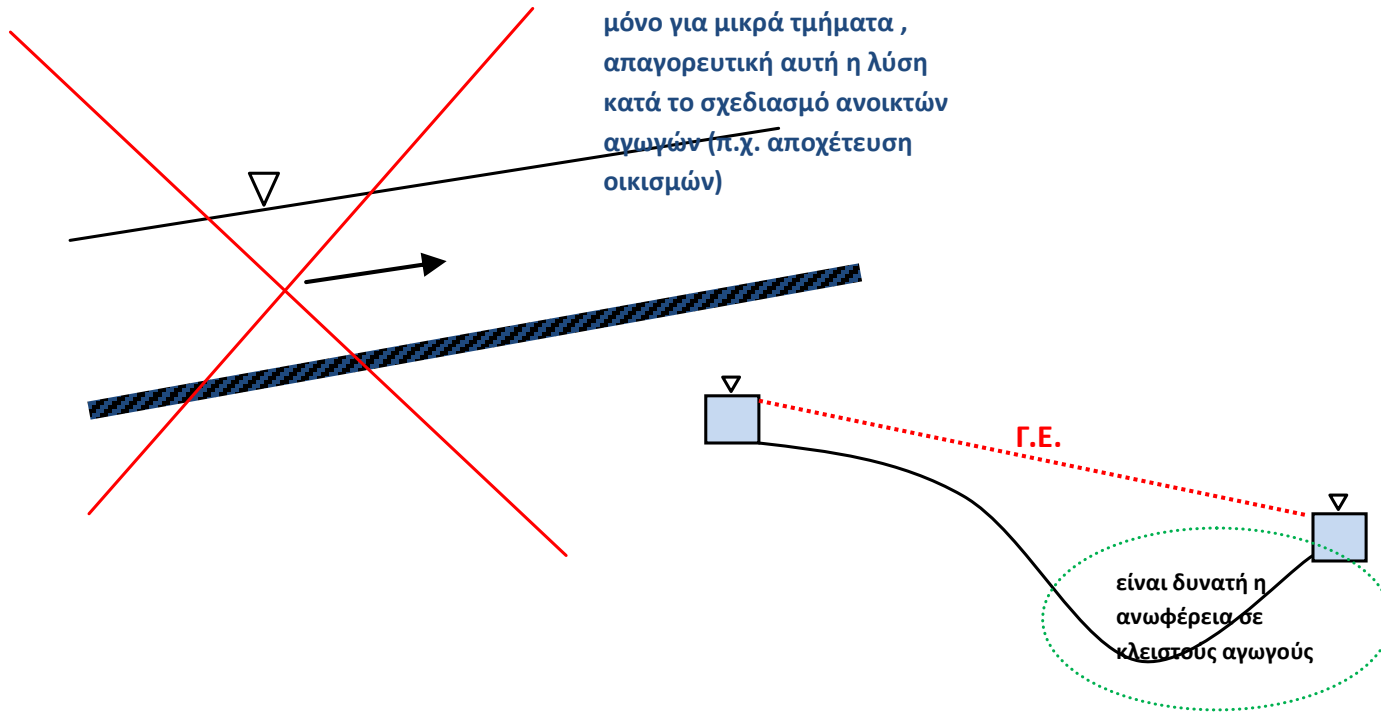
Βασικές αρχές

Γραμμικές απώλειες  
υδραυλικού φορτίου

<b>Ανοικτοί αγωγοί</b>	<b>Κλειστοί αγωγοί</b>
<b>Σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια</b>	<b>δε σχηματίζουν ελεύθερη επιφάνεια</b>
Ήπιες κλίσεις, άνοδος πυθμένα μόνο σε τοπικές συναρμογές	Ευκολία προσαρμογής στο ανάγλυφο
Η ροή μεταβάλλεται χωρικά με τη διαφορά αναγλύφου	Για σταθερή διάμετρο η ταχύτητα δεν μεταβάλλεται (πλην τοπικών διαταραχών) με τη διαφορά αναγλύφου
Ποικιλία διατομών	Συνήθως κυκλικοί
Συνήθως υδροστατική κατανομή των πιέσεων σε μία διατομή (π.χ. πλην καμπύλων διατομών)	Συνήθως θεωρείται σταθερή πίεση σε μία διατομή
<b>Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, σταθερή ταχύτητα, ισορροπία δυνάμεων</b>	
Ομοιόμορφη ροή, εξίσωση Manning, ισορροπία δυνάμεων βάρους με την αντίσταση στη ροή από τον πυθμένα και τις όχθες του ανοικτού αγωγού, επίπεδος πυθμένας	Εύκολα επιτεύξιμη ομοιόμορφη ροή για σταθερή διάμετρο, ισορροπία μεταξύ δυνάμεων πίεσης και βάρους με την αντίσταση λόγω τριβών τριβές του τοιχωμάτων του αγωγού
Η κλίση του πυθμένα ταυτίζεται με την κλίση της γραμμής ενέργειας στην ομοιόμορφη ροή	Η κλίση ενέργειας καθορίζεται από την κλίση των γραμμικών απωλειών δεν ισχύει ότι και στους ανοικτούς αγωγούς
<b>Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται η ειδική ενέργεια</b>	
Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται η <b>ειδική ενέργεια</b>	Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται η <b>πιεζομετρική γραμμή</b>
Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται ο <b>αριθμός Fr (προσοχή στον τύπο της διατομής)</b>	Μεθοδολογικά, συνήθως χρησιμοποιείται ο <b>αριθμός Re</b>
Χρήση: Αποχετεύσεις ομβρίων και ακαθάρτων, αρδεύσεις για μεγάλες παροχές κλπ.	Χρήση: Δυσκολία αναγλύφου, δίκτυα διανομής, υποχρεωτικά σε δίκτυα διανομής οικισμών.

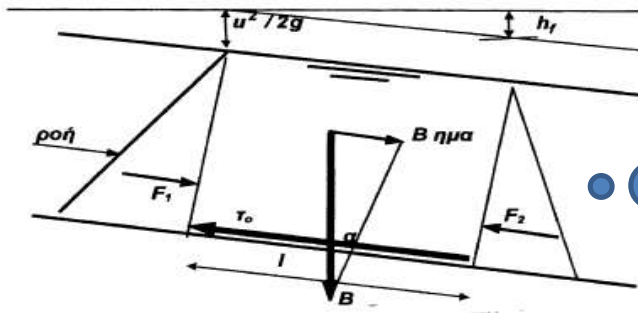


Σχ. Κατανομή της πίεσης σε διατομή σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς



Σχ. Ανωφέρειες σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς

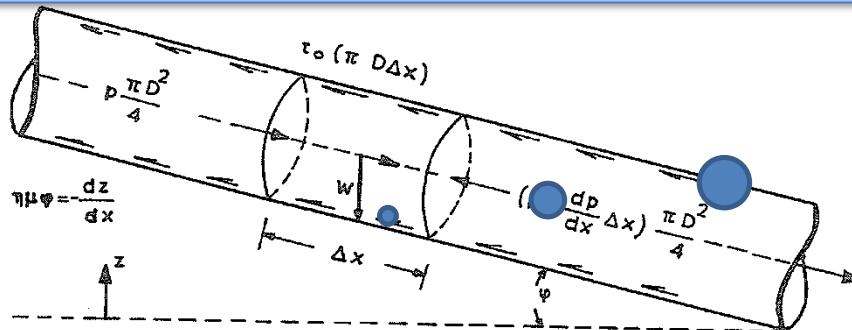
**Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, ανοικτοί αγωγοί:** Ομοιόμορφη ροή όταν το ύψος ροής παραμένει σταθερό που είναι ταυτόσημο με τη θεώρηση σταθερής ταχύτητας  $\rightarrow$  β' νόμος του Νεύτωνα  $\rightarrow$  άθροισμα δυνάμεων μηδέν, ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων βάρους με τη δύναμη αντίστασης στη ροή λόγω τριβής



Σχήμα 4.1 Όγκος ελέγχου διά την απόδειξη της εξισώσεως της ομοιόμορφου ροής

Εφόσον το ύψος ροής παραμένει το ίδιο (κανονικό βάθος ροής) και για υδροστατική κατανομή της πίεσης, οι δυνάμεις πίεσης στον όγκο ελέγχου αλληλοεξουδετερώνονται

**Μόνιμη Ομοιόμορφη ροή, κλειστοί αγωγοί:** Διατήρηση της ορμής σε κυκλικό αγωγό υπό πίεση με μόνιμη ροή, σταθερή διατομή  $\rightarrow$  **σταθερή ταχύτητα (άρα για σταθερή διατομή έχω ομοιόμορφη ροή)**, β' νόμος του Νεύτωνα  $\rightarrow$  άθροισμα δυνάμεων μηδέν, ισορροπία μεταξύ των δυνάμεων πίεσης και βάρους με τη δύναμη αντίστασης λόγω τριβής (για οριζόντιο αγωγό ισορροπία μεταξύ δυνάμεων τριβής και πίεσης)



Απειροστός όγκος ελέγχου, η πίεση σταθερή σε όλο το ύψος της διατομής, διαφέρει κατά τον άξονα της ροής από θέση σε θέση

# Βασικές εξισώσεις στην υδραυλική

- 1) Συνέχειας (μάζας)

– Σε μόνιμη ροή το άθροισμα των παροχών που εισρέουν σε ένα όγκο ελέγχου είναι ίσο με το άθροισμα των παροχών που εκρέουν:

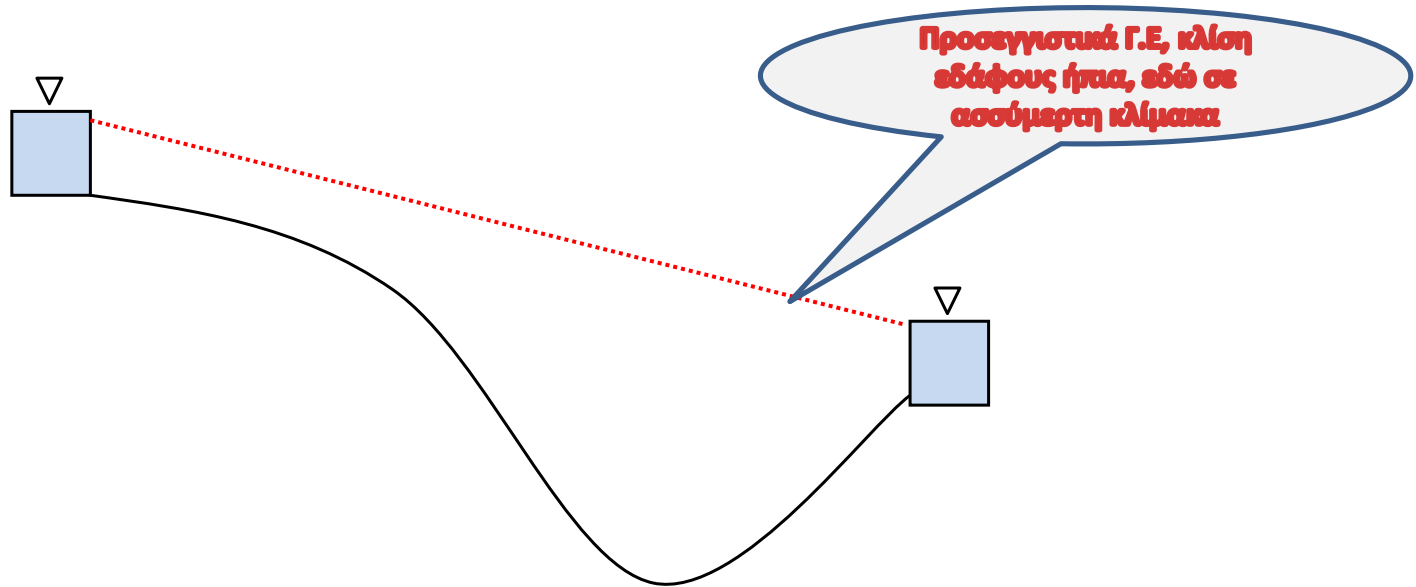
$$\sum Q_{\text{in}} = \sum Q_{\text{out}}$$

# Εξίσωση συνέχειας σε κλειστούς αγωγούς

- **Ομοιόμορφη ροή σε κλειστούς αγωγούς**
- Για μόνιμη μονοδιάστατη ροή σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση με ένα κλάδο αγωγού) δεν συμβάλλουν άλλοι αγωγοί) τότε για σταθερή διάμετρο θεωρείται σταθερή ταχύτητα (ομοιόμορφη ροή), ανεξάρτητα από το ανάγλυφο.
- Πράγματι:

$$\left. \begin{aligned} Q &= A \cdot V = \text{σταθ} \\ A &= \frac{\pi D^2}{4}, D = \text{σταθ} \end{aligned} \right\} \rightarrow V = \text{σταθ}$$

# Κλειστοί αγωγοί, εύκολα επιτεύξιμη η ομοιόμορφη ροή για σταθερή διατομή



Μόνιμη ροή,  $Q = \Sigma T A \Theta$

$D = \Sigma T A \Theta$

$Q = A V$

$\rightarrow V = \Sigma T A \Theta$

Σχ. Ομοιόμορφη ροή σε κλειστούς και ανοικτούς αγωγούς



# Αρχή διατήρησης της ενέργειας

- 1) **Αρχή της διατήρησης της ενέργειας.** Το ύψος της γραμμής ενέργειας σε μία θέση 1 ( $H_1$ ) είναι ίσο με το ύψος ενέργειας σε μία κατάντη θέση 2 ( $H_2$ ) μαζί με τις απώλειες στη διαδρομή 1-2 ( $\Sigma h_{f,1 \rightarrow 2}$ ):

$$H_1 = H_2 + \Sigma h_{f,1 \rightarrow 2}$$

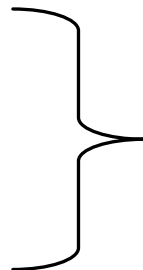
Σημειώνεται ότι σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση για μόνιμη ροή το ύψος ενεργείας  $H_1$  σε μονάδες μήκους στη θέση (1) αποτελείται:

- Από την υψομετρική στάθμη ( $z_1$ )
- Το ύψος πίεσης  $\frac{p_1}{\rho g}$
- Το ύψος κινητικής ενέργειας  $\frac{V_1^2}{2g}$

Δηλαδή:

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$



**Ολικό ύψος ενέργειας:**

**Ύψος πίεσης**

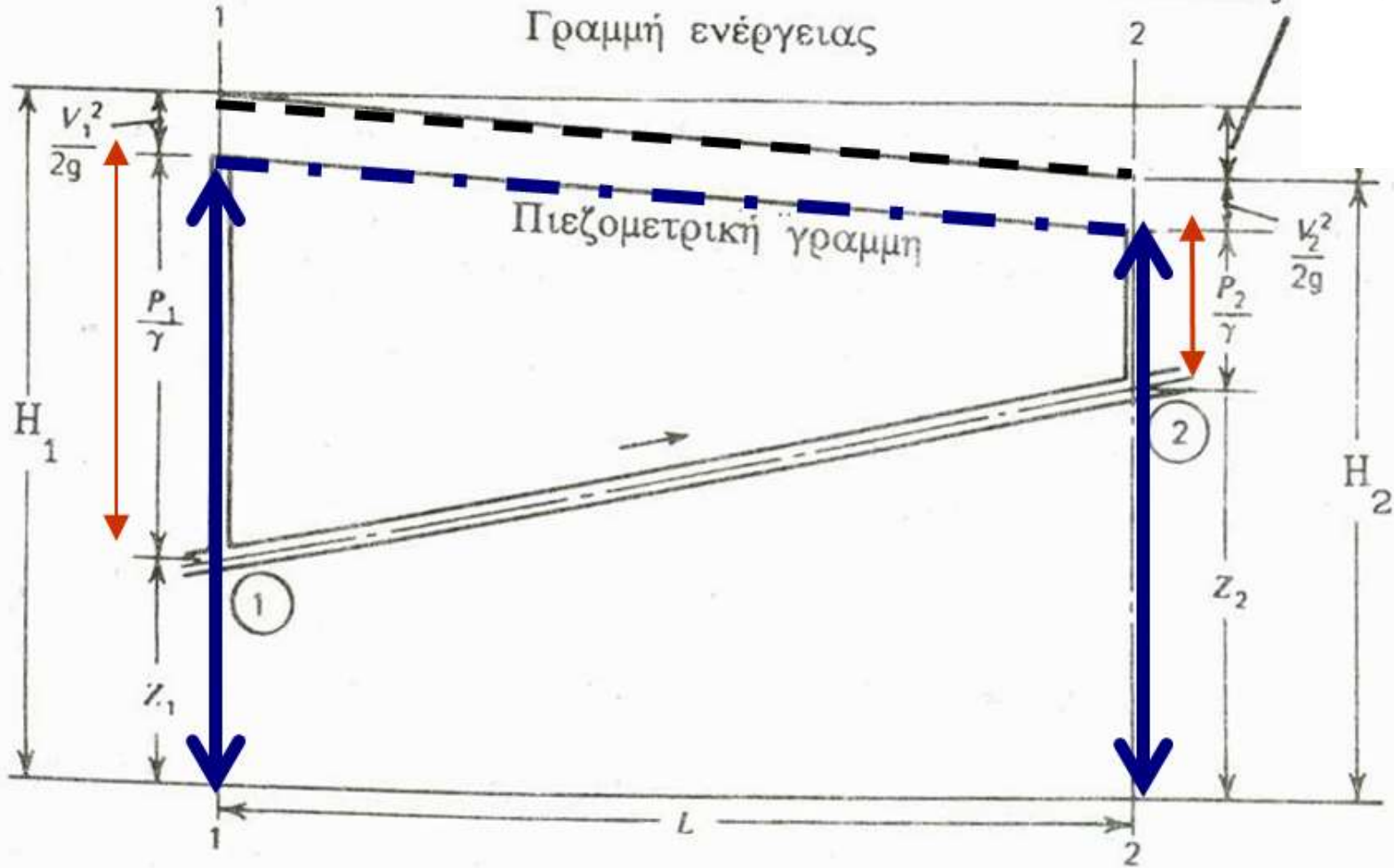
**Ύψος ταχύτητας**

**Ύψος θέσης**

Απώλειες Ενέργειας

Γραμμή ενέργειας

Πιεζομετρική γραμμή



Η πίεση σε κλειστούς αγωγούς υπό πίεση μπορεί να θεωρηθεί σταθερή για μία διατομή. Αντίθετα στους ανοικτούς αγωγούς η πίεση σε μία διατομή δεν είναι σταθερή αλλά ακολουθεί την υδροστατική κατανομή καθ' ύψος (εξαιρείται ο καμπύλος πυθμένας). Κατά συνέπεια το ύψος πίεσης και το ύψος θέσης ταυτίζονται από τη στάθμη της ελεύθερης επιφανείας από τον άξονα αναφοράς για ήπιες κλίσεις

Οπότε σε ανοικτούς αγωγούς ισχύει:

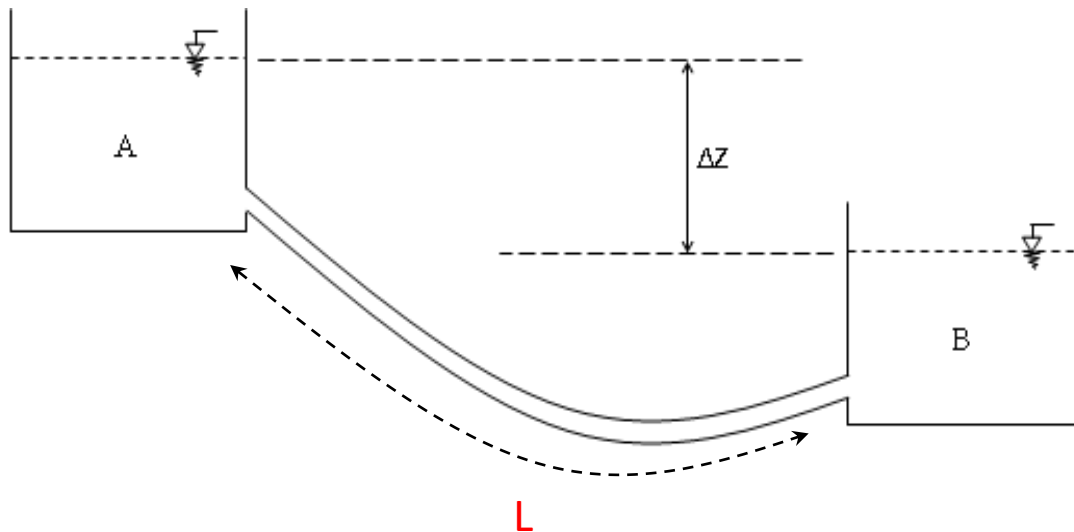
$$\begin{aligned} H_1 &= z_1 + y_1 \text{ (βάθος ροής)} + \frac{V_1^2}{2g} \\ H_2 &= z_2 + y_2 \text{ (βάθος ροής)} + \frac{V_2^2}{2g} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H_1 \\ H_2 \end{aligned}} \right\}$$

$$H_1 = H_2 + \Sigma h_{f, 1 \rightarrow 2}$$

*Σχόλιο: Προφανώς, το βάθος ροής είναι άμεσα ορατό ενώ το ύψος πίεσης σε αγωγούς υπό πίεση μπορεί να μετρηθεί μόνο με τη βοήθεια μανομέτρου.*

# Άτοπο!!!

## Ανάγκη συμπίληψης των απωλειών ενέργειας σε μεγάλη μήκη



Αν δεν λάβω υπόψη τις απώλειες ενέργειας ισχύει:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B \Leftrightarrow z_A = z_B \text{ (άτοπο)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις απώλειες ενέργειας ισχύει:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \Sigma h_f \Leftrightarrow$$

$$z_A - z_B = \Delta z = \Sigma h_f$$

- Οι συνολικές απώλειες ενέργειας είναι ίσες με την υψομετρική διαφορά των στάθμεων των ελευθέρων επιφανειών (μεταξύ των δύο δεξαμενών)
- Το νερό έχει μνήμη προσμετρά τις απώλειες για όλο το μήκος του αγωγού L

# Αρχή διατήρησης της ορμής

3)


Αρχή διατήρησης της ορμής:

Αν υπάρχει ένας μόνο σωλήνας με ομοιόμορφη μόνιμη ροή η εξίσωση της ορμής γράφεται:

$$\sum F_x = \rho Q (v_x^{\text{εκροής}} - v_x^{\text{εισοής}})$$

$$\sum F_y = \rho Q (v_y^{\text{εκροής}} - v_y^{\text{εισοής}})$$

**Οι δυνάμεις μπορεί να είναι δυνάμεις που δρουν στις επιφάνειες του όγκου έλεγχου, όπως η συνισταμένη των πιέσεων σε κάθε διατομή και η τριβή (επιφανειακές δυνάμεις) ή μαζικές δυνάμεις (βάρος).**



Δεν έγινε  
στην τάξη

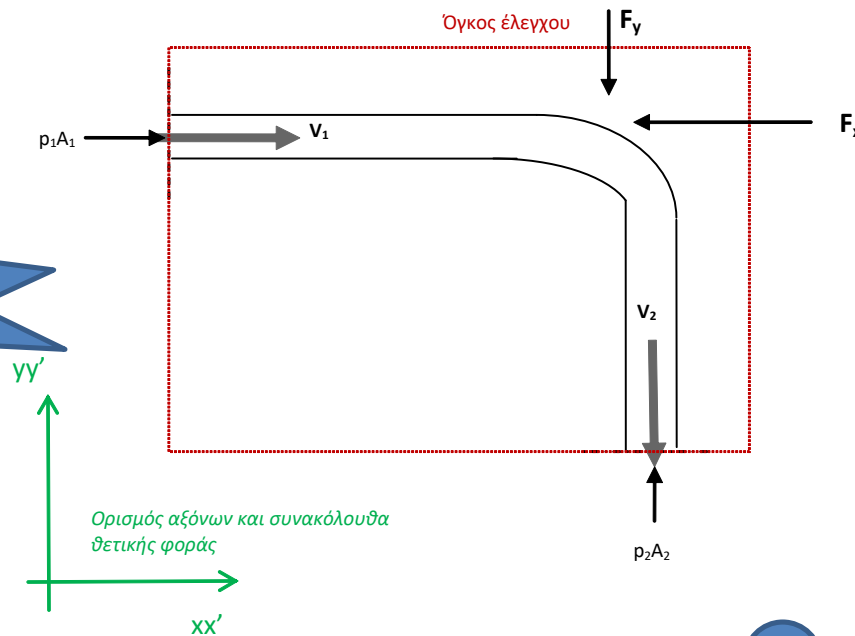
Εστω  $\vec{F}=(F_x, F_y)$  η άγνωστη δύναμη που ασκείται στον σωλήνα (από τη στήριξη του σωλήνα) όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα 2.4.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορμής σημειώνοντας αυθαίρετα τις δυνάμεις αντίδρασης κατά  $x$  και  $y$  και επιλέγοντας αυθαίρετα ένα σύστημα αξόνων ισχύει:

$$\sum F_x = p_1 A_1 - F_x = 0 - \rho Q V_1 \quad (xx')$$

$$\sum F_y = p_2 A_2 - F_y = \rho Q (-V_2) - 0 \quad (yy')$$

Δεν έγινε στην τάξη



Ίδια διατομή  
Από Εξ.  
Bernoulli,  
 $p_1=p_2$

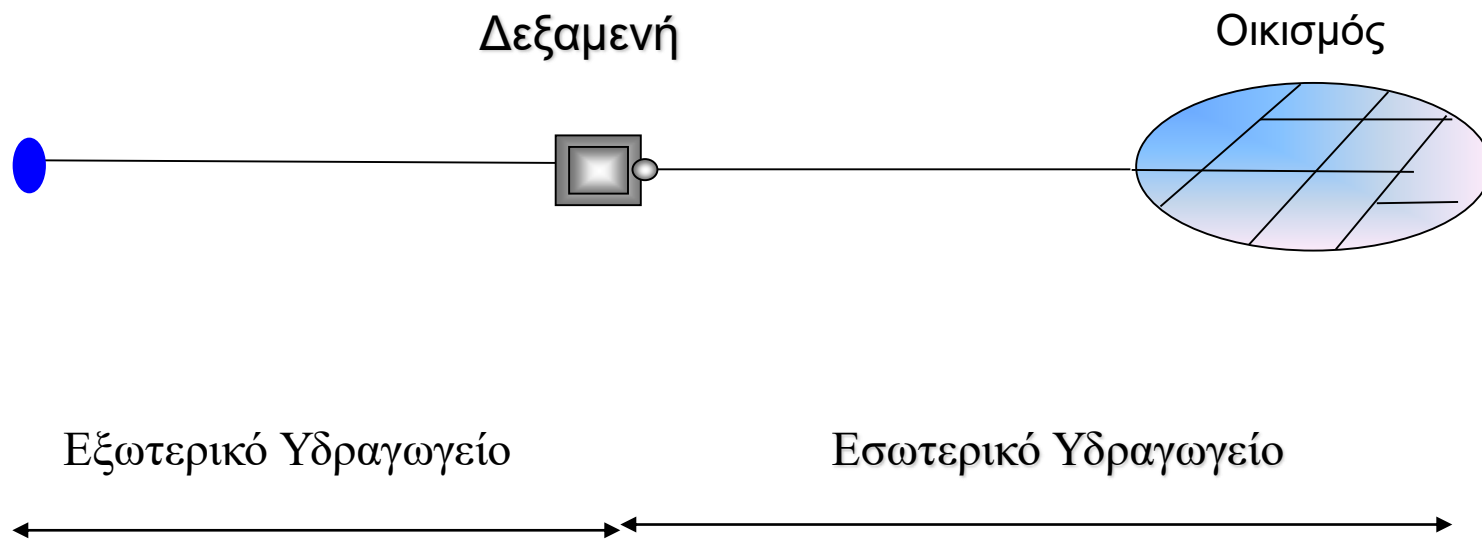
Σχ. 2.4 Διατήρηση της ορμής σε κυκλικό αγωγό με γωνία 90°

Επομένως:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= p_1 A_1 + \rho Q V_1 \\ F_y &= p_2 A_2 + \rho Q V_2 \end{aligned} \right\}$$

Συνεπώς η δύναμη αντίστασης θα πρέπει να εξισορροπεί όχι μόνο τις δυνάμεις που οφείλονται στην πίεση αλλά και την μεταβολή της ορμής

# Υδραγωγείο





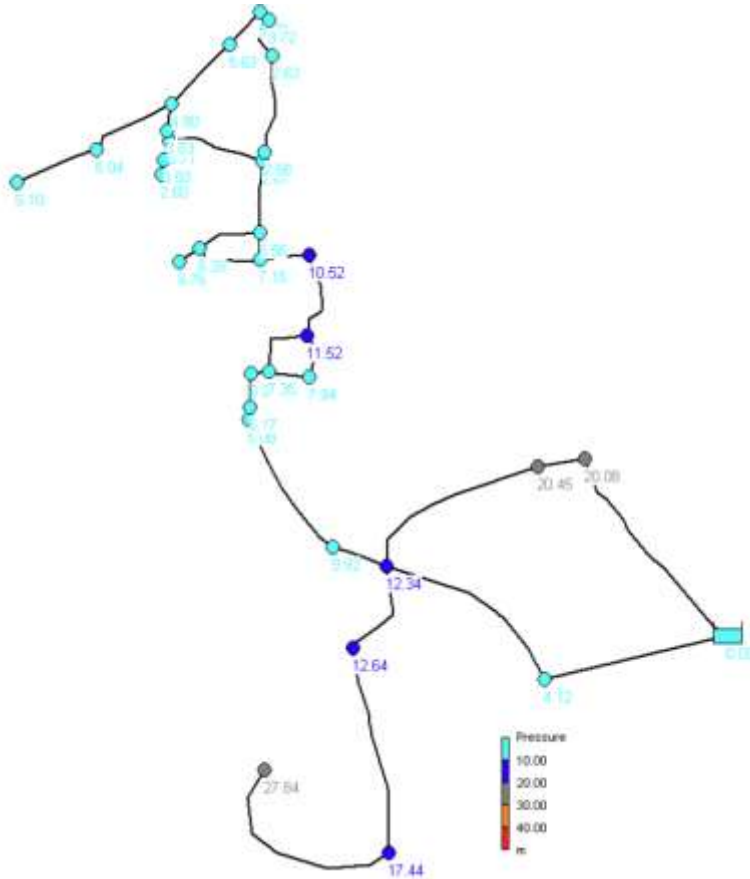
# ΣΩΛΗΝΕΣ ΥΠΟΓΕΙΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΠΟΣΙΜΟΥ ΝΕΡΟΥ

από ΡΕ 3ης γενιάς/ Εμπορίου

Πίεση λειτουργίας : 10 atm (1000 hPa)

Όνομαστική διάμετρος $D_n$ (mm)	32	40	50	63	75	90	110
Εσωτερική διάμετρος $D$ (mm)	28	35.2	44	55.4	66	79.2	96.8
Όνομαστική διάμετρος $D_n$ (mm)	125	140	160	180	200	225	250
Εσωτερική διάμετρος $D$ (mm)	110.2	123.4	141	158.6	176.2	198.2	220.4
Όνομαστική διάμετρος $D_n$ (mm)	280	315	355	400	450	500	560
Εσωτερική διάμετρος $D$ (mm)	246.8	277.6	312.8	352.6	396.6	440.6	493.6
Όνομαστική διάμετρος $D_n$ (mm)	630						
Εσωτερική διάμετρος $D$ (mm)	555.2						

# Χαρακτηριστικά κλειστών αγωγών



Κυκλικοί αγωγοί εμπορίου

Ομοιόμορφη ροή

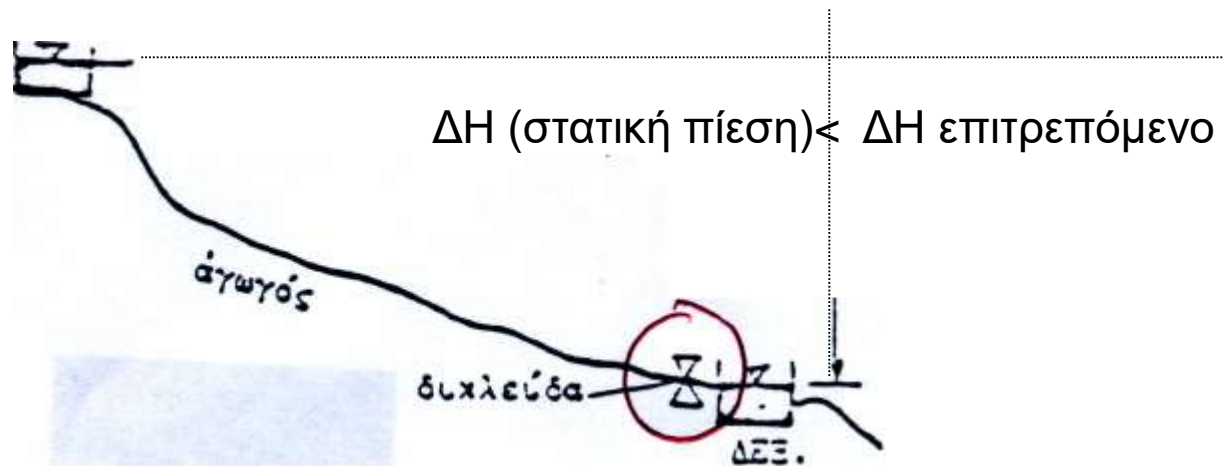
Σχεδιαστική απαίτησή για ταχύτητα  
 $0.5 \leq V \leq 1.5-2 \text{ m/s}$

Αρχική ενέργεια: στάθμη ε.ε.

Πίεση μεταβλητή: Από ΑΔΕ (μεγάλος  
άγνωστος)

Δυνατότητα αντλίας

# Εξ. Υδρ. Κλειστοί αγωγοί υπό πίεση/βαρύτητας



# Εξ. Υδρ. Κλειστοί αγωγού βαρύτητας

$\Delta H_3$  (στατική πίεση) <  $\Delta H$  επιτρεπόμενο

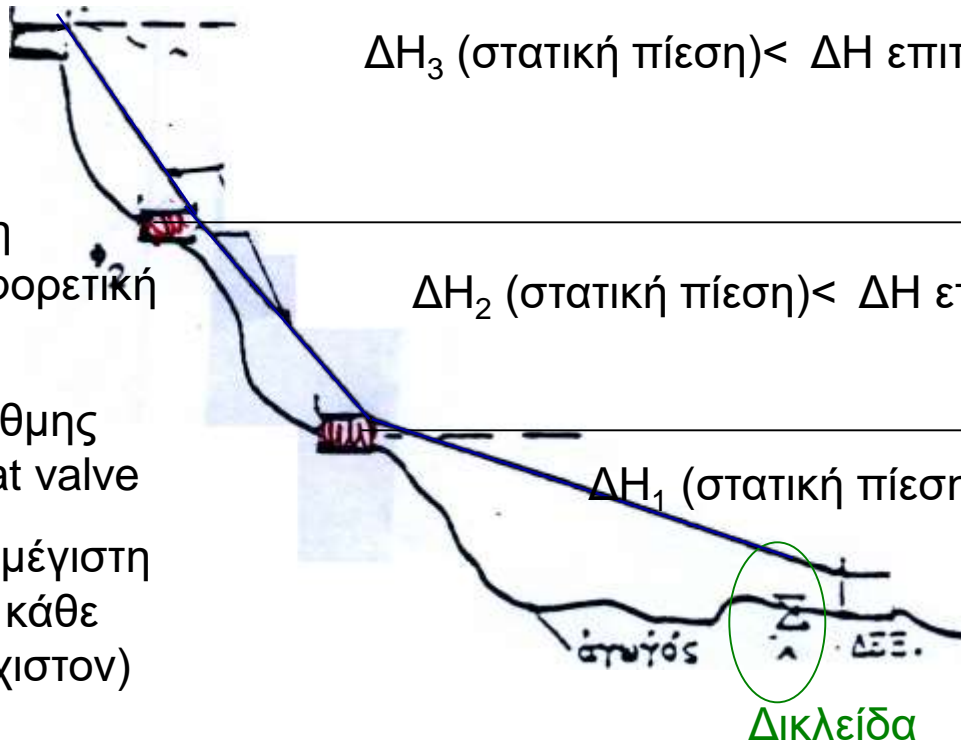
Σε κάθε ζώνη  
υπάρχει διαφορετική  
παροχή

$\Delta H_2$  (στατική πίεση) <  $\Delta H$  επιτρεπόμενο

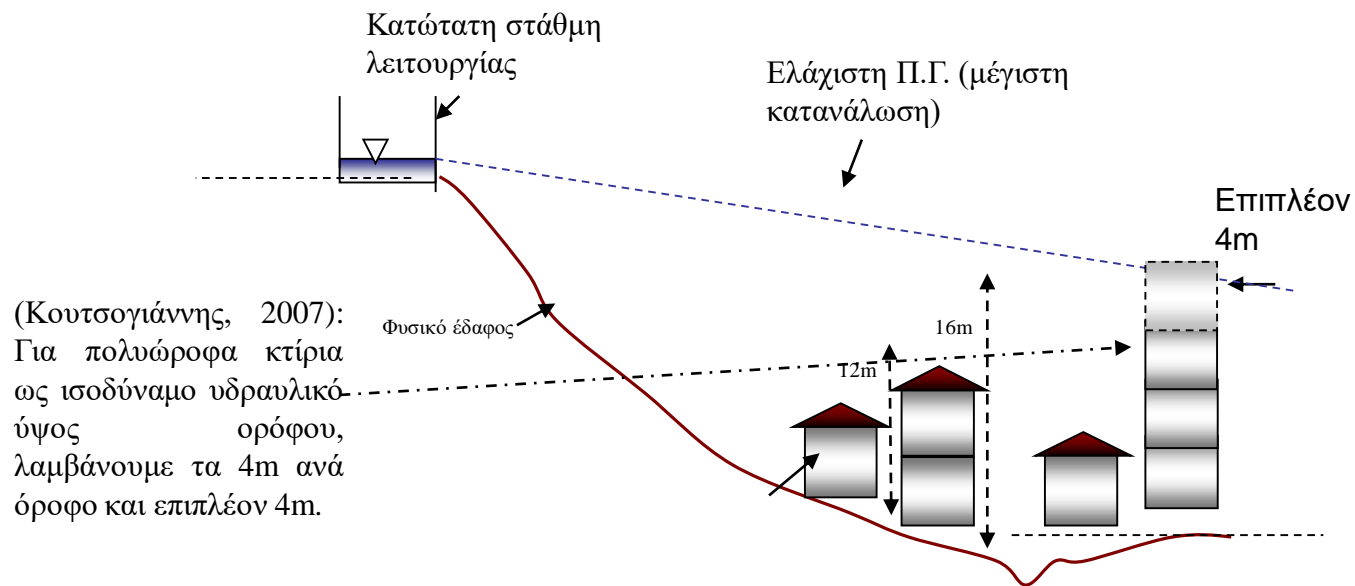
Ρύθμιση στάθμης  
Π.Φ. με float valve

$\Delta H_1$  (στατική πίεση) <  $\Delta H$  επιτρεπόμενο

Έλεγχος για μέγιστη  
ημερήσια σε κάθε  
ζώνη (τουλάχιστον)

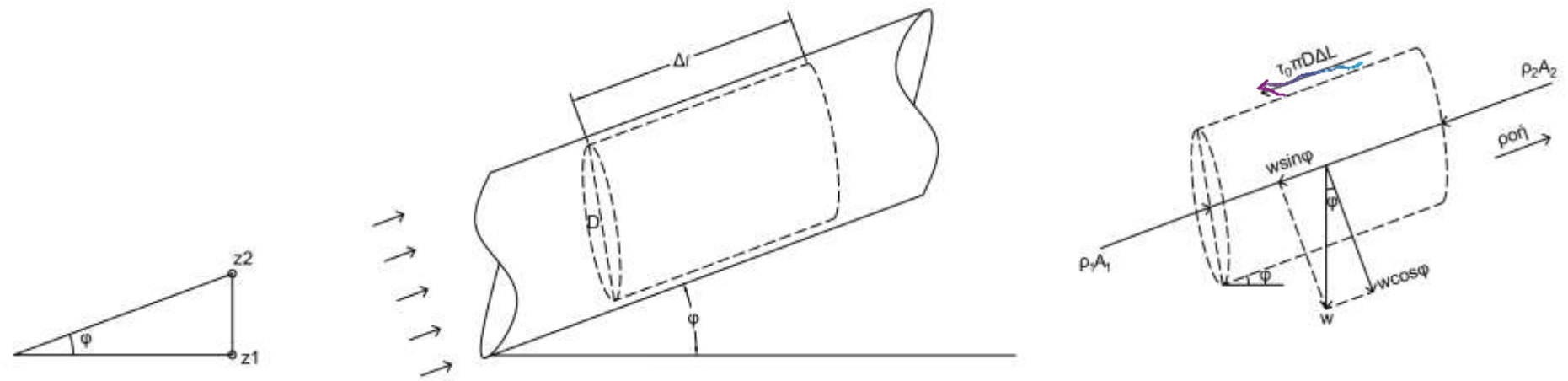


# Περιορισμοί ύψους πίεσης για την μέγιστη κατανάλωση (ΕΜΠ)



Απώλειες ενέργειας: τοπικές και γραμμικές  
Προσδιορισμός γραμμικών απωλειών  
Κατά Darcy –Weisbach

Απόδειξη με βάση τη διατήρηση της ορμής σε  
**ομοιόμορφη ροή**



$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow (p_1 - p_2) \frac{\pi D^2}{4} - \tau_0 \pi \Delta x - W_x = 0$$

$$W = \rho g \left( \frac{\pi D^2}{4} \Delta x \right) \text{ και } W_x = W \sin \varphi, \text{ οπότε:}$$

$$W_x = \rho g \Delta x \frac{\pi D^2}{4} \sin \varphi$$

Επομένως:

$$p_1 \frac{\pi D^2}{4} - p_2 \frac{\pi D^2}{4} - \tau_0 \pi D \Delta x - \rho g \Delta x \frac{\pi D^2}{4} \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D}{4} (p_1 - p_2 - \rho g (z_2 - z_1)) = \tau_0 \Delta x \quad (\sin \varphi = \frac{z_2 - z_1}{\Delta x})$$

$$\frac{p_1 + z_1}{\rho g} - \frac{p_2 + z_2}{\rho g} = \frac{4\tau_0 \Delta x}{D \rho g} \Rightarrow \left( \frac{p_1 + z_1}{\rho g} = \Pi \Gamma 1, V = \Sigma T A \Theta, \Pi \Gamma 1 - \Pi \Gamma 2 = h_f \right)$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{4\tau_0 \Delta x}{D \rho g} \frac{\frac{\rho V^2}{2}}{\frac{\rho V^2}{2}} = \frac{4\tau_0}{\rho V^2} \frac{\Delta x}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{Αλλά: } \tau_0 = \frac{f}{8} \rho V^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{4\tau_0}{\frac{\rho V^2}{2}},$$

οπότε:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (\Delta x = L)$$



Ο συντελεστής  $f$  στη γενική περίπτωση εξαρτάται από τον αριθμό Reynolds (Εξ. 2.8) και από την σχετική τραχύτητα  $k/D$ . Ο αριθμός  $Re$  περιγράφει το είδος της ροής. Η τραχύτητα ενός αγωγού υποδηλώνει το μέσο μέγεθος των προεξοχών των τοιχωμάτων του αγωγού που εμποδίζει τη ροή και επομένως συντελεί στην ύπαρξη απωλειών λόγω τριβών. Ωστόσο, σε πραγματικές εφαρμογές, όπως θα αναφερθεί στη συνέχεια, θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και άλλοι παράγοντες, όπως η γήρανση των αγωγών και οι τοπικές απώλειες, γεγονός που οδηγεί σε αύξηση της τραχύτητας.

Ο συντελεστής τριβής  $f$ , στη γενική περίπτωση, εξαρτάται από το είδος της ροής, το υλικό του αγωγού σε σχέση με τη διάμετρο του αγωγού. Αδιάστατος αριθμός

-Πειραματικά αποτελέσματα καθοδηγούμενα από τη θεωρία οριακού στρώματος χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του.

- Στη γενική περίπτωση εξαρτάται και από την ταχύτητα του αγωγού (με άλλα λόγια, δεν παραμένει σταθερός όπως υποθέτουμε στο σημερινό μάθημα)

Οι γραμμικές απώλειες είναι ανάλογες του μήκους

Οι Darcy-Weisbach κατέληξαν στην παρακάτω σχέση που αποδίδει το γραμμικό ύψος απωλειών  $h_f$ , συναρτήση του συντελεστή τριβής  $f$ , της διαμέτρου του αγωγού, του μήκους του αγωγού και της ταχύτητας:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (2.9)$$

ή ισοδύναμα θέτοντας όπου  $Q = V \cdot A = V \cdot \pi (D/2)^2$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{Q^2}{2g(\pi D^2/4)^2},$$

ή ισοδύναμα:

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

όπου:  $f = f(Re, k/D)$  = συντελεστής τριβής αδιάστατος αριθμός,

$Q$  = παροχή ( $m^3/s$ ),

$V$  = ταχύτητα ( $m/s$ ),

$L$  = μήκος του αγωγού για το οποίο προσδιορίζονται οι απώλειες (m) και

$D$  = (εσωτερική) διάμετρος του αγωγού (m).

Με τον όρο αντίσταση του αγωγού εννοείται η ποσότητα:

$$R = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} \quad (2.10)$$

Οπότε:

$$h_f = RQ^2 \quad \text{Τσακίρης και Σπηλιώτης, 2010} \quad (2.11)$$

$$h_f = \frac{8fL}{g\pi^2 D^5} Q^2$$

όπου:  $f = f(Re, k/D)$  = συντελεστής τριβής αδιάστατος αριθμός,  
 $Q$  = παροχή ( $m^3/s$ ),  
 $V$  = ταχύτητα ( $m/s$ ),  
 $L$  = μήκος του αγωγού για το οποίο προσδιορίζονται οι απώλειες  
(m) και  
 $D$  = (εσωτερική) διάμετρος του αγωγού (m).

Με βάση τον παραπάνω μετασχηματισμό παρατηρείστε ότι με τη μείωση της διατομής ( $D$ ) αυξάνονται σημαντικά οι απώλειες.  
Αύξηση της διατομής  $\rightarrow$  σημαντική μείωση απωλειών,  
αλλά...αύξηση κόστους

**Πίν. 2.2:** Προσδιορισμός των γραμμικών απωλειών για κυκλικούς αγωγούς υπό πίεση

	Εξίσωση γραμμικών απωλειών ενέργειας	Αντίσταση αγωγού (διεθνές σύστημα μονάδων)	Εκθέτης της εξίσωσης
Darcy-Weisbach	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{8fL}{gn^2 D^5}$ μεταβλητή με την παροχή	$n = 2$
Darcy-Weisbach προσέγγιση λογαριθμικής ευθείας	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{8La}{gn^2 D^5}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 2 - b$ ( $a, b$ προκύπτουν από εκτίμηση του εύρους της παροχής)
Hazen-Williams	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{10.7L}{C^{1.852} D^{4.87}}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 1.852 < 2$
Manning	$h_f = RQ^n$	$R = \frac{10.29 n_{MANNING}^2 L}{D^{5.33}}$ μη μεταβλητή με την παροχή	$n = 2$

Η εξίσωση Darcy-Weisbach πρέπει να προτιμάται από τις άλλες εμπειρικές ή ημιεμπειρικές εξισώσεις προσδιορισμού των απωλειών, γιατί έχει θεωρητική βάση (διατήρηση της ορμής) και ενσωματώνει με το συντελεστή  $f$ , πειραματικά δεδομένα που εδράζονται στη θεώρηση του οριακού στρώματος

# Διερεύνηση σχέση Darcy Weisbach και Manning

- Η Εξίσωση Manning έχει φυσική βάση και χρησιμοποιείται και σε κλειστούς αγωγούς (με λιγότερο ακρίβεια)
- Αν και δεν υπάρχει στη χώρα μεγάλη μελετητική εμπειρία η πιο ακριβής εξίσωση Darcy Weisbach μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε ανοικτούς αγωγούς.

**Μπορώ να  
χρησιμοποιήσω  
Manning σε  
κλειστούς  
αγωγούς???**

- Γεμάτος καθ' ολοκληρίαν κυκλικός αγωγός

$$• V_{ολ} = \frac{1}{n} * \left( \frac{\pi * \frac{D^2}{4}}{\pi * D} \right)^{\frac{2}{3}} * S_f^{1/2} = \frac{1}{n} * \left( \frac{D}{4} \right)^{2/3} * S_f^{1/2}$$

Οπότε

$$• R = \left( \frac{\pi * \frac{D^2}{4}}{\pi * D} \right) = \left( \frac{D}{4} \right) \Rightarrow \mathbf{D = 4R}$$

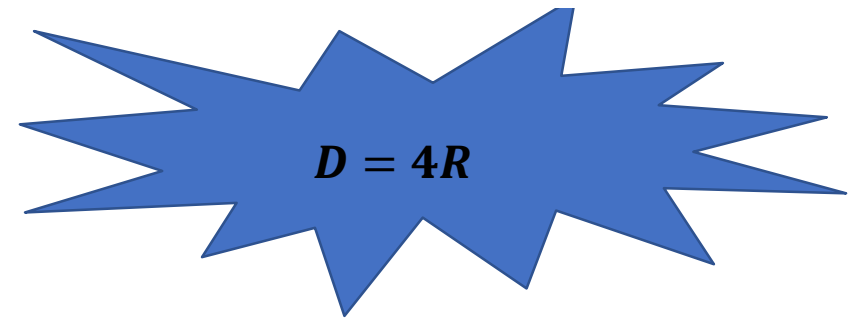


Μπορώ να  
χρησιμοποιήσω  
Darcy –  
Weisbach σε  
ανοικτούς  
αγωγούς???



# Darcy Weisbach -> Εξίσωση Chezy Ανοικτοί αγωγοί, ομοιόμορφη ροή

Darcy Weisbach:  $hf = f \frac{L}{4R} * \frac{V^2}{2g} \rightarrow (\mathbf{D = 4R}) \rightarrow$

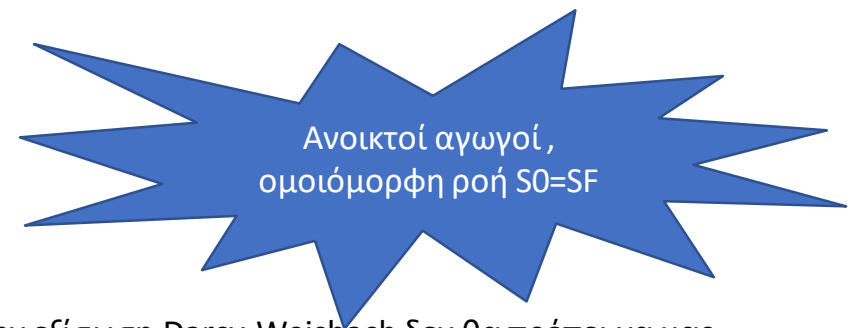


$\mathbf{D = 4R}$

# Darcy Weisbach -> Εξίσωση Chezy Ανοικτοί αγωγοί, ομοιόμορφη ροή

- Darcy Weisbach:  $hf = f \frac{L}{D} * \frac{V^2}{2g} \rightarrow (D = 4R) \rightarrow V^2 = \frac{2g hf}{f L} * 4R \rightarrow (S_f = hf/L = S_0) \rightarrow V = \sqrt{\frac{2g}{f}} * R^{\frac{1}{2}} * S_0^{\frac{1}{2}}$

- $V = C * R^{\frac{1}{2}} * S_0^{\frac{1}{2}}$  Εξίσωση Chezy, όπου  $C = \sqrt{\frac{2g}{f}}$



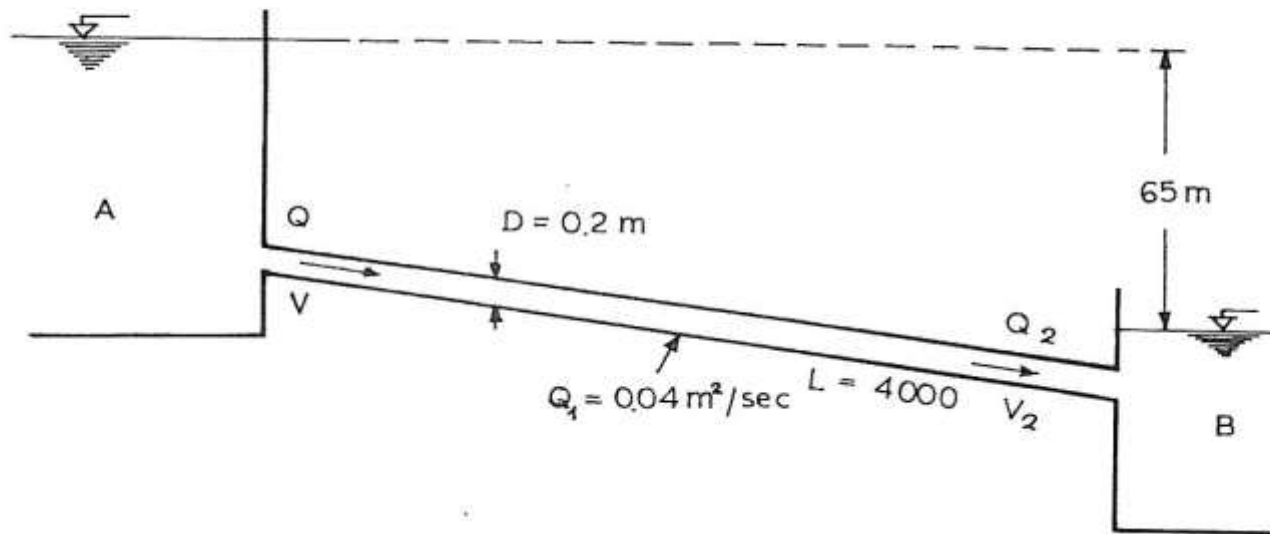
- Το γεγονός ότι καταλήγουμε στην εξίσωση chezy από την εξίσωση Darcy-Weisbach δεν θα πρέπει να μας παραξενεύει γιατί η εξίσωση Darcy-Weisbach προέκυψε από ισορροπία δυνάμεων σε ομοιόμορφη ροή

Σύγκριση Manning με Darcy -W:  $f = 8gn^2/R^{(1/3)}$ .

17. Δυο δεξαμενές συνδέονται με σωληνωτό αγωγό διαμέτρου 20 cm και μήκους 4000 m. Η υψομετρική διαφορά μεταξύ των ελευθέρων επιφανειών του νερού στις δυο δεξαμενές είναι 65 m και παραμένει σταθερή. Σ' ένα σημείο του αγωγού που βρίσκεται 1500 m κατάντη της πάνω δεξαμενής, υπάρχει κρουνός απ' τον οποίο εκρέει παροχή 40 l/sec.

Αν ο συντελεστής τριβής είναι  $f = 0,036$ , να υπολογιστεί η παροχή του νερού, που μπαίνει στη χαμηλότερη δεξαμενή. (Θεωρήστε αμελητέες όλες τις άλλες απώλειες ενέργειας εκτός των γραμμικών).

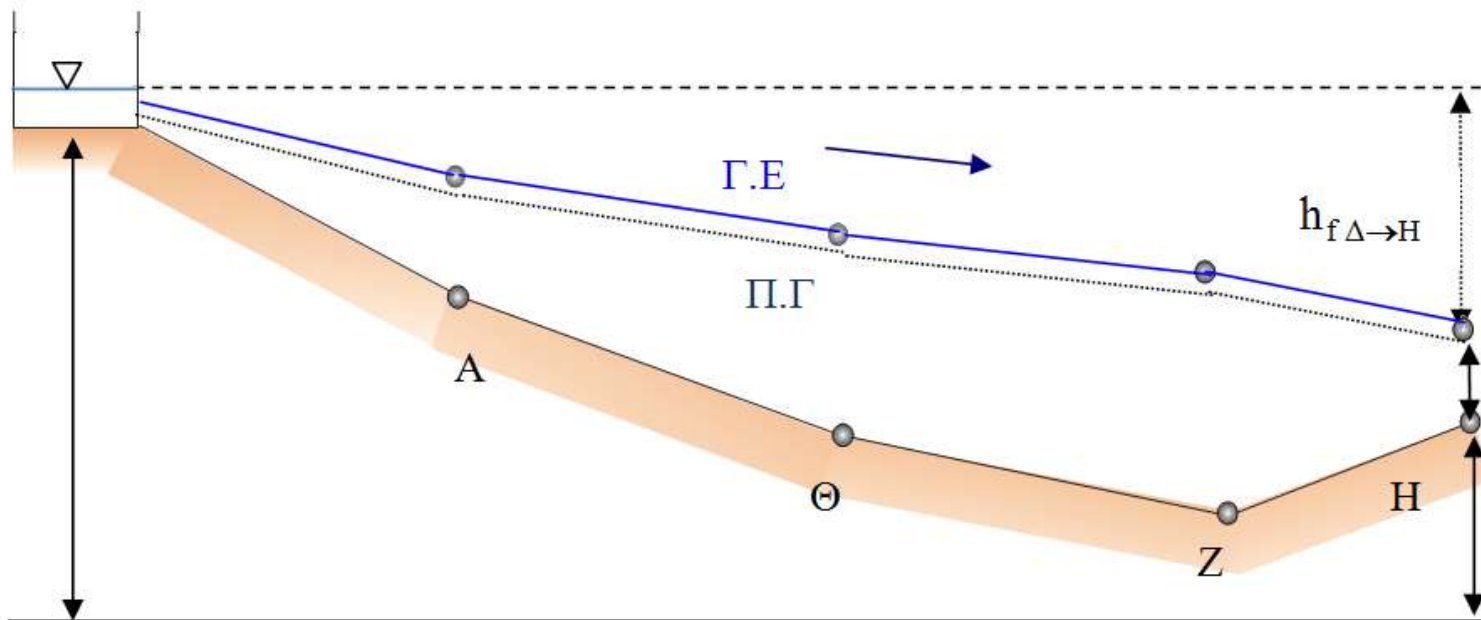
Λύση :



Επιλύθηκε εντός της αίθουσας...

# Γραμμή ενέργειας σε ένα αγωγό (χωρίς αντλία)

- Γραμμή ενεργείας: ο γεωμετρικός τόπος του ύψους θέσης, του ύψους πίεσης και του ύψους κινητικής ενέργειας
- **Πάντοτε πτωτική από τη διατήρηση της ενέργειας**
- Δεν ισχύει πάντα το ίδιο για την Π.Γ. (βλπ. Επ. μάθημα)



Σχ. Ενεργειακή διαδρομή από την υψομετρική θέση της δεξαμενής, στο H

Υπάρχουν δύο είδη απωλειών ενέργειας:

1. Γραμμικές (δε όλο το μήκος)
2. Τοπικές

## 2.4.5 Τοπικές Απώλειες Φορτίου

Οι τοπικές απώλειες οφείλονται στα τοπικά εμπόδια τα οποία συναντά η ροή. Οι κυριότερες αιτίες τοπικών απωλειών είναι οι παρακάτω:

- Απότομη διαστολή ή συστολή της διατομής του αγωγού
- Βαθμιαία διαστολή ή συστολή της διατομής του αγωγού
- Αλλαγή κατεύθυνσης του αγωγού
- Τοπικές απώλειες σε δικλείδες και άλλες συσκευές που παρεμβάλλονται στη ροή
- Μη ευθύγραμμη τοποθέτηση του αγωγού.

Στην πράξη η διαταραχή αυτής της ροής για τις παραπάνω αιτίες δεν περιορίζεται σε ένα σημείο και το φαινόμενο συνοδεύεται από την ανάπτυξη στροβίλων και αποκλίνουσας ροής (Νουτσόπουλος και Χριστοδούλου, 1996). Ωστόσο, για απλοποίηση θεωρείται ότι οι τοπικές απώλειες σημειώνονται σημειακά μετατοπίζοντας τη γραμμή ενέργειας κατακόρυφα. Οι τοπικές απώλειες προσδιορίζονται σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση:

$$h'_f = K \frac{V^2}{2g} \quad (2.30)$$

## 2.4.6 Συνολικές Απώλειες Φορτίου και Πιεζομετρική Γραμμή

Όπως αναφέρθηκε οι τοπικές απώλειες φορτίου παρουσιάζονται στα σημεία με απότομες μεταβολές της διατομής ή αλλαγής διεύθυνσης ή ύπαρξης συναρμογών, δικλείδων κ.ά., και μπορούν να προσεγγισθούν αναλυτικά. Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας των προβλημάτων σε πραγματικά υδραυλικά δίκτυα πόλεων ο αναλυτικός υπολογισμός των τοπικών απωλειών σε ένα δίκτυο ύδρευσης είναι δυσχερής. Επιπλέον, για μεγάλα μήκη αγωγών οι γραμμικές απώλειες είναι σημαντικά μεγαλύτερες από τις τοπικές απώλειες. Οπότε οι τοπικές απώλειες λαμβάνονται συνήθως υπόψη ενσωματωμένες συνήθως στις γραμμικές απώλειες θεωρούμενες ως ένα ποσοστό των γραμμικών απωλειών. Η προσαύξηση των γραμμικών απωλειών ώστε να περιλαμβάνονται οι πάσης φύσεως τοπικές απώλειες είναι 10 - 15%.

Μία άλλη προσέγγιση με ευρεία εφαρμογή στις μελέτες, ιδιαίτερα στο εσωτερικό υδραγωγείο, αποτελεί η προσαύξηση της τραχύτητας προκειμένου να συμπεριληφθούν οι τοπικές απώλειες, κατά μία τάξη μεγέθους.

Σημειώνεται ότι για τον ίδιο λόγο δε γίνεται διάκριση μεταξύ γραμμής ενέργειας και πιεζομετρικής γραμμής. Αν για παράδειγμα η ταχύτητα ροής είναι 1 m/s η ποσότητα  $(V^2/2g) \approx (1/20) = 0.05$  m σε σχέση με τις συνήθεις πιέσεις 20 - 50 m αποτελεί πολύ μικρό μέγεθος.



Παραδοχές-προσεγγίσεις σε αυτό το μάθημα:

-Οι τοπικές απώλειες είναι ενσωματωμένες στις γραμμικές

- Σταθερός συντελεστής τριβής  $f$

(οι παραπάνω παραδοχές πολλές φορές χρ. στην πράξη κατά το σχεδιασμό)

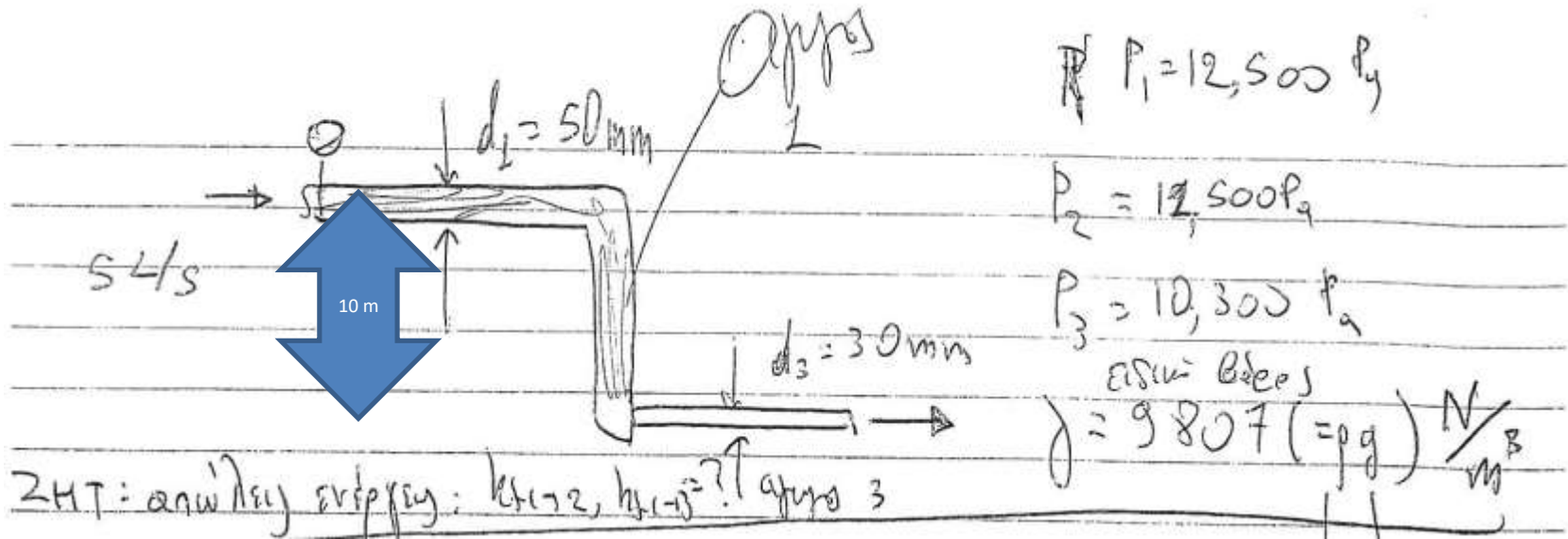
*Υδραυλική: Λεπτομερής προσδιορισμός εκτός αν η εκφώνηση απλοποιεί την άσκηση (όπως σήμερα)...*

# Κλειστοί αγωγοί προσδιορισμός της πίεσης?

Σε μία διατομή η πίεση είναι σταθερή (ενώ σε ανοικτούς αγωγούς για μία διατομή έχω υδροστατική κατανομή)

**προσδιορισμός πίεσης: Διατήρηση ενέργειας**

# Άσκηση



Απώλειες ενέργειας από (1) σε (2) και από (1) σε (3), μετρήσεις πίεσης σε (1), (2), (3)

Ασκήση "Εργαστηριακή"

αλλά:

Σχεδιασμός:

Από την ενέργεια

απωλείας <sup>ενέργειας</sup>

υψόμετρα <sup>είας</sup>

} Α.Δ.Ε

=> πίεση

εδώ:

Από την πίεση

από την πίεση

υψόμετρα

} Α.Δ.Ε

από την

ενέργεια

# Παροχή - ταχύτητα

Άσκηση (1): σταθερή διαμέτρηση:

$$\left. \begin{array}{l} Q = vA \\ Q = \frac{\pi D^2}{4} v \end{array} \right\} \Rightarrow v = \frac{Q}{A} \text{ για σταθερή } D$$

$$v = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0.005}{\frac{\pi \cdot 0.05^2}{4}} =$$

$$= 2.546 \text{ m/s}$$

πρέπει να δίνεται

στοιχεία μονάδων.

# Παροχή - ταχύτητα (2) (αδμ)

Ομοίως:

ΑΔΜ:

$$Q_1 = Q_3 = \sigma \rho \theta_1$$

$$\Rightarrow 0.005 = \frac{\pi \cdot D_3^2}{4} v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{4 \cdot 0.005}{\pi \cdot 0.03^2} = 7.07 \text{ m/s}$$

# ΑΔΕ

Πίεση → Ανάπτυξη

Αρχική Διατ. Ενέργειες

① → ② (έχω πληροφορίες για πίεση από τις μετρήσεις):

$$H_1 = H_2 + \epsilon_{h_1 \rightarrow h_2} \ominus$$



# ΑΔΕ

ΑΔΕ

$z_1 = z_2$  (οριζόντιο)

$v_1 = v_2$ ,  $D = 0.05 \text{ m}$

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{f_{1-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \sum h_{f_{1-2}}$$

$$\Rightarrow \sum h_{f_{1-2}} = \frac{12,500}{9,807} - \frac{11,500}{9,807} = \dots$$

$$\Rightarrow \sum h_{f_{1-2}} = 0.1021 \text{ m}$$

↑ εμβα χημεία  
ομοιομο  
επτά.

=11500/  
9807



A & G      ① → ③

$$H_1 = H_3 + \sum h_{1 \rightarrow 3}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 + \sum h_{1 \rightarrow 3}$$

$$\rightarrow \sum h_{1 \rightarrow 3} = \frac{P_1 - P_3}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_3^2}{2g} + (Z_1 - Z_3) \approx 10$$

$$\rightarrow \sum h_{1 \rightarrow 3} = \frac{12,500 - 10,300}{9,807} + \frac{2.546^2 - 7.074^2}{2g} + 10 \rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum h_{1 \rightarrow 3} = 8.00 \text{ m}$$

Εάν ο συντελεστής τριβής, για οικονομία χρόνου , σε βάρος της ακρίβειας για μία πρώτη εκτίμηση είχε δοθεί τότε χωρίς δοκιμές επιλύω ως προς  $Q$ , βλπ. πρώτες ασκήσεις

## Απόλυτη και σχετική πίεση

Συνήθως χρησιμοποιείται η σχετική πίεση,  $p$

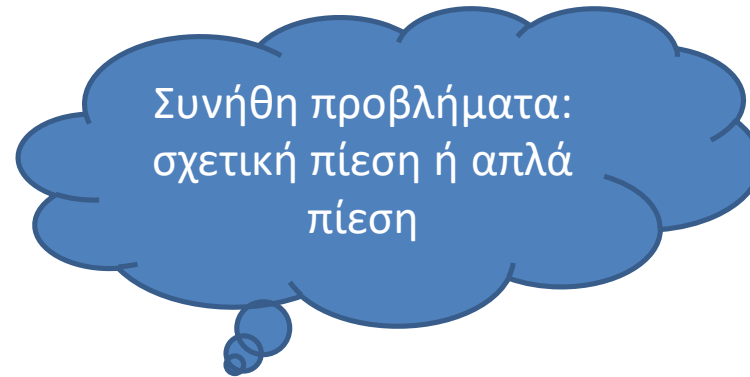
Απόλυτη πίεση  $= p_{atm} + p$

Απόλυτη πίεση, δίνει τοπικά ένα «αέρα» 10m για προβλήματα σπηλαιώδης, εξετάζεται μόνο σε ειδική κατηγορία προβλημάτων.

$$p_{atm} = 101325 Pa$$

ή σε όρους μήκους:

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} = \frac{101325 Pa}{9789 \frac{N}{m^3}}$$



Όταν η πίεση του νερού γίνει μικρότερη από την τάση ατμών στιγμιαία το νερό μεταπίπτει από την υγρή φάση στην αέρια οπότε δημιουργούνται τοπικά φυσαλίδες. Ο βρασμός νερού αναφέρεται σε αυτήν την περίπτωση όπου η πίεση νερού είναι μικρότερη από την πίεση των υδρατμών νερού, οπότε σχηματίζονται φυσαλίδες σε αυτήν την επιφάνεια. Οι αιτίες για τον βρασμό του νερού είναι:

- Αύξηση της θερμοκρασίας, οπότε αυξάνεται η πίεση των υδρατμών
- Μείωση της πίεσης νερού ως συνέπεια απότομης στένωσης της διατομής, λόγω ύπαρξης ανοδικού ανάγλυφου ή ακόμη τη λειτουργία αγωγού αναρρόφησης σε αντλητική διάταξη.

# Σπηλαιώση

## Το πρόβλημα της σπηλαιώσης

Όταν η πίεση του νερού γίνει μικρότερη από την τάση ατμών στιγμιαία το νερό μεταπίπτει από την υγρή φάση στην αέρια οπότε δημιουργούνται τοπικά φυσαλίδες. Ο βρασμός νερού αναφέρεται σε αυτήν την περίπτωση όπου η πίεση νερού είναι μικρότερη από την πίεση των υδρατμών νερού, οπότε σχηματίζονται φυσαλίδες σε αυτήν την επιφάνεια. Οι αιτίες για τον βρασμό του νερού είναι:

- Αύξηση της θερμοκρασίας, οπότε αυξάνεται η πίεση των υδρατμών
- Μείωση της πίεσης νερού ως συνέπεια απότομης στένωσης της διατομής, λόγω ύπαρξης ανοδικού ανάγλυφου ή ακόμη τη λειτουργία αγωγού αναρρόφησης σε αντλητική διάταξη.

**Η ύπαρξη περιοχής υποπίεσεων οδηγεί σε περαιτέρω απελευθέρωση αερίων, οπότε αυξάνεται το μέγεθος των φυσαλίδων μειώνοντας το μέγεθος της πραγματικής διατομής για την κίνηση του ρευστού δημιουργώντας πρόβλημα σε κινήσεις ρευστού σε ανοδικό ανάγλυφο.**

**Ωστόσο κατάντη του σημείου βρασμού ενδέχεται η πίεση να αυξηθεί εκ νέου είτε λόγω διαπλάτυνσης της διατομής, είτε λόγω ύπαρξης κατωφέρειας. Σε αυτήν την περίπτωση οι φυσαλίδες νερού θα καταστραφούν ασκώντας μία στιγμιαία σημαντική πίεση στα τοιχώματα του αγωγού. Οπότε η σπηλαιώση αναφέρεται στη θραύση των φυσαλίδων των υδρατμών κατάντη (λόγω αύξηση της πίεσης κατάντη) που σχηματίστηκαν σε προηγούμενη επιφάνεια/ σημείο όπου η πίεση του υγρού ήταν μικρότερη από την πίεση των υδρατμών. Με τη θραύση των φυσαλίδων έχουμε την ανάπτυξη στιγμιαίων υψηλών δυνάμεων στα τοιχώματα.**

# Σχετική και απόλυτη πίεση-έλεγχος

Ένα ελάχιστο μέτρο προστασίας για τη σπηλαίωση είναι η απαίτηση η απόλυτη πίεση σε οποιαδήποτε σημείο να είναι μεγαλύτερη από την τάση ατμών:

$$\frac{P_a}{\gamma} > \frac{P_v}{\gamma} ,$$

Όπου

$$P_a = p + P_{atm}$$

η απόλυτη πίεση που είναι το άθροισμα της σχετικής πίεσης  $p$  και της ατμοσφαιρικής πίεσης  $p_{atm}$  και  $p_v$  η πίεση των υδρατμών του νερού.

Η παραπάνω συνθήκη αποφυγής της σπηλαίωσης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με βάση την σχετική πίεση:

$$\frac{p}{\gamma} \geq \frac{P_v - P_{atm}}{\gamma}$$

Θα πρέπει να επισημανθεί ότι μολονότι στην ενεργειακή εξίσωση χρησιμοποιείται συνήθως η σχετική πίεση, θεωρώντας δηλαδή μηδενική ατμοσφαιρική πίεση (όπως και στο σύνολο των άλλων εφαρμογών του κεφαλαίου) σε προβλήματα που παρουσιάζονται υποπίεσεις θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη η απόλυτη πίεση, δηλαδή θα πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψη η πραγματική ατμοσφαιρική πίεση.

## ΣΠΗΛΛΑΙΩΣΗ (CAVITATION)

Από το θεώρημα του Bernouilli

$$H = \frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{ιδία σταθερη τιμη}$$

είναι φανερό, ότι όταν η ταχύτητα της ροής σε κάποια περιοχή λαμβάνει πολύ μεγάλες τιμές, τότε η πίεση  $p$  λαμβάνει πολύ μικρές τιμές ή ακόμη και αρνητικές τιμές.

Συνεπώς σε ροές νερού με υψηλές ταχύτητες εμφανίζονται στιγμιαίες απόλυτες πιέσεις χαμηλές, έτσι ώστε τοπικά και στιγμιαία η πίεση γίνεται μικρότερη από την πίεση ατμών, οπότε στιγμιαία μεταπίπτει νερό από την υγρή φάση στην αέρια, και δημιουργούνται τοπικές μικρές φυσαλίδες.

Οι φυσαλίδες αυτές μεταφερόμενες σε περιοχές με μεγαλύτερη πίεση μεταπίπτουν στιγμιαία σε υγρή φάση, απελευθερώνοντας τοπικές κρουστικές πιέσεις (στιγμιαίες πιέσεις) πολύ μεγάλου μεγέθους, που καταστρέφουν τα στερεά όρια της ροής, από οποιοδήποτε υλικό και να είναι φτιαγμένα (ακόμη και από ατσάλι). Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται σπηλαιώση (cavitation).

Η ατμοσφαιρική πίεση μπορεί να ληφθεί ίση με (Στάμου, 2009):

$$p_{atm} = 101325 Pa$$

ή σε όρους μήκους:

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} = \frac{101325 Pa}{9790 \frac{N}{m^3}}$$

Για  $T=20^\circ C$  η πίεση των υδρατμών είναι

$$p_v = 2340 Pa,$$

ή σε όρους μήκους:

$$\frac{p_v}{\gamma} = \frac{2340 Pa}{9790 \frac{N}{m^3}} \approx 0.24$$

Συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη για την εμφάνιση του φαινομένου της σπηλαίωσης γράφεται ισοδύναμα για τη σχετική πίεση

$$\frac{p}{\gamma} \geq \frac{2340 Pa - 101325 Pa}{9790 \frac{N}{m^3}} \approx -10.1 m$$

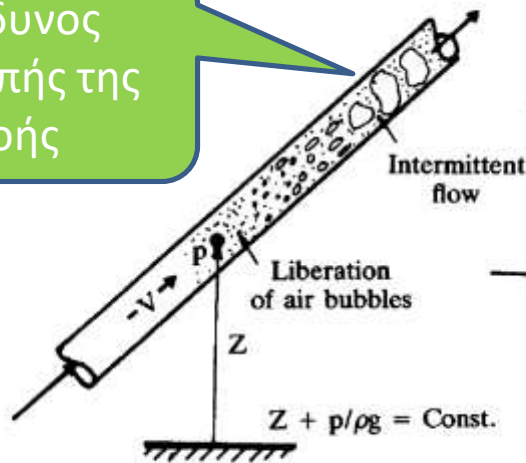
Στην πράξη για λόγους ασφαλείας η παραπάνω συνθήκη μπορεί να γραφεί (Στάμου, 2009):

$$\frac{p}{\gamma} \geq -8 m$$

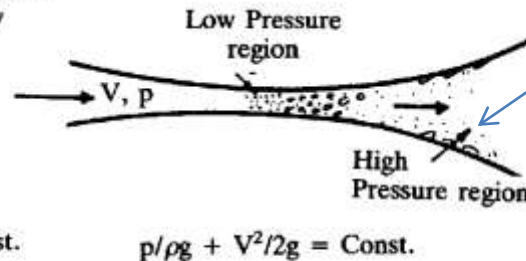
Δηλαδή για να αποφύγω τη συνολική πίεση (απόλυτη) δουλεύω με τη σχετική πίεση και ελέγχω αν η σχετική πίεση είναι μεγαλύτερη από -8 (σχετική πίεση, απλά  $p_{atm} = 0$  μηδέν)

Σταθερή διατομή (εξίσωση συνέχειας) → σταθερή ταχύτητα  
Αύξηση του  $z$  (εξίσωση ενέργειας) → μείωση της πίεσης, κίνδυνος η πίεση να είναι μικρότερη της ατμοσφαιρικής οπότε δημιουργούνται φυσαλίδες (βρασμός νερού)

Κίνδυνος  
διακοπής της  
ροής



a. Rising main of uniform diameter

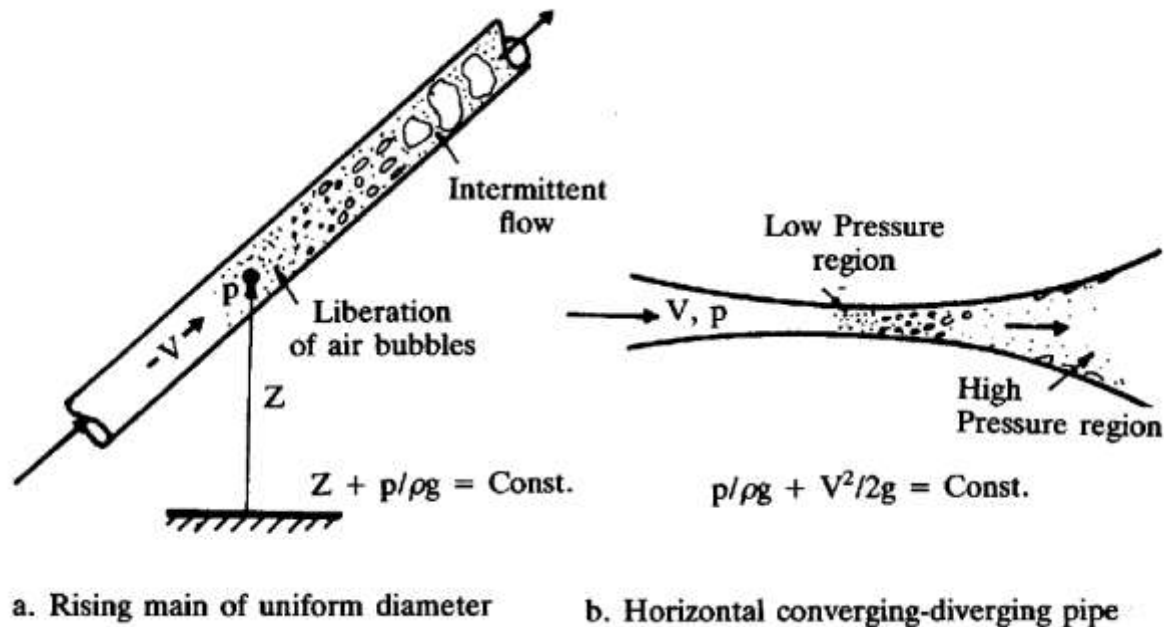


b. Horizontal converging-diverging pipe

Αύξηση πίεσης  
κατάντη, θραύση  
φυσαλίδων,  
σηλαίωση



Πολλοί μελετητές σε συνήθεις αγωγούς υπό πίεση που λειτουργούν με βαρύτητα προκειμένου να αποφεύγονται γενικά οι υποπίεσεις στα υψηλότερα σημεία του δικτύου στην παραπάνω συνθήκη θεωρούν θεωρώντας μηδενική την ατμοσφαιρική πίεση γεγονός που είναι σημαντικά υπέρ της ασφαλείας.

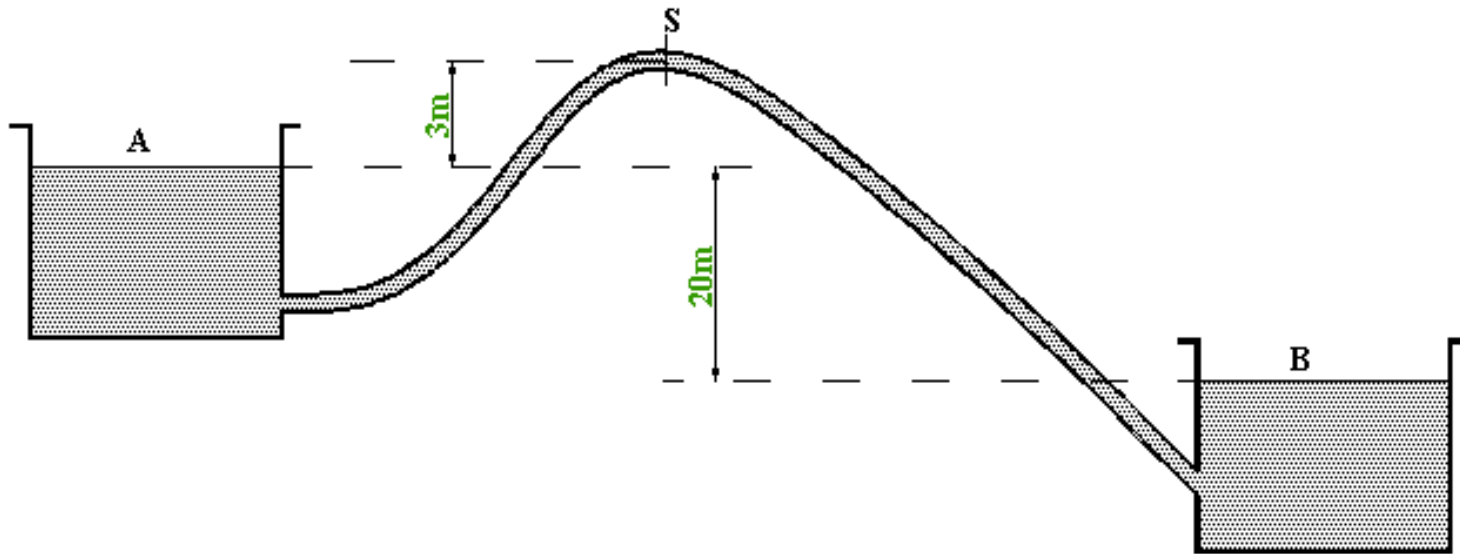


Σχ. 2.30 Ελάττωση της πίεσης και σχηματισμός φυσαλίδων λόγω (α) ανάγλυφου και (β) λόγω στένωσης της διατομής

Ο σίφωνας είναι ένας σωλήνας σχετικά μικρής διαμέτρου και μήκους που χρησιμοποιείται για την παροχέτευση του νερού από μία δεξαμενή σταθερής στάθμης σε μίαν άλλη. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο αντεστραμμένος σίφωνας, στον οποίο η ψηλότερη διατομή βρίσκεται πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια (Δημητρίου, 1995). Χαρακτηριστικό του είναι ότι στρέφει τα κοίλα κάτω ενώ τοπικά ανυψώνει το νερό σε υψηλότερο σημείο από τη στάθμη της ανάντη δεξαμενής. Βεβαίως στο τελικό σημείο κατάντη ο αγωγός είναι χαμηλότερα από τη στάθμη της ανάντη δεξαμενής.

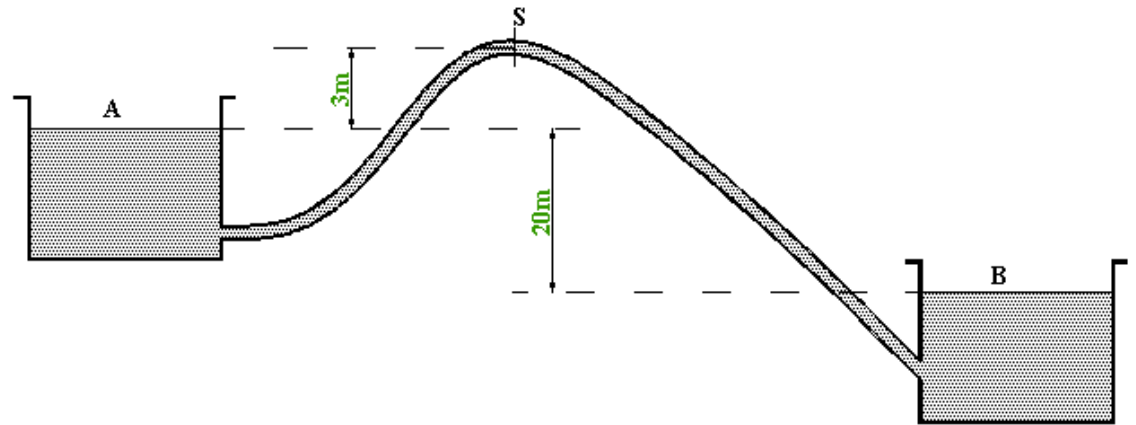
# Παράδειγμα

Σιφωνικός αγωγός διαμέτρου 20cm και μήκους 500m όπως στο σχήμα. Η διαφορά στάθμεων των ελευθέρων επιφανειών των δεξαμενών είναι 20m. Το μήκος του αγωγού από τη δεξαμενή έως το σημείο **S** είναι 100m. Να προσδιοριστεί η παροχή και η πίεση στο **S**.  $f=0.02$  (για έναν πρώτο σχεδιασμό δίνεται η τιμή του  $f$ )



## Λύση

Αρχικά προσδιορίζω την παροχή, β' βασικό πρόβλημα υδραυλικής, έστω τοπικές απώλειες αμελητέες



$$D = 0.2 \text{ m}, \quad Z_A - Z_B = 20 \text{ m},$$

$$Z_A - Z_B = h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$20 = 0.02 \times \frac{500}{0.2} \times \frac{V^2}{2 \times 9.81}$$

$$V = 2.8 \text{ m/s}$$

$$Q = VA = 0.08796 \text{ m}^3/\text{s}$$

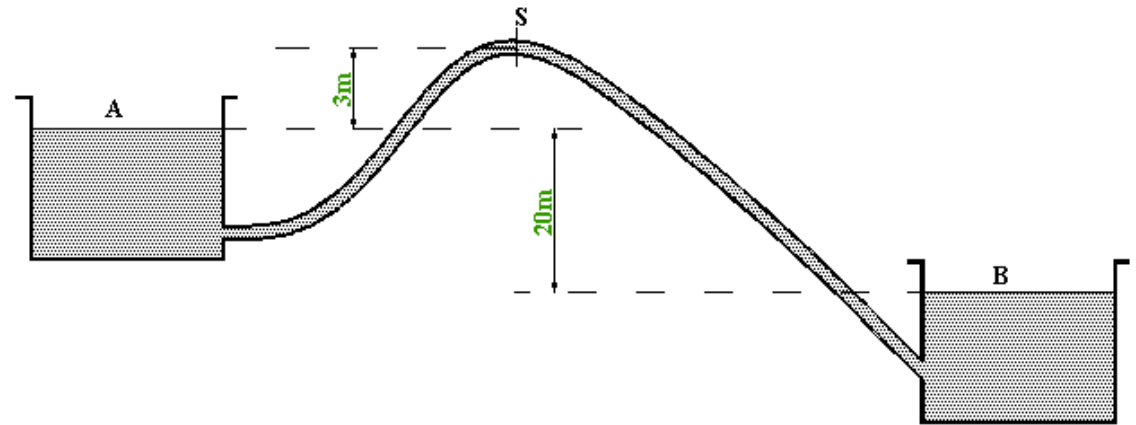
# Κλειστοί αγωγοί προσδιορισμός της πίεσης?

Σε μία διατομή η πίεση είναι σταθερή (ενώ σε ανοικτούς αγωγούς για μία διατομή έχω υδροστατική κατανομή)

**προσδιορισμός πίεσης: Διατήρηση ενέργειας**

*Έλεγχος στη διατομή  
S για υποπίεση*

*Ενέργεια από A σε S*



$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\gamma} + Z_A = \frac{V_S^2}{2g} + \frac{P_S}{\gamma} + Z_S + h_L$$

$$Z_A - Z_S = \frac{V_S^2}{2g} + \frac{P_S}{\gamma} + h_L$$

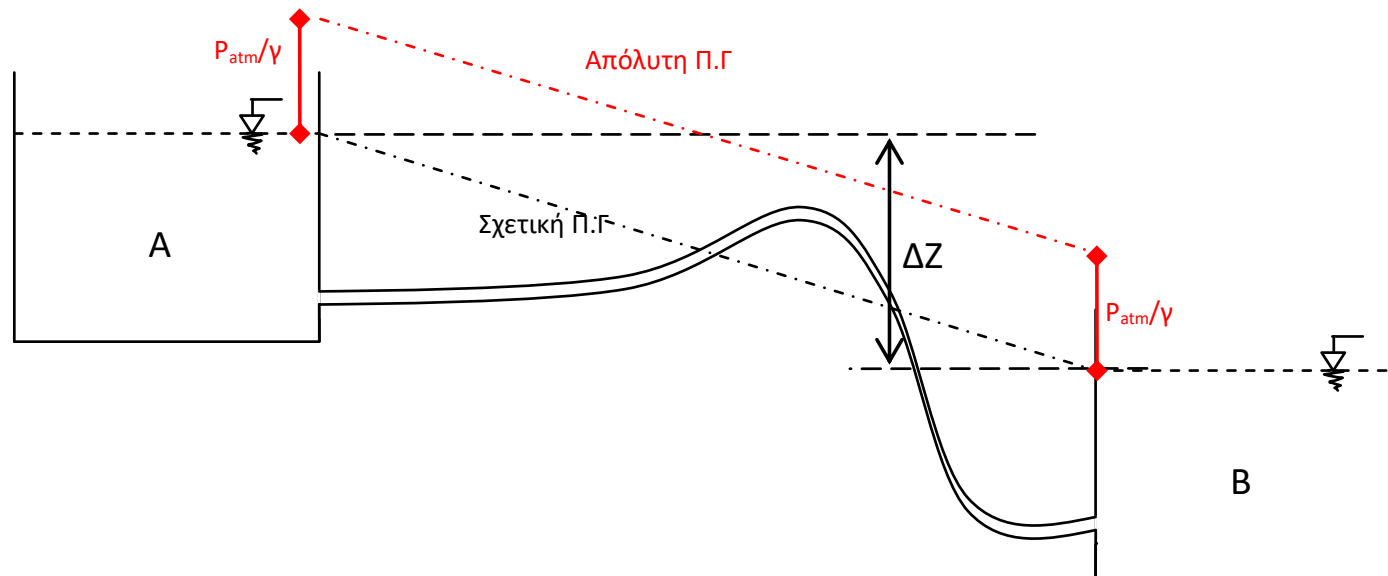
$$0 - 3 = \frac{2.8^2}{2g} + 0.02 \frac{100}{0.2} \times \frac{2.8^2}{2g} + \frac{P_S}{\gamma}$$

$$\frac{P_S}{\gamma} = -7.396 \text{ m of water}$$

Θεώρησα  $P_A=0$   
→ Σχετική πίεση  
Περίπου οριακά  
αποδεκτή

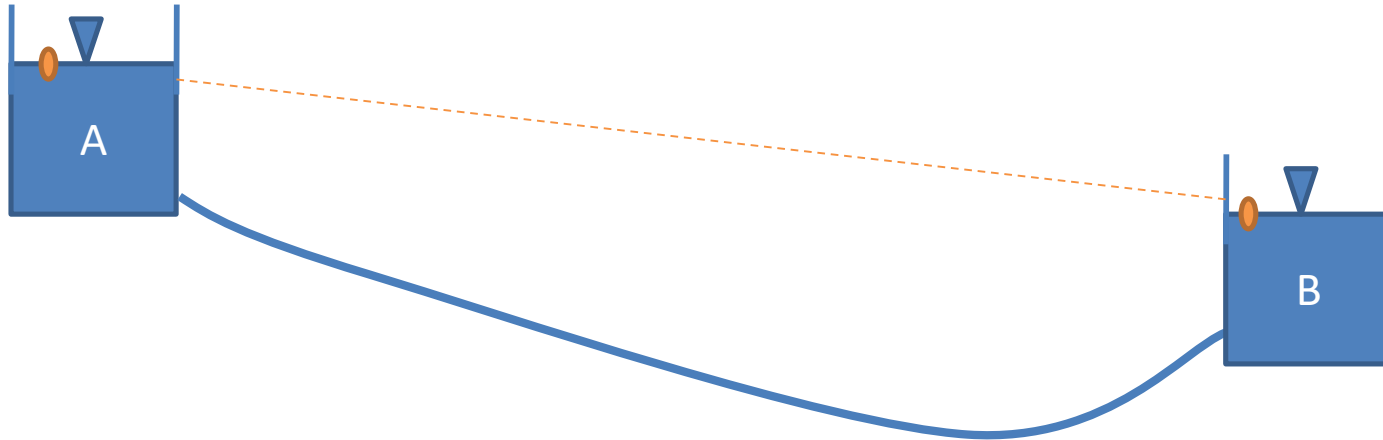
Στην περίπτωση του αυχένα ο αγωγός είναι κάτω από τη στάθμη της ανάντης δεξαμενής A ωστόσο, τμήμα του αγωγού είναι υπεράνω της σχετικής πιεζομετρικής γραμμής (Δημητρίου, 1995). Για την εύρυθμη λειτουργία του αυχένα θα πρέπει η θέση του αγωγού να είναι υποκάτω της απόλυτης πιεζομετρικής γραμμής.

Όπου ως απόλυτη πιεζομετρική γραμμή είναι η πραγματική πιεζομετρική γραμμή λαμβάνοντας υπ' όψη την ατμοσφαιρική πίεση και είναι παράλληλη με την σχετική πιεζομετρική γραμμή, δηλαδή την πιεζομετρική γραμμή θεωρώντας μηδενική την ατμοσφαιρική πίεση. Οι δύο ευθείες απέχουν μεταξύ τους κατά  $p_{atm}/\gamma$ .



Σχ. 2.33: Τυπική διάταξη αυχένα

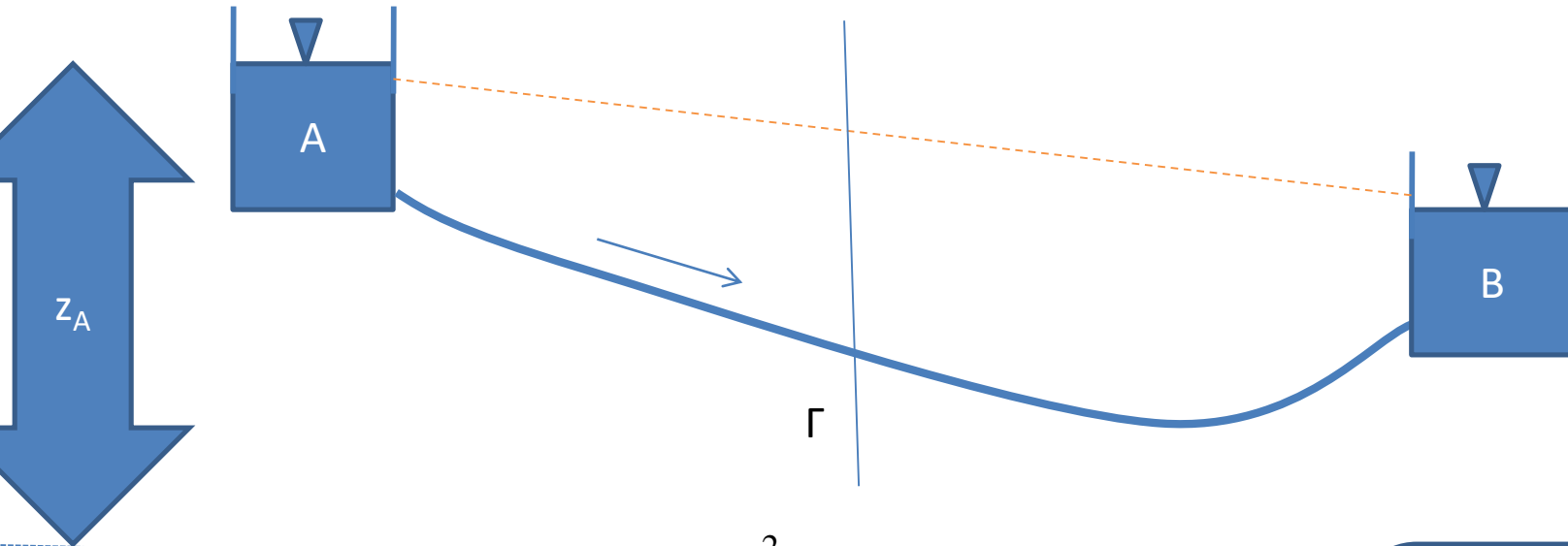
# ΑΔΕ μεταξύ 2 δεξαμενών



$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho g} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \sum h_{fA \rightarrow B} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ V_A, V_B \rightarrow 0 \\ p_A = p_B = p_{atm} \end{matrix}$$

$$\sum h_{fA \rightarrow B} = z_A - z_B$$

# ΑΔΕ σε τυχαίο σημείο $\Gamma$



$$z_A = \frac{p_\Gamma}{\rho g} + z_\Gamma + \frac{V_\Gamma^2}{2g} + \sum h_{fA \rightarrow \Gamma} \Leftrightarrow$$

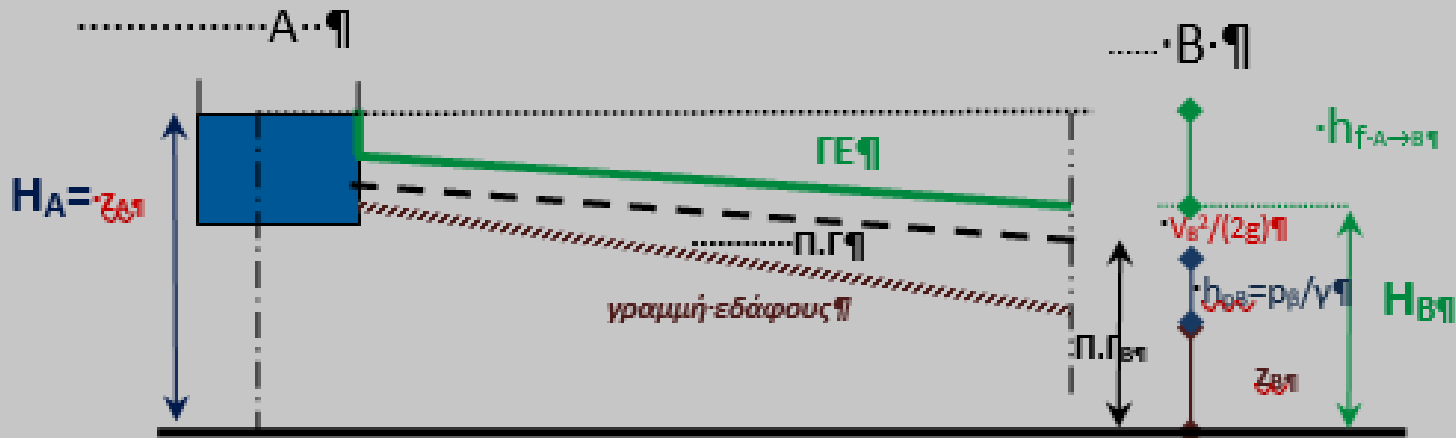
$$\frac{p_\Gamma}{\rho g} = z_A - \sum h_{fA \rightarrow \Gamma} - z_\Gamma - \frac{V_\Gamma^2}{2g}$$

$$H_A = z_A$$

Δεξαμενή, δουλεύω με σχετικές πιέσεις στάθμη ελευθέρως; Επιφανείας = αρχική ενέργεια



# ΓΡΑΜΜΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ αφαιρώ τις απώλειες ενέργειας



( $z_A$  στάθμη επιφανείας της δεξαμενής,  $z_B$  υψόμετρο εδάφους του κόμβου Β,  $\Sigma h_{f, A \rightarrow B}$  οι απώλειες ενέργειας και  $h_{0B}$  το ύψος πίεσης στη θέση Β).

$$H_B = H_A - \sum h_{f, A \rightarrow B}$$

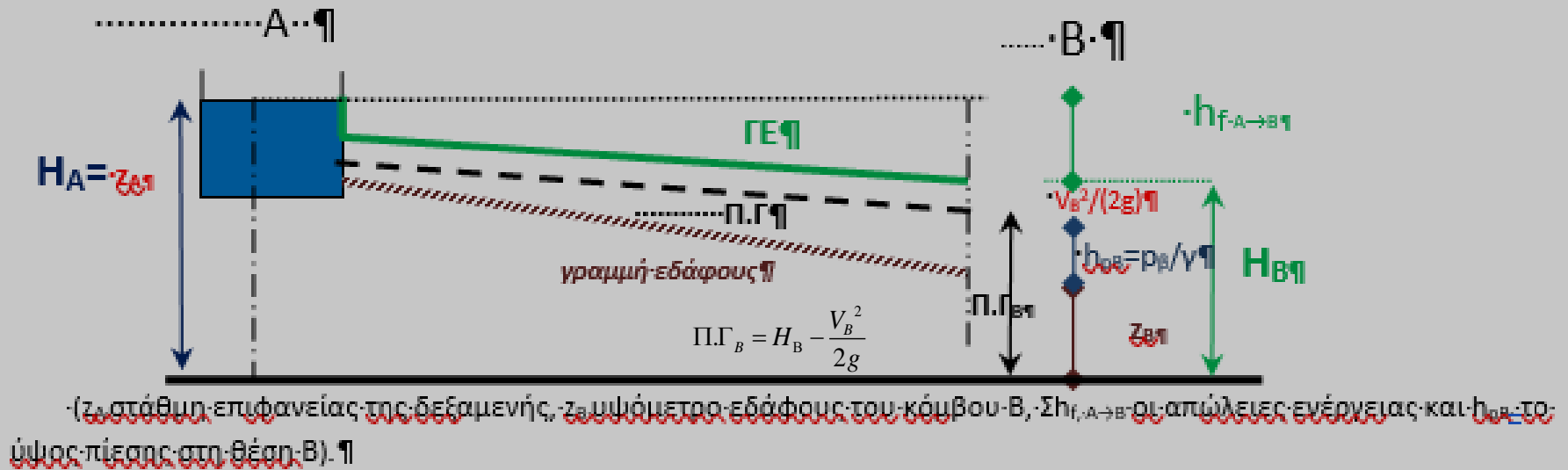
- ΔΕΞΑΜΕΝΗ
- $H_A = Z_A$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

(ή ισοδύναμα: Υπολογισμός της αντίστασης του αγωγού:  $R = \frac{8 \cdot f \cdot L}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5}$ )

Υπολογισμός απωλειών:  $h_f = R \cdot Q^2$

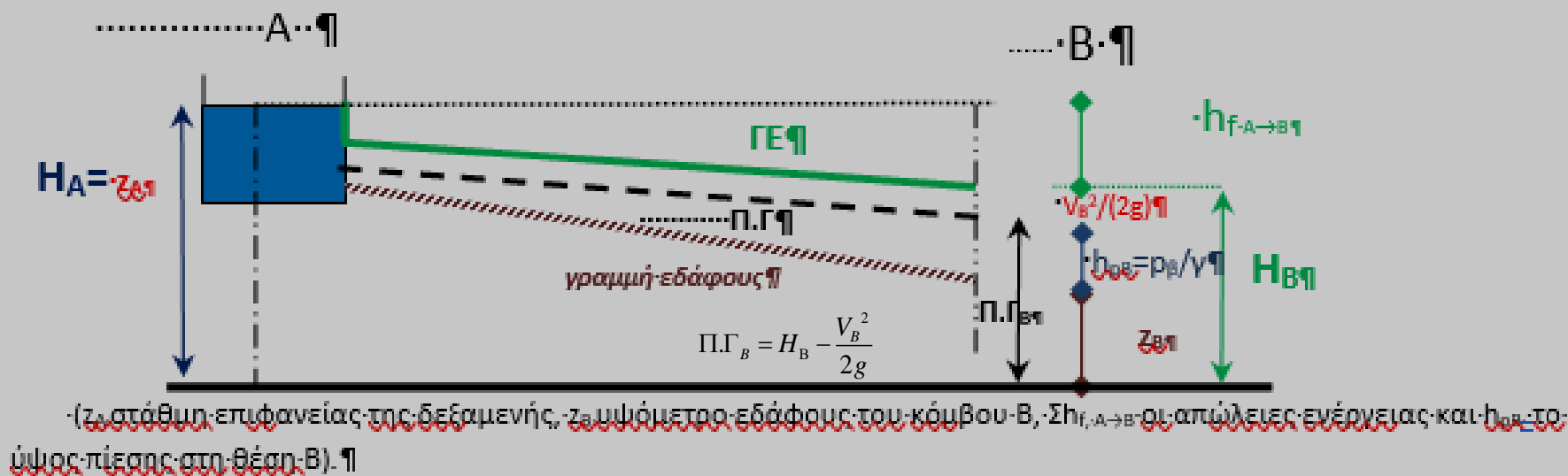
# Πιεζομετρική γραμμή αφαιρώ την κινητική ενέργεια



$$\Pi.Γ_B = H_B - \frac{V_B^2}{2g}$$

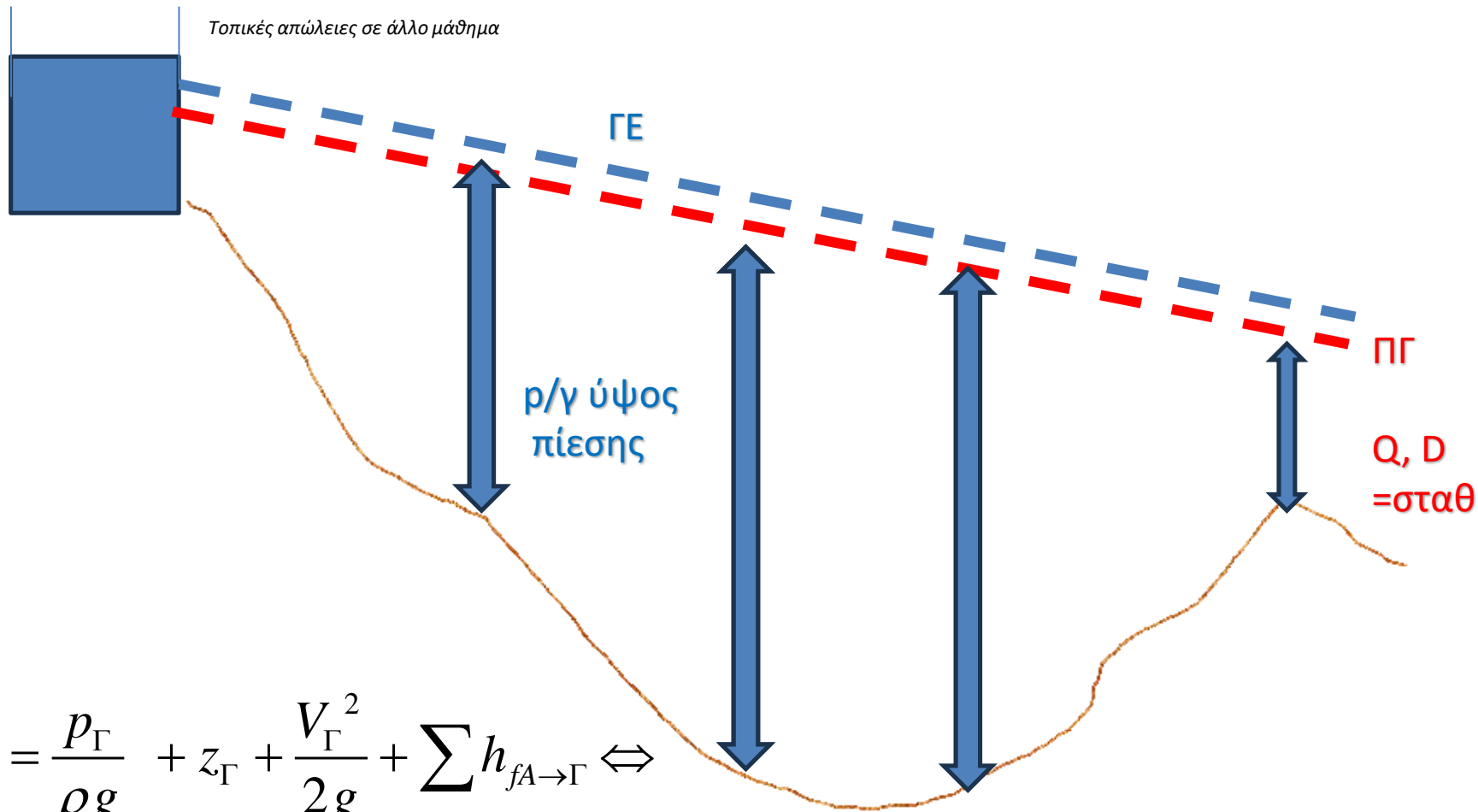
- ΔΕΞΑΜΕΝΗ
- $H_A = z_A$
- $\Pi.Γ = z + p/\gamma$

# Ύψος πίεσης από τη Πιεζομετρική γραμμή αφαιρώ το υψόμετρο εδάφους



$$h_{\rho B} = \Pi.\Gamma_B - z_B$$

- ΔΕΞΑΜΕΝΗ
- $H_A = z_A$
- $\Pi.\Gamma = z + \rho/\gamma$



$$z_A = \frac{p_\Gamma}{\rho g} + z_\Gamma + \frac{V_\Gamma^2}{2g} + \sum h_{fA \rightarrow \Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\frac{p_\Gamma}{\rho g} = z_A - \sum h_{fA \rightarrow \Gamma} - z_\Gamma - \frac{V_\Gamma^2}{2g}$$

Μικρές πιέσεις  
Στα απόμακρα και υψηλά  
σημεία

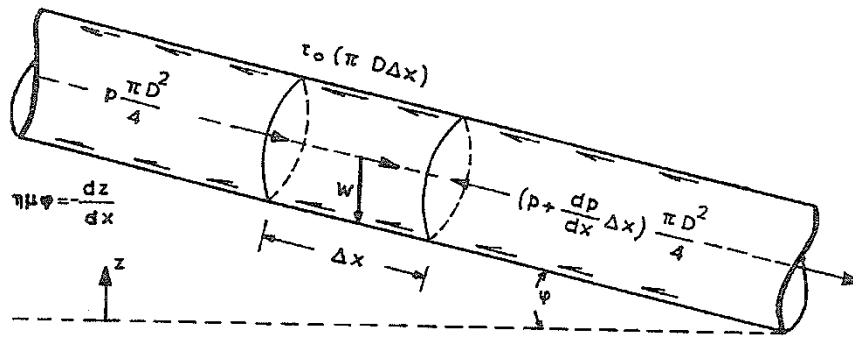
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ- ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

# **Β ΤΡΟΠΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΕΞ DARCY WEISBACH**

# Υπόθεση του συνεχούς μέσου (2)

Εφαρμογή κύρια στην ανάπτυξη εξισώσεων με βάση τις τρεις βασικές εξισώσεις της φυσικής σε ένα απειροστό **όγκο ελέγχου**.

Για παράδειγμα μεταβολή της πίεσης σε κλειστό αγωγό σταθερής διατομής μήκους  $dx$



Εισροή:

Πίεση σταθερή σε όλη τη διατομή =  $p$

Εκροή:

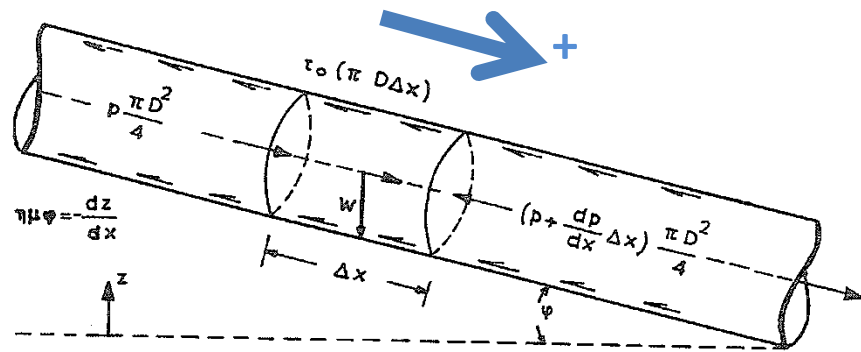
Πίεση σταθερή σε όλη τη διατομή με βάση το θεώρημα Taylor

Συνισταμένη δύναμη με βάση τις πιέσεις:

$$p \cdot A - \left( p + \frac{dp}{dx} \Delta x \right) \cdot A = - \frac{dp}{dx} \Delta x A$$

$$p(x_0 + \Delta x) \approx \left( p(x_0) + \frac{dp}{dx} \Delta x \right)$$

Προσέγγιση με βάση το Θεώρημα Taylor



Νόμος διατήρησης ποσότητας κίνησης:

$$p \frac{\pi D^2}{4} - \left( p + \frac{dp}{dx} \Delta x \right) \frac{\pi D^2}{4} + \gamma \left( \frac{\pi D^2}{4} \Delta x \right) \eta \mu \varphi - \tau_0 \pi D \Delta x = 0$$

$$- \frac{dp}{dx} \frac{D}{4} + \frac{\gamma D}{4} \eta \mu \varphi - \tau_0 = 0$$

$$\eta \mu \varphi = - \frac{dz}{dx}$$

$$\tau_0 = - \frac{\gamma D}{4} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{dx} + \frac{dz}{dx} \right)$$

$\gamma = \rho g$ : σταθ. (αδυσπνίεστα ρευστά)

$$\tau_0 = - \frac{\gamma D}{4} \frac{d}{dx} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) = - \frac{\gamma D}{4} \frac{dh}{dx}$$

$h = \frac{p}{\gamma} + z$  : πιεσομετρικό ύψος ή φορτίο

## Συντελεστής τριβής $f$ των Darcy-Weisbach

$$\tau_o = C_f \frac{\rho v_o^2}{2} \quad (\text{θεωρία οριακής στιβάδας})$$

$\tau_o$  : διατμητική τάση στο στερεό τοίχωμα

$v_o$  : μέση ομοιόμορφη ταχύτητα εκτός οριακής στιβάδας

$C_f$  : συντελεστής αντίστασης (αδιάστατος)

$$\tau_o = \frac{f}{4} \left( \frac{\rho V^2}{2} \right) = \frac{f \rho V^2}{8}$$

Αντί  $C_f$   $f/4$

$f$  : συντελεστής τριβής των Darcy-Weisbach

$V$  : μέση ταχύτητα ροής

$f$  : συνάρτηση των  $Re$  ( $\equiv \frac{VD}{\nu}$ ),  $\frac{\kappa}{D}$ , γεωμετρίας αγωγού



Ο όρος  $\tau_0 \pi D dx$  αναφέρεται στην επιφανειακή δύναμη τριβών όπου  $\tau$  η διατμητική τάση και  $\pi D \cdot dx$  η περίμετρος του κύκλου επί το στοιχειώδες μήκος (εμβαδόν δακτυλίου).

Η διατμητική τάση  $\tau_0$  μπορεί να προσεγγισθεί από την εξίσωση των Darcy-Weisbach:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} f \rho V^2$$

$$h = \frac{p}{\gamma} + z \quad : \text{ πιεσομετρικό ύψος ή φορτίο}$$

$$-\frac{\gamma D}{4} \frac{dh}{dx} = \frac{f \rho V^2}{8} \Rightarrow -dh = f \frac{V^2}{2gD} dx$$

$$-(h_2 - h_1) = f \frac{V^2}{2gD} (x_2 - x_1) \quad L = x_2 - x_1$$

$$h_1 - h_2 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \boxed{h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}} \quad \begin{array}{l} \text{Εξίσωση} \\ \text{Darcy-Weisbach} \end{array}$$

Προσδιορίζει τις γραμμικές απώλειες, ανάλογες του μήκους

$h_f$ : ύψος απωλειών εξαιτίας τριβής