## **Διατήρηση της ορμής** (Εναλλακτική θεώρηση του νόμου του Νεύτωνα)

$$0 = \boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \textbf{σταθερό διάνυσμα}$$

$$0 = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e} = d(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e})/dt \Leftrightarrow \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e} = \text{σταθερή προβολή}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το διάνυσμα $\boldsymbol{e}$ δεν επιτρέπεται να εξαρτάται από τον χρόνο (άμεσα ή έμμεσα)

Η διατήρηση της ορμής (συνολικά είτε ανά κατεύθυνση) ισχύει όχι μόνο για υλικό σημείο, αλλά και για κάθε ***σύστημα***, που δέχεται μηδενική ***εξωτερική*** δύναμη (διάνυσμα ή προβολή), επειδή οι εσωτερικές δυνάμεις δρουν πάντα σε ζεύγη και αλληλοεξουδετερώνονται.

**<u>ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ</u>**

Ένας πύραυλος κινείται ευθύγραμμα στο κενό διάστημα (αγνοούμε την βαρυτική έλξη από γειτονικά σώματα).

Θεωρούμε αρχή καύσης $t = 0$, αρχική ταχύτητα $v_0$ και αρχική μάζα $m_0$, όπου $m_{\mathrm{d}}$ είναι το ωφέλιμο φορτίο (το οποίο θα επιταχυνθεί ως την τελική ταχύτητα) και $m_{\mathrm{p0}} = m_0 - m_{\mathrm{d}}$ αφορά σε προωθητικά υλικά (καύσιμο και οξειδωτικό).

Τα χαρακτηριστικά του κινητήρα (θεωρούνται σταθερά, για απλότητα) ορίζονται ως εξής:
1) σχετική ταχύτητα εξόδου των καυσαερίων, $v_{\mathrm{r}}$ , και

2) ρυθμός εξαγωγής καυσαερίων, $\dfrac{dm}{dt} = \dfrac{dm_{\mathrm{p}}}{dt} = -\mu$

**ΕΡΩΤΗΜΑ 1**

***Ποια η ταχύτητα του πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου;***

Ο πύραυλος μαζί με τα καυσαέρια αποτελούν κλειστό σύστημα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, οπότε υπάρχει διατήρηση της μάζας και διατήρηση της ορμής.

$$\left.\begin{array}{r} m(t+dt)+\mu\,dt=m(t)=m_0-\mu t \\ m(t+dt)v(t+dt)+(\mu\,dt)\big(v(t)-v_{\mathrm{r}}\big)=m(t)v(t) \end{array}\right\},\ 0\le t\le\frac{m_{\mathrm{p}0}}{\mu}$$

Συνδυάζουμε τις εξισώσεις, αγνοούμε απειροστά 2ας τάξεως, απλοποιούμε τον συμβολισμό και λύνουμε τη διαφορική:

$$(m-\mu dt)(v+dv)+\mu v dt-\mu v_r dt=mv\Leftrightarrow m dv=\mu v_{\mathrm{r}}\,dt$$

$$\Leftrightarrow dv=\frac{\mu v_{\mathrm{r}}}{m_0-\mu t}dt\Rightarrow\boxed{v(t)=v_0+v_r\log\left(\frac{m_0}{m_0-\mu t}\right)}$$

**ΕΡΩΤΗΜΑ 2**

***Για ποια κατανομή της μάζας $m_0$ μεταξύ $m_d$ και $m_{p0}$ μεγιστοποιείται η τελική κινητική ενέργεια του πυραύλου, δηλαδή η Κ.Ε. όταν μόνο το ωφέλιμο φορτίο, $m_d$, μένει;***

$$v_{\max} = v\left(\frac{m_{p0}}{\mu}\right) = v_0 + v_r \log\left(\frac{m_0}{m_d}\right), \qquad K_d = \frac{1}{2} m_d v_{\max}^2$$

$$0 = \frac{dK_d}{dm_d} = \frac{v_{\max}^2}{2} + m_d v_{\max} \frac{dv_{\max}}{dm_d} = \frac{v_{\max}^2}{2} - v_{\max} v_r$$

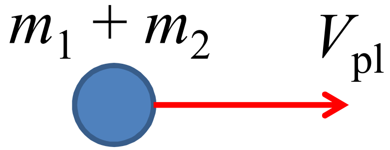
$$\Leftrightarrow \boxed{v_{\max} = 2v_r} \Leftrightarrow \boxed{m_d = m_0 \exp\left(\frac{v_0}{v_r} - 2\right), \quad v_0 \leq 2v_r}$$

Αν $v_0 = 2v_r$, δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο η Κ.Ε. και σωστά προκύπτει $m_d = m_0 \exp(0) = m_0$. Αλλιώς, $v_0 < 2v_r \Rightarrow m_d < m_0$. Τέλος, για $v_0 = 0$ προκύπτει $m_d = m_0 \exp(-2) \simeq 0{,}135 m_0$

# Διατήρηση ορμής σε κλειστό σύστημα 1-D κρούση υλικών σημείων (1)


$$v_1 - v_2 > 0$$

**<u>Απολύτως Πλαστική</u> Κρούση:**



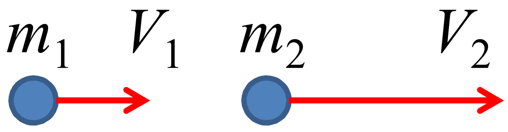

Οι δύο μάζες αποτελούν κλειστό σύστημα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, οπότε υπάρχει διατήρηση της ορμής, η οποία αρκεί για να περιγράψει την <u>Απόλύτως Πλαστική</u> κρούση:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_{\mathrm{pl}} \Leftrightarrow \boxed{V_{\mathrm{pl}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

## Διατήρηση ορμής σε κλειστό σύστημα 1-D κρούση υλικών σημείων (2)


$$v_1 - v_2 > 0$$

**<u>Απολύτως Ελαστική</u> Κρούση:**




$$V_1 - V_2 < 0$$

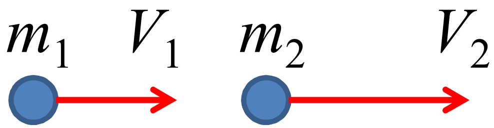
Μαζί με την **διατήρηση της ορμής**, χρειάζεται να αξιοποιηθεί και η **διατήρηση της κινητικής ενέργειας**. Μετά από πολλές και περίπλοκες πράξεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m V_1 + m_2 V_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m V_1^2 + m_2 V_2^2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} V_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \equiv 2V_{\mathrm{pl}} - v_1 \\ V_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \equiv 2V_{\mathrm{pl}} - v_2 \end{aligned}}$$

## Διατήρηση ορμής σε κλειστό σύστημα 1-D κρούση υλικών σημείων (3)


$$v_1 - v_2 > 0$$

**<u>Ατελώς Ελαστική</u> Κρούση:**




$$V_1 - V_2 < 0$$

Στην περίπτωση αυτή ένα **μέρος** της κινητικής ενέργειας **χάνεται**, αλλά ***δεν μπορεί*** να χαθεί ***όλη***, καθώς ακόμα και για απολύτως πλαστική κρούση παραμένει κινητική ενέργεια μετά την κρούση:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \geq m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 \geq \left(m_1 + m_2\right) V_{\text{pl}}^2$$

Η πολύπλοκη μαθηματική επεξεργασία μπορεί να απλοποιηθεί, αν η κίνηση πριν και μετά την κρούση περιγραφεί ως προς το **κέντρο μάζας**.

**ΟΡΙΣΜΟΣ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

Για κάθε σύστημα υλικών σημείων είναι χρήσιμο να ορίσουμε το κέντρο μάζας (CM):

$$M_{\mathrm{CM}} \triangleq \sum_j m_j, M_{\mathrm{CM}} \boldsymbol{X}_{\mathrm{CM}} \triangleq \sum_j m_j \boldsymbol{x}_j \Rightarrow M_{\mathrm{CM}} \boldsymbol{V}_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j \boldsymbol{v}_j \Rightarrow$$

$$M_{\mathrm{CM}} \boldsymbol{A}_{\mathrm{CM}} = \sum_j m_j \boldsymbol{a}_j \triangleq \sum_j \boldsymbol{F}_j \equiv \sum_j \left( \boldsymbol{F}_{j,\mathrm{ext}} + \sum_i \boldsymbol{F}_{j,i} \right) \equiv \sum_j \boldsymbol{F}_{j,\mathrm{ext}}$$

όπου οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται ως ζεύγη δράσης και αντίδρασης και αλληλοεξουδετερώνονται, με αποτέλεσμα η επιτάχυνση του CM να εξαρτάται από την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}} \triangleq \sum_j \boldsymbol{F}_{j,\mathrm{ext}}$

Για **μηδενική εξωτερική δύναμη** το CM αποτελεί **Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς!!!**

# Διατήρηση ορμής σε κλειστό σύστημα 1-D κρούση υλικών σημείων (4)

$$v_{1,\mathrm{CM}} = v_1 - V_{\mathrm{CM}} \qquad v_{2,\mathrm{CM}} = v_2 - V_{\mathrm{CM}}$$

$m_1$ $\qquad$ $m_2$

$$V_{\mathrm{CM}} \triangleq \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \equiv V_{\mathrm{pl}}$$

$$\boxed{m_1 v_{1,\mathrm{CM}} + m_2 v_{2,\mathrm{CM}} = 0!!!}$$

**Απολύτως Ελαστική:** $\quad V_{1,\mathrm{CM}} = -v_{1,\mathrm{CM}} \qquad V_{2,\mathrm{CM}} = -v_{2,\mathrm{CM}}$

$m_1$ $\qquad$ $m_2$

**Ατελώς Ελαστική:** $\quad V_{1,\mathrm{CM}} = -\alpha v_{1,\mathrm{CM}} \qquad V_{2,\mathrm{CM}} = -\alpha v_{2,\mathrm{CM}}$

$m_1$ $\qquad$ $m_2$

Ο συντελεστής $0 \le \alpha \le 1$ ρυθμίζει το είδος της κρούσης, από απολύτως πλαστική ($\alpha = 0$) μέχρι απολύτως ελαστική ($\alpha = 1$)!

Η συνολική Κ.Ε. του συστήματος πριν την κρούση ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς (0) προκύπτει ίση με το **άθροισμα** της Κ.Ε. του CM ως προς το αρχικό (0) και της Κ.Ε. των μαζών ως προς το σύστημα που ταξιδεύει με το CM!!!!

$$2K_{,\mathrm{CM}} \triangleq m_1 v_{1,\mathrm{CM}}^2 + m_2 v_{2,\mathrm{CM}}^2 \triangleq m_1 \left(v_1 - V_{\mathrm{CM}}\right)^2 + m_2 \left(v_2 - V_{\mathrm{CM}}\right)^2$$

$$\equiv \left(m_1 v_1^2 - 2m_1 v_1 V_{\mathrm{CM}} + m_1 V_{\mathrm{CM}}^2\right) + \left(m_2 v_2^2 - 2m_2 v_2 V_{\mathrm{CM}} + m_2 V_{\mathrm{CM}}^2\right)$$

$$\equiv \left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right) - 2V_{\mathrm{CM}}\left(m_1 v_1 + m_2 v_2\right) + \left(m_1 + m_2\right) V_{\mathrm{CM}}^2$$

$$\equiv 2K_{,0} - 2V_{\mathrm{CM}}\left(M_{\mathrm{CM}} V_{\mathrm{CM}}\right) + M_{\mathrm{CM}} V_{\mathrm{CM}}^2 \equiv 2K_{,0} - M_{\mathrm{CM}} V_{\mathrm{CM}}^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{K_{,0} \equiv K_{,0}(\mathrm{CM}) + K_{,\mathrm{CM}}}$$

Η ενέργεια $K_{,0}$(CM) διατηρείται πλήρως κατά την κρούση, αφού το CM συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα $V_{\mathrm{CM}}$! Αντίθετα, η $K_{,\mathrm{CM}}$ διατηρείται μόνο σε ποσοστό $0 \leq \alpha^2 \leq 1$!