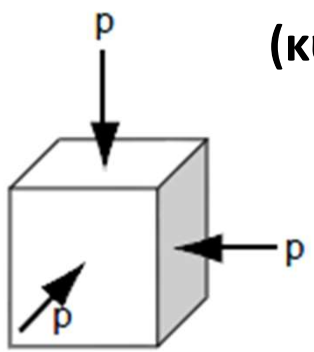
ΡΕΥΣΤΑ

- μπορούν να ρέουν
- παίρνουν το σχήμα του δοχείου που τα περιέχει
- Δεν μπορούν να αντισταθούν σε επιφανειακές δυνάμεις (εφαπτόμενες στην επιφάνεια) => δεν αναπτύσσουν διατμητικές τάσεις
- Ασκούν δυνάμεις σε διεύθυνση κάθετη στη επιφάνεια



Υδροστατικός τανυστής τάσεων
(κύριος σε οποιοδήποτε σύστημα)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$$e_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$e_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]$$

$$e_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-2\nu}{E}p \end{bmatrix}$$

Μεταβολή όγκου:
ε_{vol}= -3(1-2ν)p/E =>
k=E/[3(1-2ν)] – Μέτρο διόγκωσης
(bulk modulus of elasticity)

Πυκνότητα ρ

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{m}{V}$$

Βαθμωτό μέγεθος (Kgr/m^3)

Πίεση p

$$p = \frac{F}{A}$$

Μονάδα μέτρησης 1 Pa = 1 N/m^2

1 atmosphere (atm) = $1.01x10^5$ Pa (η ατμοσφαιρική πίεση στην στάθμη της θάλασσα) ή 0,1MPa

Material or Object	Density (kg/m^3)	Material or Object	Density (kg/m^3)
Interstellar space	10^{-20}	Iron	7.9×10^3
Best laboratory vacuum	10^{-17}	Mercury (the metal, not the planet)	13.6×10^3
Air: 20°C and 1 atm pressure	1.21	Earth: average	5.5×10^3
20°C and 50 atm	60.5	core	9.5×10^3
Styrofoam	1×10^2	crust	2.8×10^3
Ice	0.917×10^3	Sun: average	1.4×10^3
Water: 20°C and 1 atm	0.998×10^3	core	1.6×10^5
20°C and 50 atm	1.000×10^3	White dwarf star (core)	10^{10}
Seawater: 20°C and 1 atm	1.024×10^3	Uranium nucleus	3×10^{17}
Whole blood	1.060×10^3	Neutron star (core)	10^{18}

Το νερό ελάχιστα μεταβάλει την πυκνότητα του υπό πίεση (την μεταβάλει λόγω °C) → ασυμπίεστο

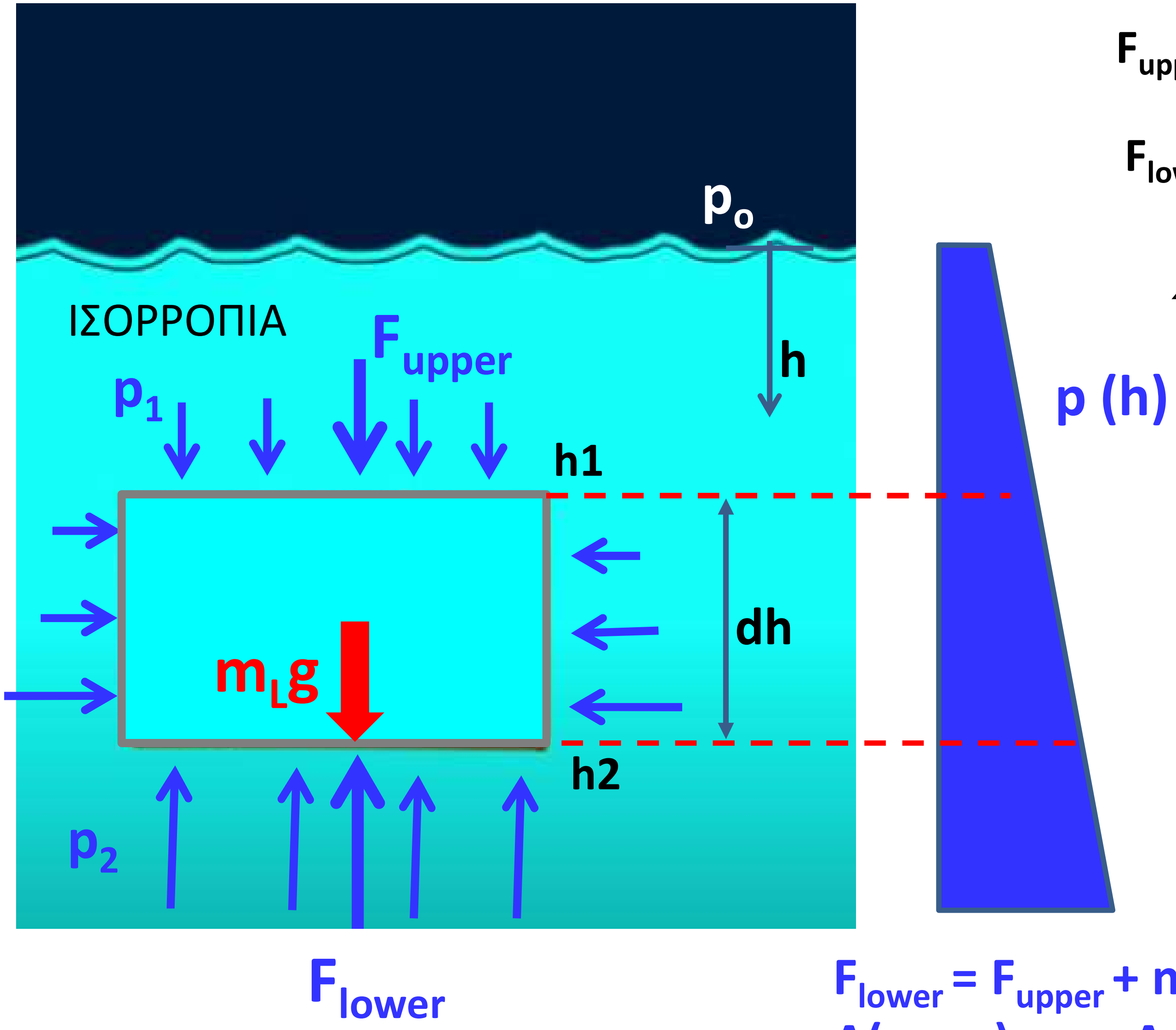
Τα αέρια είναι συμπιεστά…

Ρευστό σε ηρεμία

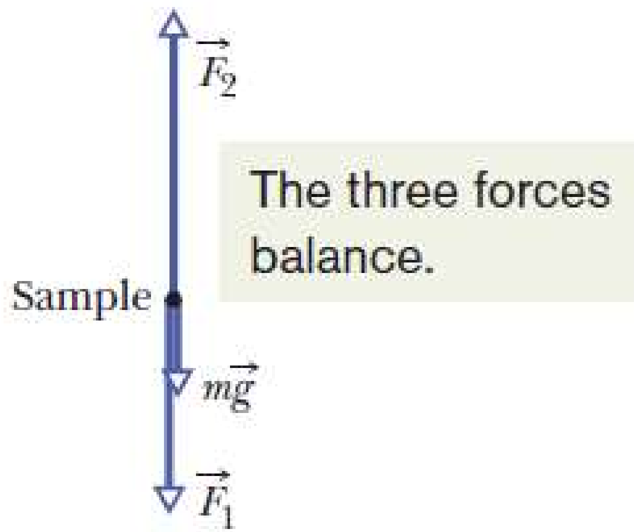
Η πίεση (υδροστατική πίεση) σε ένα σημείο του υγρού σε ηρεμία (στατική ισορροπία) εξαρτάται μόνο από το βάθος

$F_{upper}(F_1)=A*p_1$

$F_{lower}(F_2)=A*p_2$



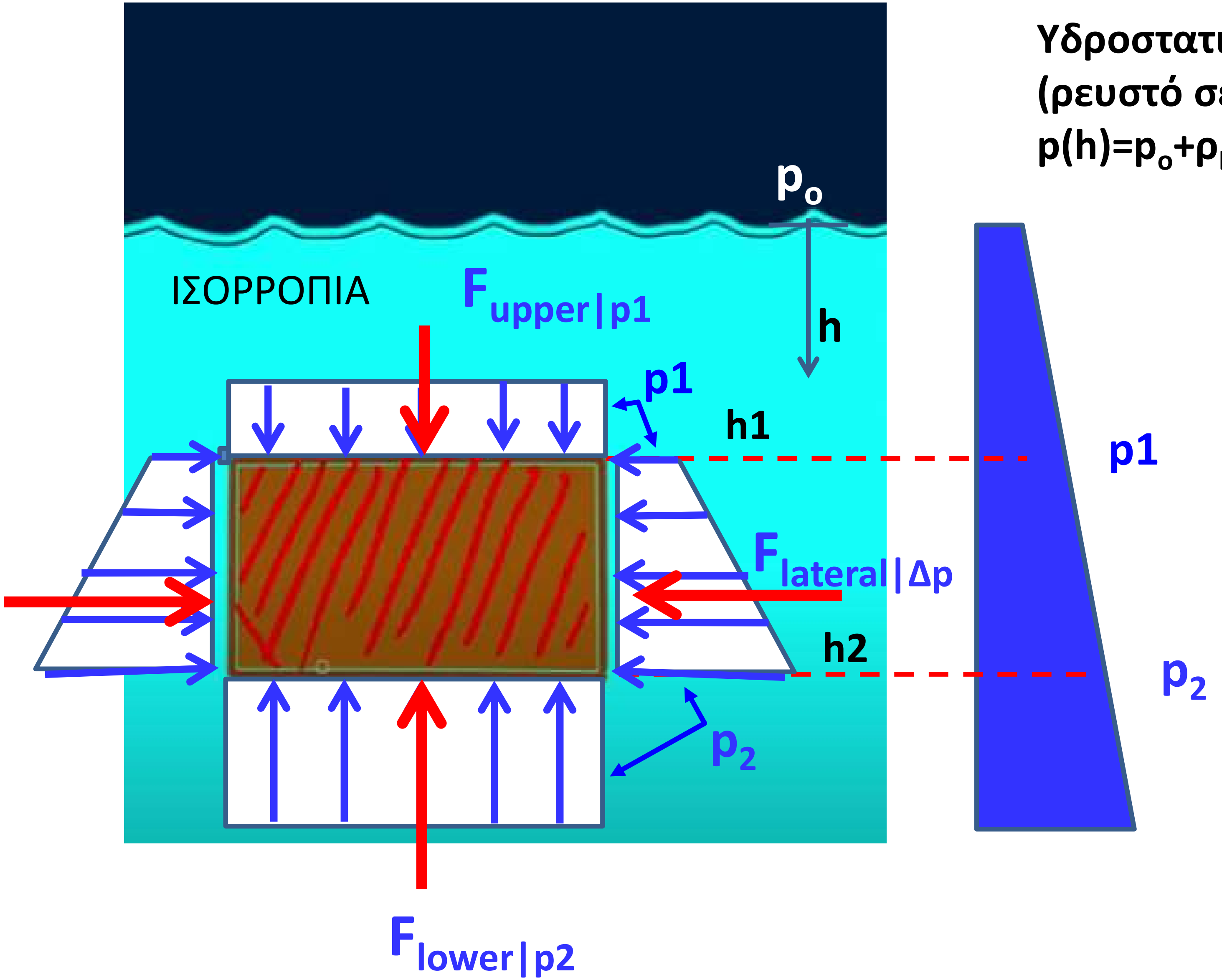
Διάγραμμα Ελευθέρου σώματος



$F_{lower} = F_{upper} + m_L \cdot g$

$A(p_2-p_1) = \rho_L g\, A\, (h_2-h_1) \rightarrow p_2 = p_1 + \rho_L g\, (h_2-h_1)$

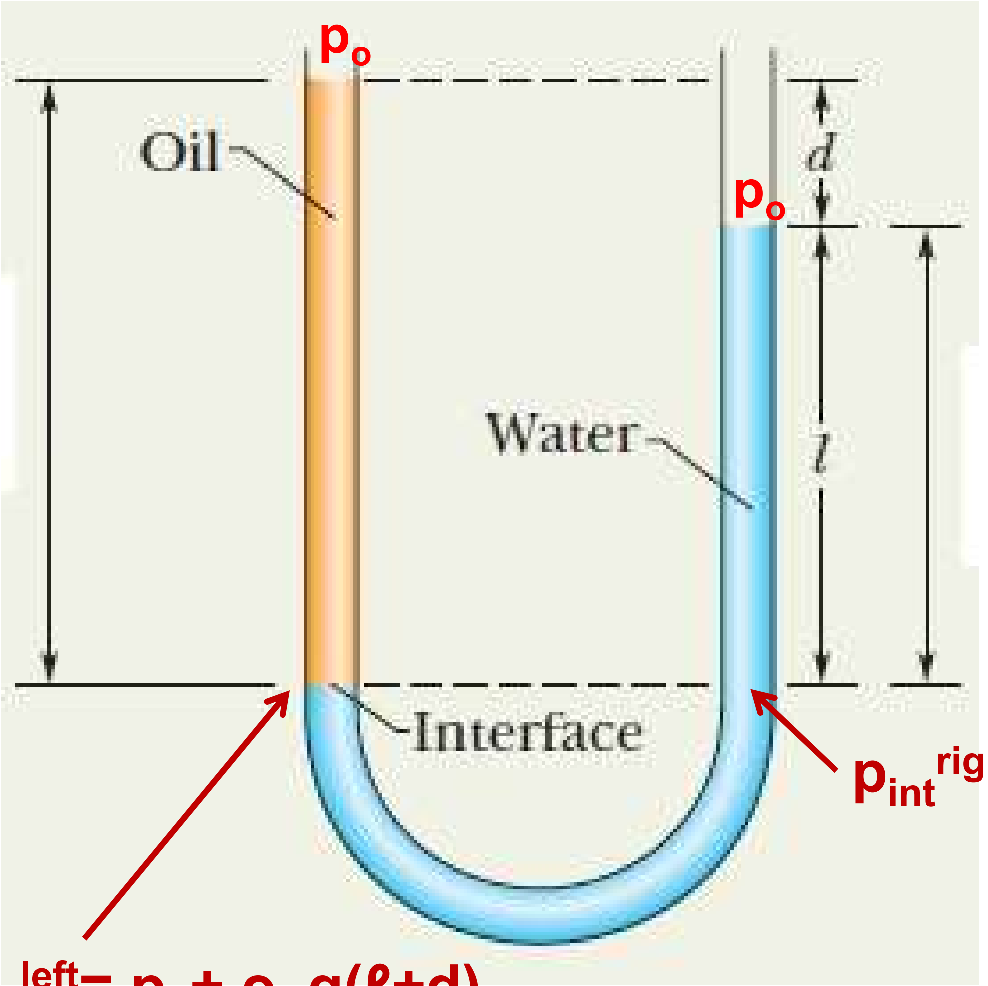
$dp = \rho_L g dh \rightarrow p-p_o = \rho_L gh \rightarrow p(h) = p_o + \rho_L gh$



Υδροστατική πίεση (ρευστό σε ηρεμία):

$$p(h)=p_o+\rho_L\cdot g\cdot h$$

Παράδειγμα: εύρεση άγνωστης πυκνότητας
Σωλήνας σταθερής διατομής



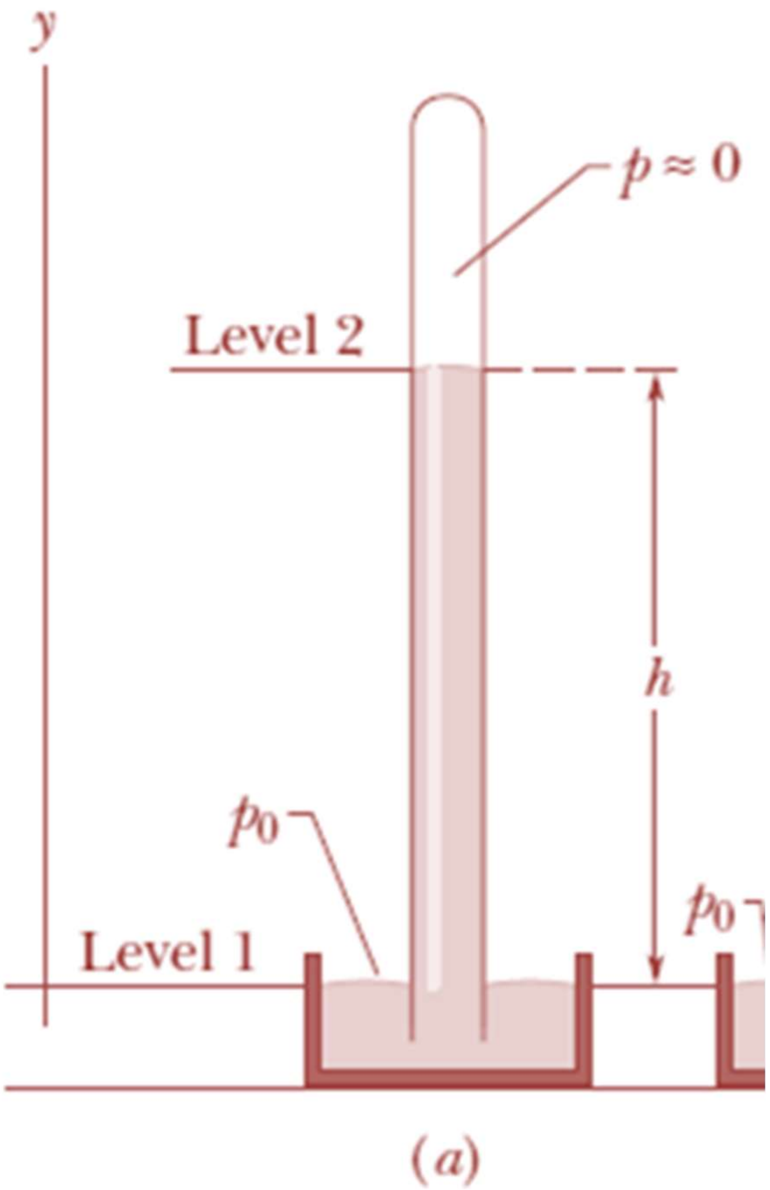
$p_{int}^{right} = p_o + \rho_w g \ell$

$p_{int}^{left} = p_o + \rho_O g(\ell + d)$

$p_{int}^{left} = p_{int}^{right} \rightarrow p_o + \rho_O g(\ell + d) = p_o + \rho_w g \ell$

$\boxed{\rightarrow \rho_O = \rho_w \cdot \ell/(\ell + d)}$

Μέτρηση ατμοσφαιρικής πίεσης: Βαρόμετρο Υδραργύρου



Ο Σωλήνας γεμίζει με υδράργυρο και αναποδογυρίζει μέσα σε δοχείο με υδράργυρο.

$p(y) = p_o + \rho g y$

Στην στάθμη 1 εξωτερικά: $p_1^{\varepsilon\xi}=p_o$

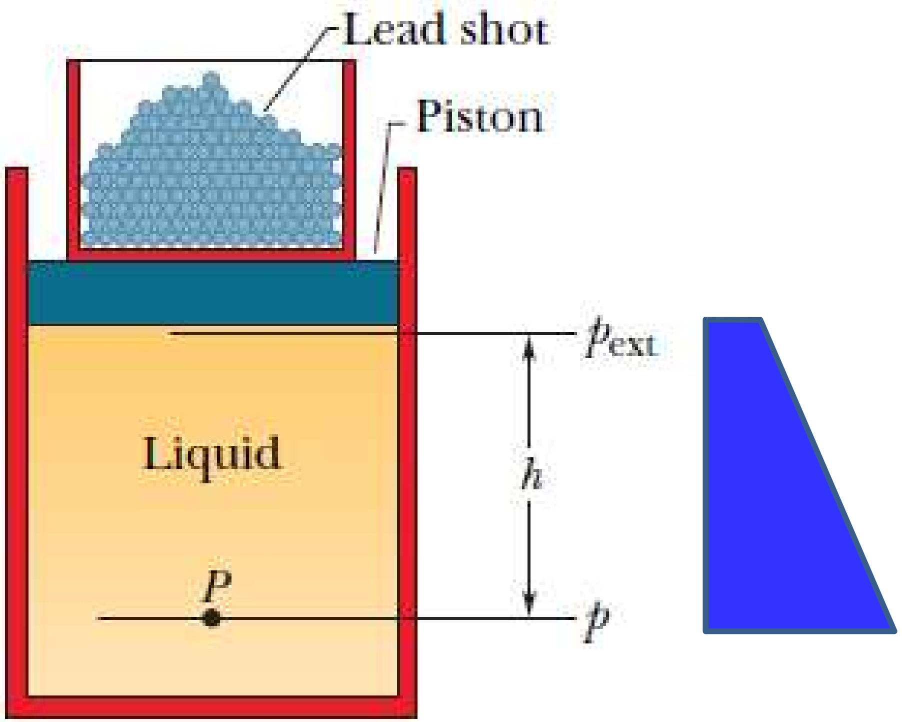
Στην στάθμη 1 εσωτερικά:
$p_1^{\varepsilon\sigma\omega\tau}=0$ (κενό) $+\rho g h$

$p_1^{\varepsilon\xi} = p_1^{\varepsilon\sigma\omega\tau} \Rightarrow p_o = \rho g h$

$\rho_{\upsilon\delta\rho\alpha\rho\gamma\acute{\upsilon}\rho o\upsilon}=13.6\times10^3 Kgr/m^3$
(μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία)

Η Αρχή του Pascal (1652μΧ)

Μια μεταβολή πίεσης σε έγκλειστο υγρό μεταβιβάζεται αυτούσια στο υγρό και στα τοιχώματα του δοχείου



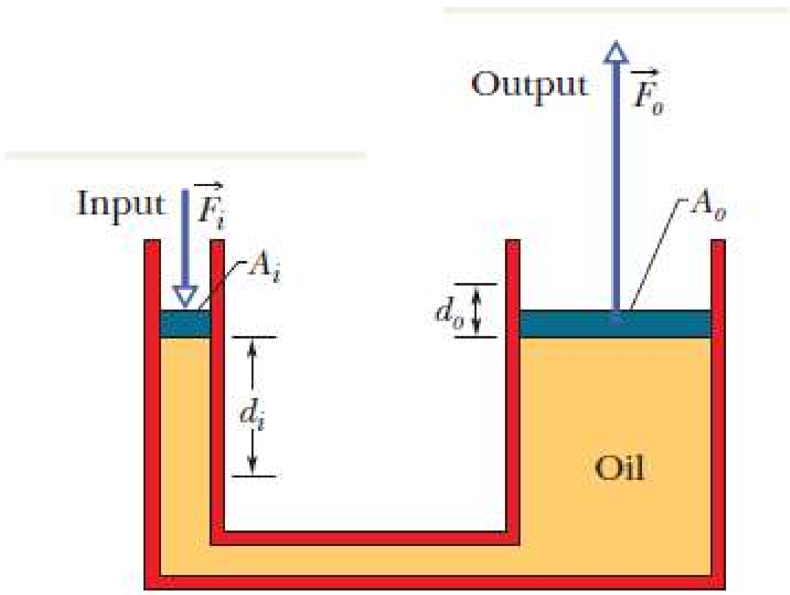
$$p = p_{ext} + \rho_L gh$$

Εάν προσθέσω επιπλέον πίεση dp_{ext}

$p' = (p_{ext} + dp_{ext}) + \rho gh$

$dp = p' - p = dp_{ext}$, η μεταβολή της πίεσης είναι ανεξάρτητη του ύψους και είναι ίδια σε όλα τα σημεία του υγρού

Υδραυλική πρέσσα **Εφαρμογή στον Υδραυλικό γρύλο για ανύψωση μεγάλου βάρους**



Επιβάλω στο αριστερό **έμβολο** (εισόδου) πίεση: $dp=F_i/A_i$

Το δεξιό **έμβολο** (εξόδου) δέχεται ίδια πίεση (Αρχή Pascal) από το υγρό (προς τα πάνω) => $dp=F_o/A_o$

$\mathbf{F_o=F_iA_o/A_i}$ **ή** $\mathbf{F_o/F_i = A_o/A_i}$

Αν $\mathbf{A_o>A_i \Rightarrow F_o > F_i}$

Μετακινώ το αριστερό **έμβολο** (εισόδου) κατά $\mathbf{d_i}$ οπότε το δεξιό **έμβολο** (εξόδου) ανέρχεται κατά $\mathbf{d_o}$.

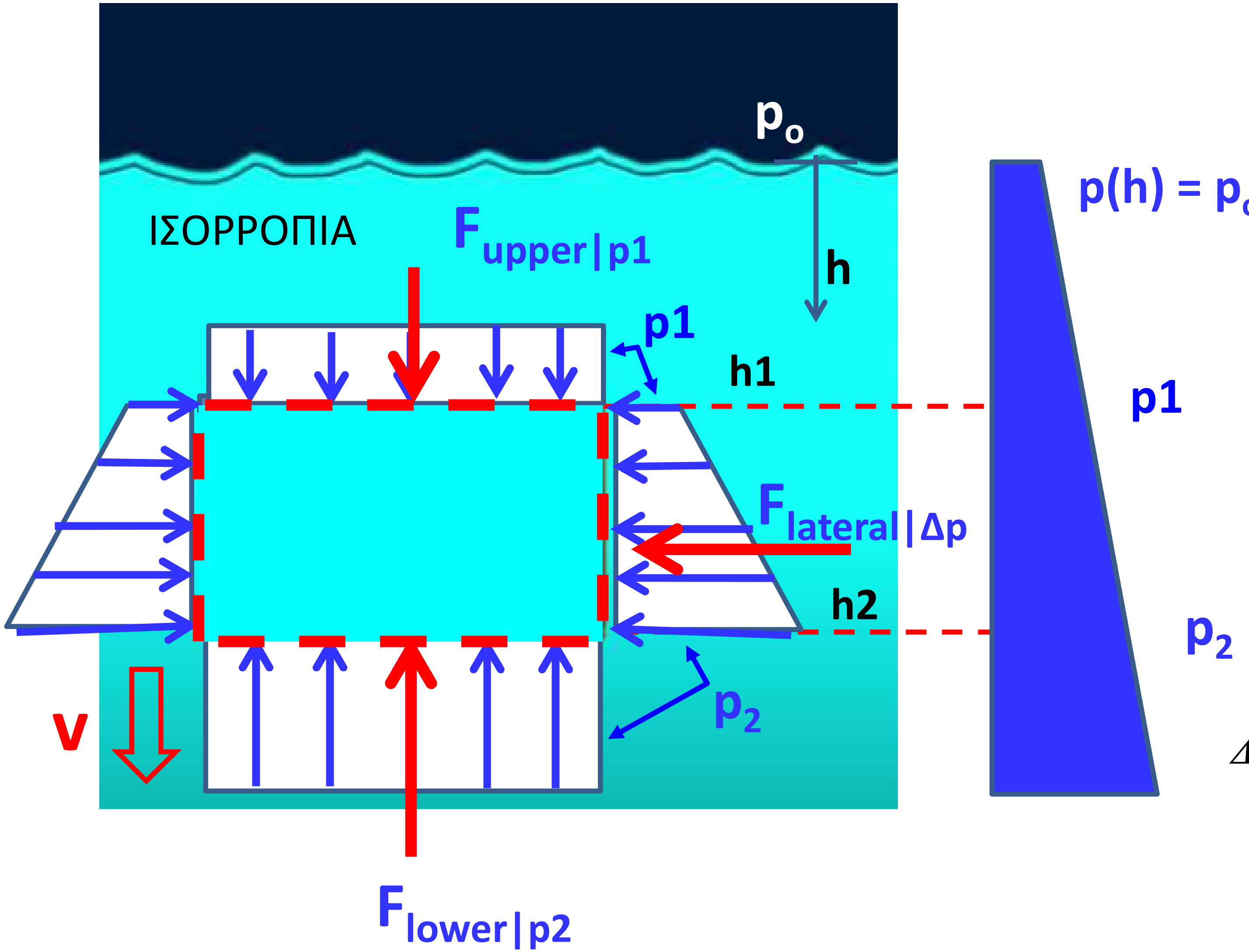
Ο όγκος του υγρού που μετατοπίζεται είναι:

$V=A_id_i= A_od_o \Rightarrow \mathbf{d_o=d_i\, A_i/A_o}$ εάν $A_o>A_i$ $d_o<d_i$

Έργο εξόδου: $\mathbf{W=F_od_o=F_iA_o/A_i\, d_i\, A_i/A_o \Rightarrow W=F_id_i}$ **(έργο εισόδου= έργο εξόδου)**

Υγρό σε ηρεμία

Η πίεση σε ένα σημείο του υγρού σε ηρεμία (στατική ισορροπία) εξαρτάται μόνο από το βάθος



$p(h) = p_o + \rho_\upsilon g h$

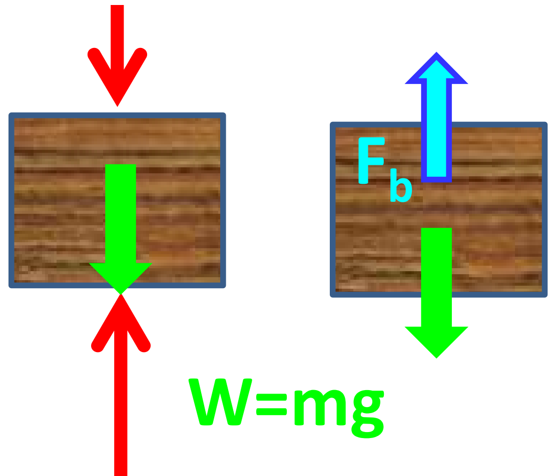
$F_{upper}(F_1)=A*p_1$

$F_{lower}(F_2)=A*p_2$

$$W = F_b$$
$$\rho_{\sigma\tau} \cdot V \cdot g = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V$$
$$\rho_{\sigma\tau} = \rho_\upsilon$$

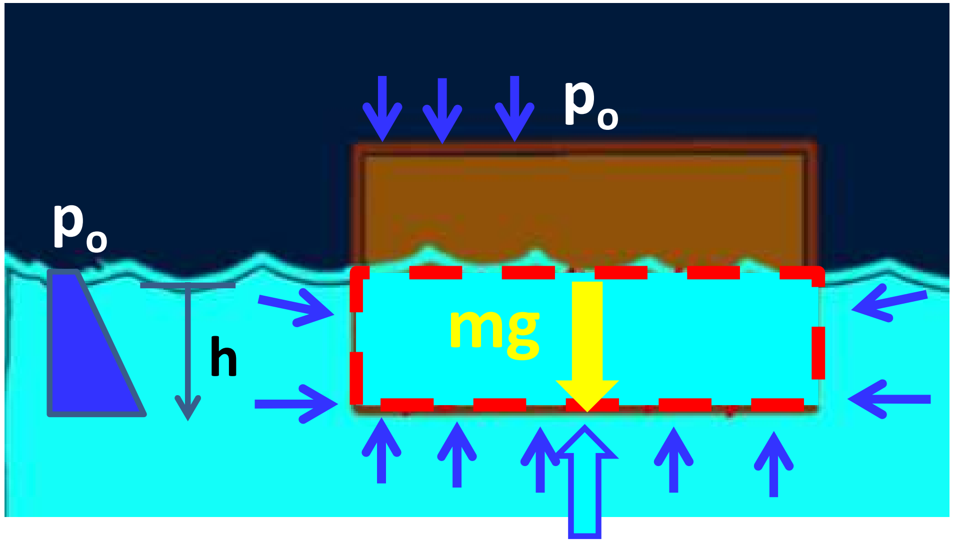
$W > F_b \Rightarrow \rho_{\sigma\tau} > \rho_\upsilon$

Διάγραμμα Ελευθέρου σώματος



Εκτόπισμα υγρού

$$F_b = F_{lower} - F_{upper}$$
$$= A\,(p_2 - p_1) = A \cdot \rho_\upsilon \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V \;\rightarrow\; F_b = m_\upsilon g$$



$F_{lower} - F_{upper} =$
$= A\,(p_2 - p_1) = A \cdot (p_o + \rho_\upsilon \cdot g \cdot h - p_o) = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V' \quad \Rightarrow F_b = m_L g$

$W = m \cdot g = \rho_{\sigma\tau} \cdot V \cdot g$
$W = F_b \;\Rightarrow\; \rho_{\sigma\tau} \cdot V \cdot g = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V' \;\rightarrow\; \rho_{\sigma\tau} / \rho_\upsilon = V' / V \;\rightarrow\; \rho_{\sigma\tau} < \rho_\upsilon$

Η Αρχή του Αρχιμήδη: ένα σώμα που επιπλέει ή είναι πλήρως βυθισμένο, δέχεται <u>δύναμη άνωσης</u> από το υγρό με κατεύθυνση προς τα πάνω και μέτρου ίσου με το <u>βάρος του υγρού που εκτοπίζει το σώμα</u>.

Σε σώμα που είναι πλήρως βυθισμένο ή επιπλέει:

<u>δύναμη άνωσης = βάρος σώματος</u>

Παράδειγμα

In Fig. 14-11, a block of density $\rho = 800\ \mathrm{kg/m^3}$ floats face down in a fluid of density $\rho_f = 1200\ \mathrm{kg/m^3}$. The block has height $H = 6.0$ cm.

(a) By what depth h is the block submerged?

Floating means that the buoyant force matches the gravitational force.

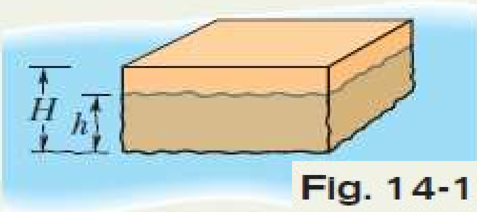


Fig. 14-11

$$F_b = m_f g = \rho_f V_f g = \rho_f LWhg.$$

$$F_g = mg = \rho V g = \rho_f LWHg.$$

$$\rho_f LWhg - \rho LWHg = 0,$$

$$\boxed{h = \frac{\rho}{\rho_f} H} = \frac{800\ \mathrm{kg/m^3}}{1200\ \mathrm{kg/m^3}}(6.0\ \mathrm{cm})$$

$$= 4.0\ \mathrm{cm}.$$

(b) If the block is held fully submerged and then released, what is the magnitude of its acceleration?

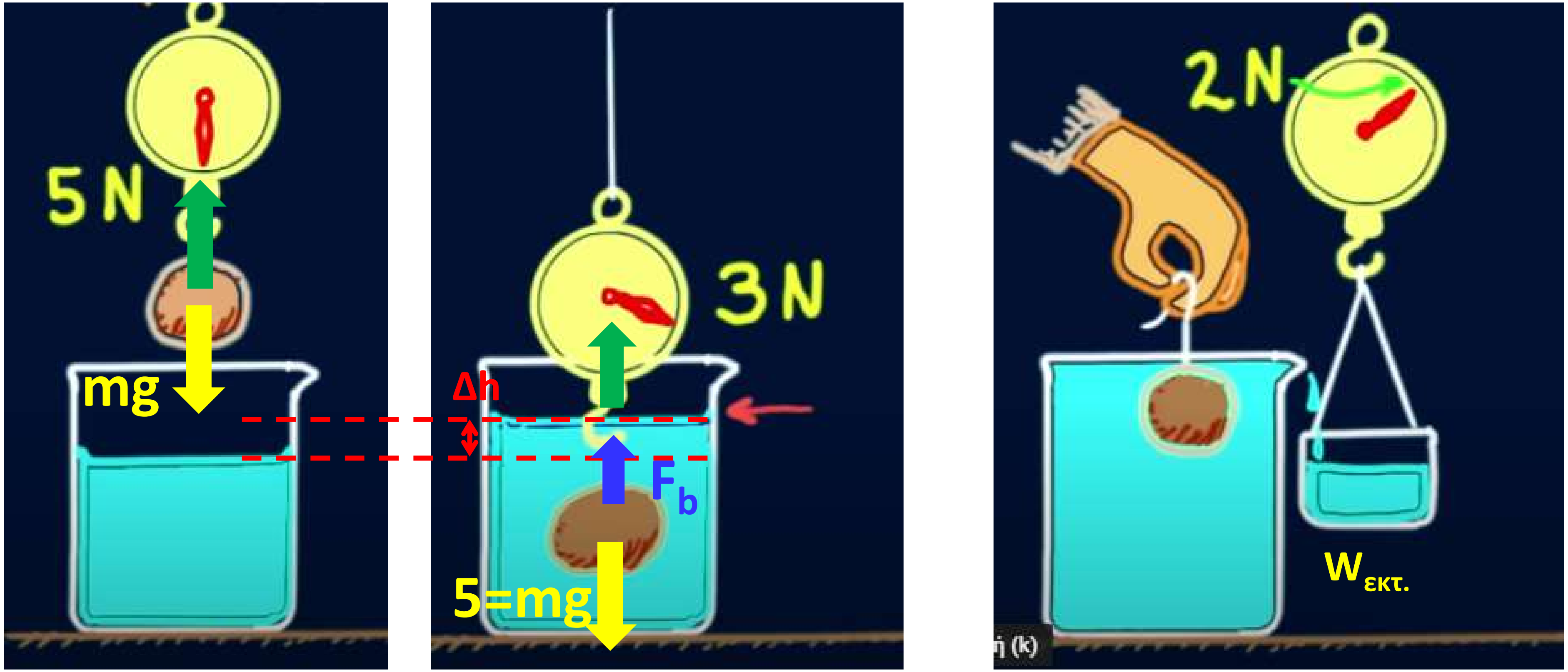
$$F_b - F_g = ma,$$

$$\rho_f LWHg - \rho LWHg = \rho LWHa$$

$$\boxed{a = \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1\right)g} = \left(\frac{1200\ \mathrm{kg/m^3}}{800\ \mathrm{kg/m^3}} - 1\right)(9.8\ \mathrm{m/s^2})$$

$$= 4.9\ \mathrm{m/s^2}. \qquad \text{(Answer)}$$

Προσδιορισμός άγνωστου όγκου σώματος



Ζύγισμα μέσα σε δοχείο: η ανύψωση του νερού Δh => όγκος του αντικειμένου

Δύναμη άνωσης F_b (b=buoyancy) = Βάρος στον αέρα – βάρος μέσα στο νερό =>

$F_b = \underline{\Delta W} = \rho g \underline{V}$ (=ρg $A_{δοχείου}$* h)

Η Δύναμη Άνωσης (= βάρος του εκτοπισμένου νερού) και άρα και ο όγκος του σώματος μπορούν να μετρηθούν με ζύγισμα του εκτοπισμένου υγρού (γνωστής πυκνότητας)

Η Δύναμη άνωσης

$F_b = W_{εκτ.} = m_L * g = \rho_{υγρού} * V * g \Rightarrow V = \underline{W_{εκτ}} / (\rho_{υγρού} * g)$

Η Αρχή του Αρχιμήδη: ένα σώμα που επιπλέει ή είναι πλήρως βυθισμένο, δέχεται δύναμη άνωσης ίση με το βάρος του εκτοπισμένου υγρού.

- Δοχείο ημιπλήρες. Με την βύθιση του σώματος αυξήθηκε η στάθμη κατά Δh

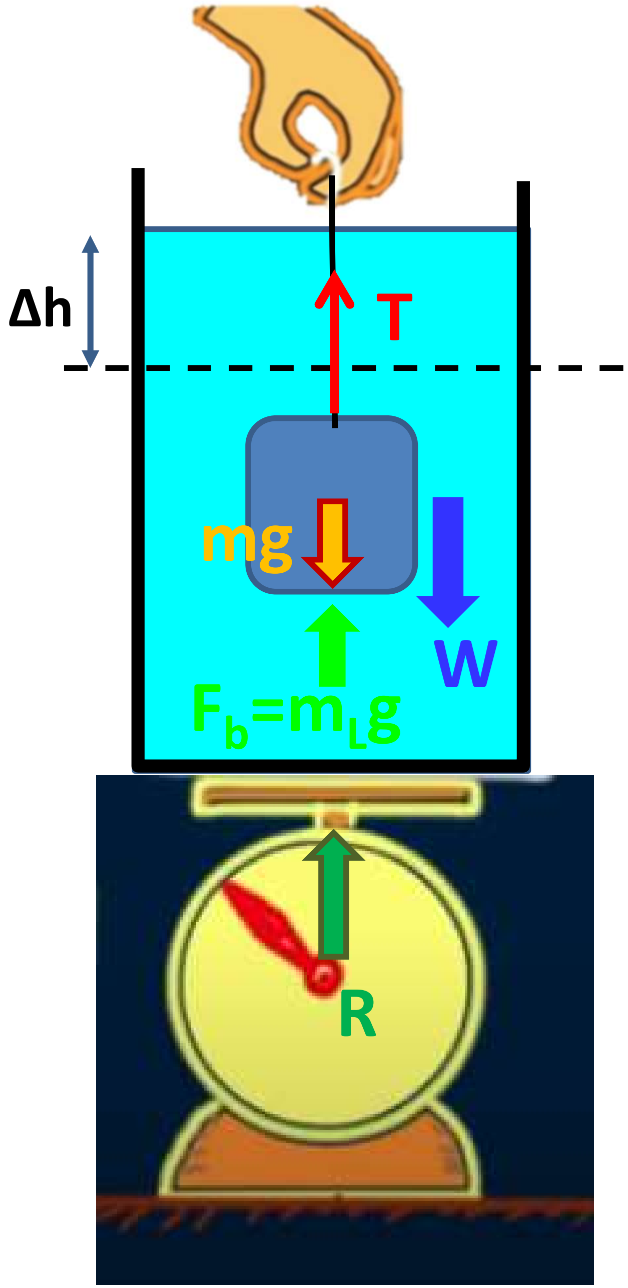
- **Βάρος σώματος στον αέρα = mg (δεδομένο)**
- **Βάρος υγρού = W**

στον αέρα: Το σκοινί => όλο το βάρος T = mg

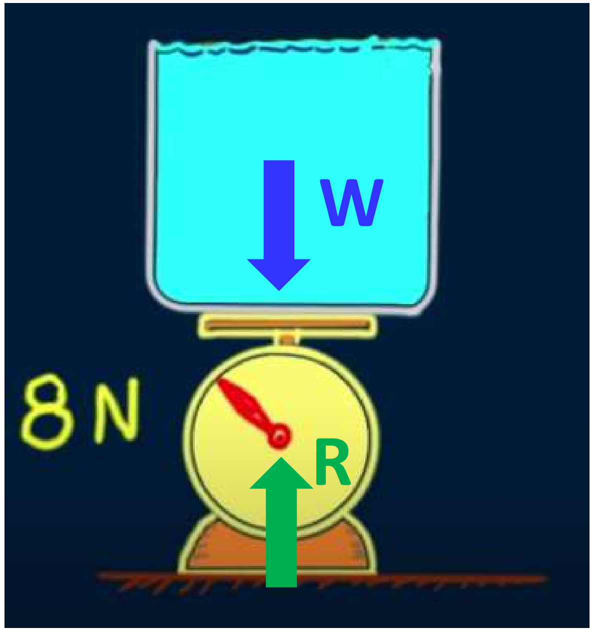
Βυθισμένο σώμα: Το σκοινί => $T = mg - F_b$

Η κάτω ζυγαριά: $R = W + F_b$

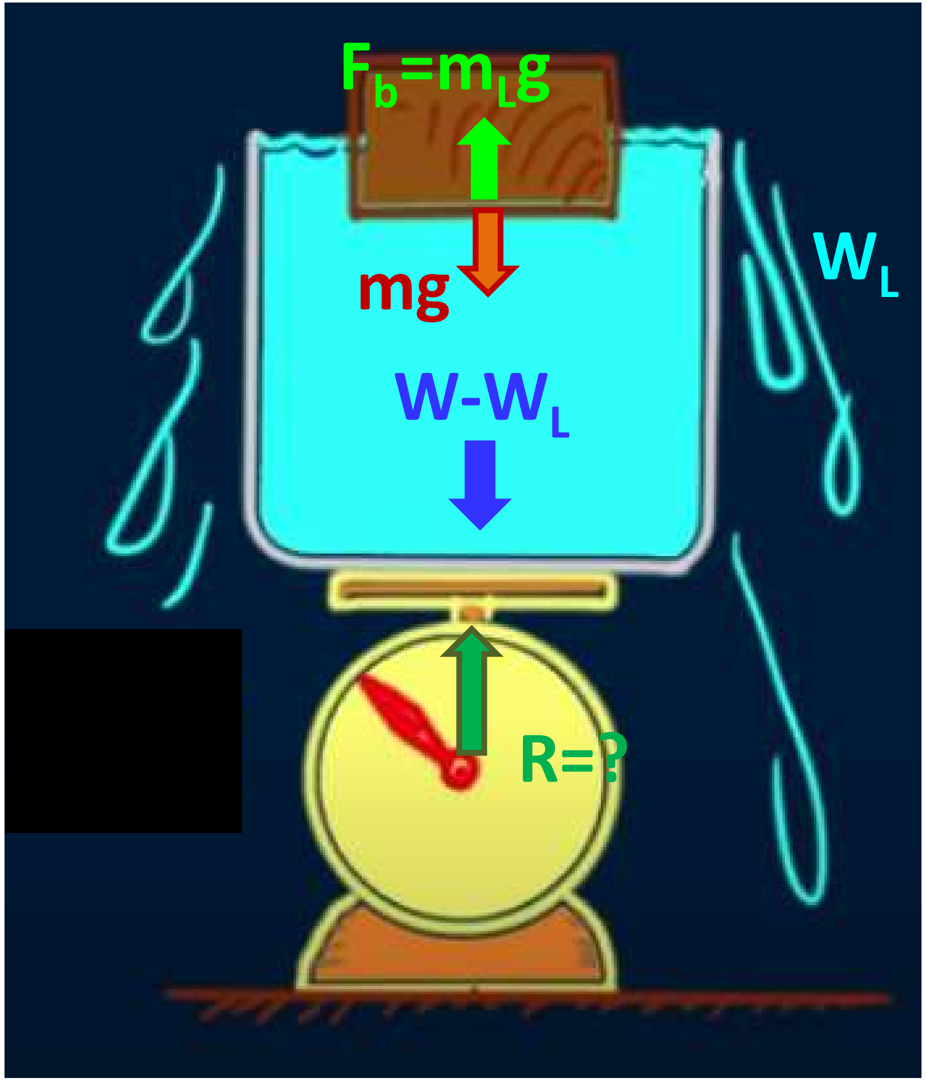
=> $F_b = R-W = \rho g V$ => $V=(R-W)/\rho g$



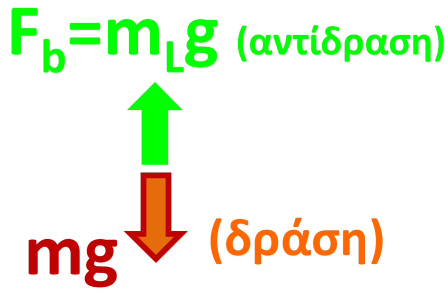
Χρησιμότητα: εύρεση όγκου υλικού, που πριν έχει ζυγιστεί, ώστε να προκύψει το φαινόμενο βάρος $\varepsilon_\varphi = \rho_\varphi g = (m/V_\varphi)*g$



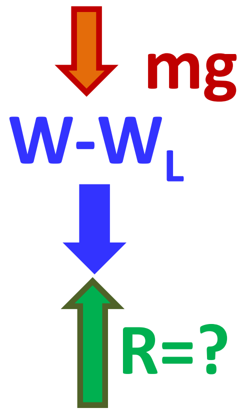
R=W



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος που επιπλέει



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος μπίκερ (η στήριξή του είναι η ζυγαριά):



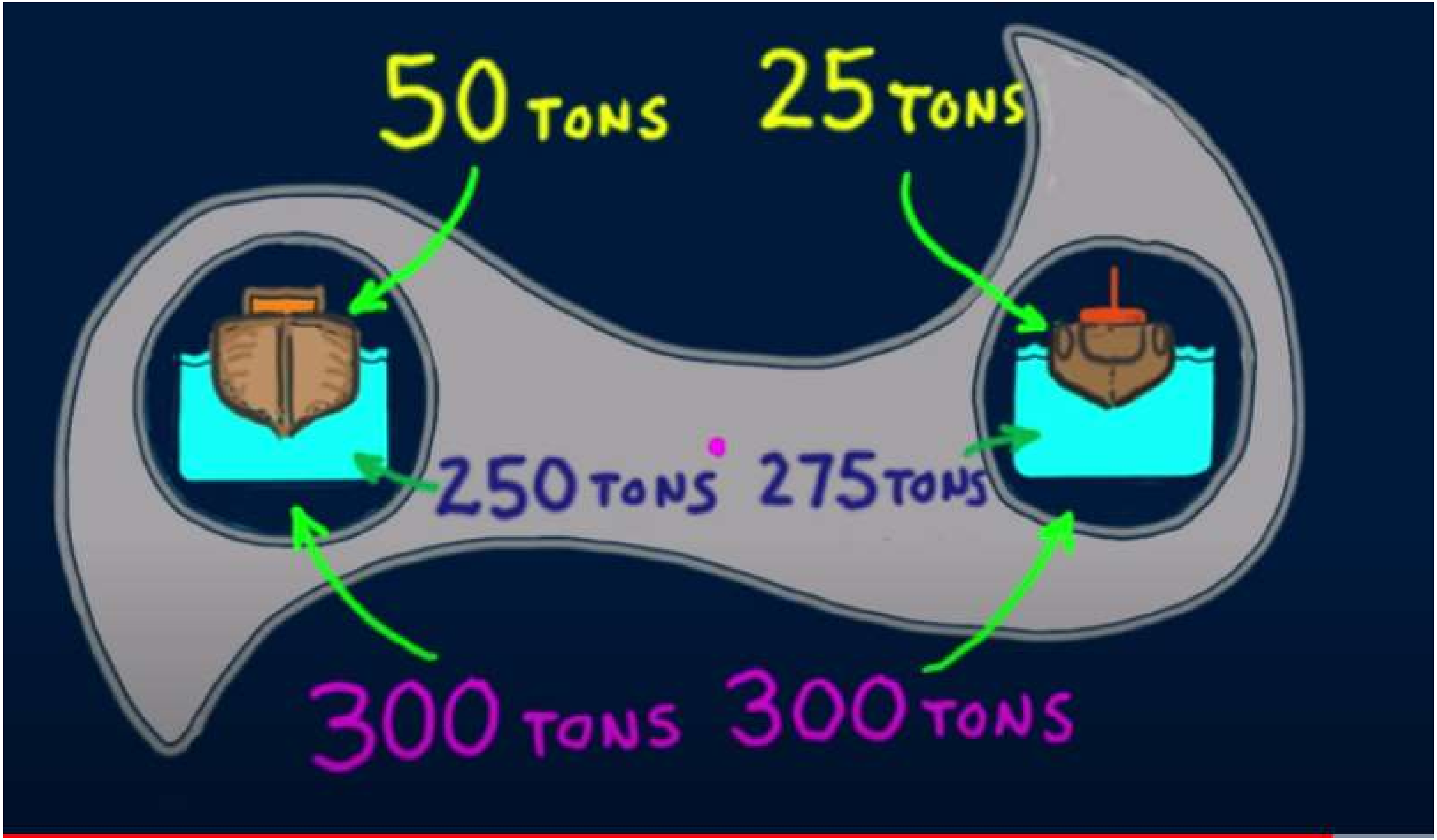
$R = (W-W_L) + mg$

Όμως από ισορροπία: $F_b=mg$

Και $F_b=W_L$

$R = (W-\cancel{W_L}) + \cancel{mg} \Rightarrow R = W$

Η Αρχή του Αρχιμήδη: ένα σώμα που επιπλέει ή είναι πλήρως βυθισμένο, δέχεται δύναμη άνωσης ίση με το βάρος του εκτοπισμένου υγρού.

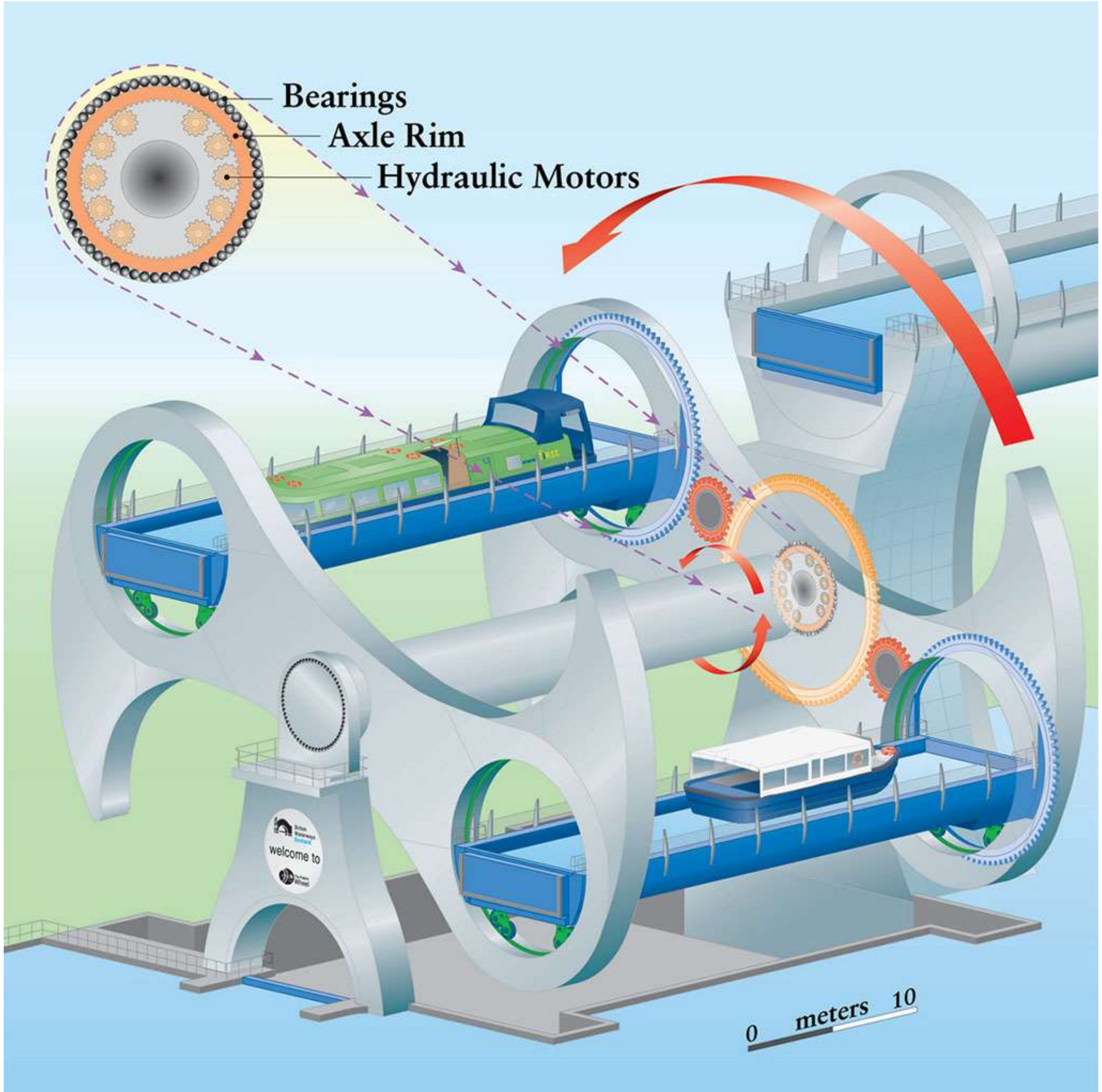


Case Study κυκλικής κίνησης: Η περίπτωση του Falkirk Wheel

https://www.scottishcanals.co.uk/falkirk-wheel/about-the-wheel/how-it-works/

Case Study κυκλικής κίνησης:
Η περίπτωση του Falkirk Wheel

https://www.youtube.com/watch?v=9y9Kn5qOc-E&feature=youtu.be



Το βάρος της γόνδολας με την φορτηγίδα αντισταθμίζεται από το βάρος του νερού στην άλλη γόνδολα. Ένα περίπλοκο σύστημα ανυψώνει ή χαμηλώνει τις γόνδολες. Κάθε γόνδολα, είτε με φορτηγίδες είτε απλά γεμάτη με νερό, ζυγίζει περίπου 300 τόνους. Μικρή απαίτηση για ενέργεια (balance & equilibrium)! Αρχή του Αρχιμήδη: ένα αντικείμενο (εδώ το σκάφος) μετατοπίζει τόσο νερό όσο το βάρος του, έτσι οι δύο γόνδολες είναι πάντα εξίσου ισορροπημένες.

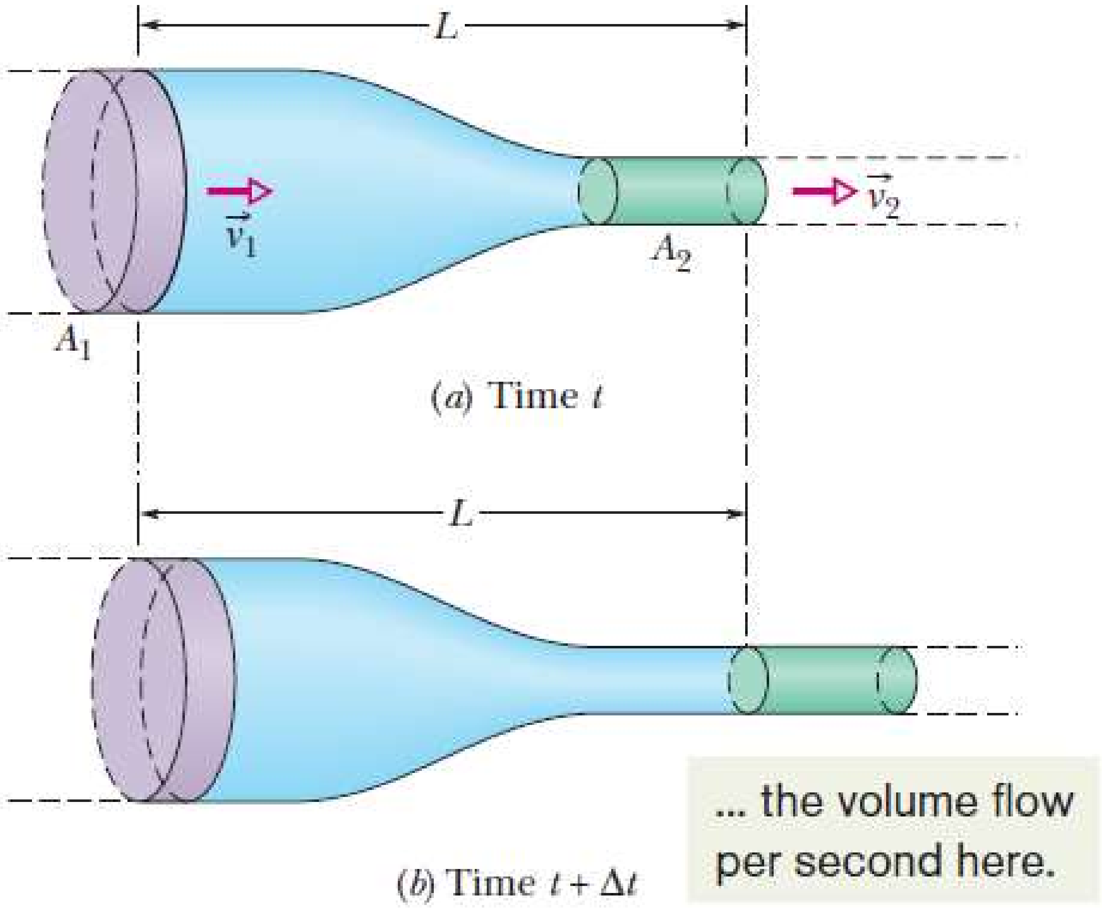
Υγρά και Κίνηση

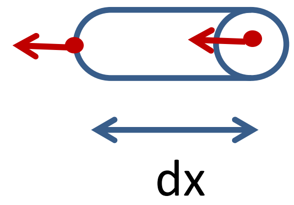
1. **σταθερή ή στρωτή ροή (Steady or laminar flow): η ταχύτητα του υγρού σε οποιοδήποτε σταθερό σημείο δεν αλλάζει με τον χρόνο**

2. **ασυμπίεστη ροή (Incompressible flow): όπως και για τα ρευστά σε ηρεμία, το ιδανικό ρευστό είναι ασυμπίεστο, δηλ. η πυκνότητά του είναι σταθερή**

3. **Ροή χωρίς ιξώδες (Nonviscous flow): Το ιξώδες είναι μέτρο της αντίστασης του ρευστού στην ροή (σε αντιστοιχία με την τριβή μεταξύ κινούμενων στερεών ➔ μετατροπή κινητικής ενέργειας σε θερμική ενέργεια). Όταν ένα σώμα κινείται σε ρευστό χωρίς ιξώδες δεν δέχεται οπισθέλκουσα δύναμη (καμιά αντίσταση) ➔ κίνηση με σταθερή ταχύτητα.**

Εξίσωση συνέχειας (Equation of Continuity)





Για σταθερή ροή:
Ταχύτητα: $v=dx/dt$
Όγκος: $V=A\cdot dx=A\cdot v\cdot dt$

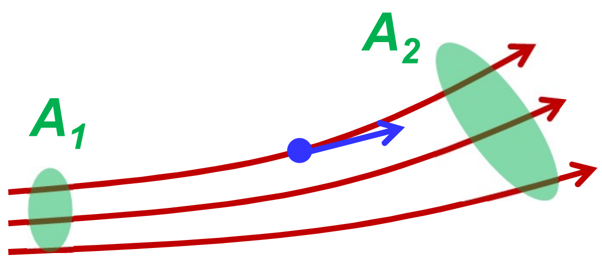
Ο ρυθμός με τον οποίο εισέρχεται το ρευστό είναι ίδιος με αυτόν που εξέρχεται από τον ιδανικό σωλήνα (όση όγκος μπαίνει, τόσος και βγαίνει)
Είσοδος: $V=A_1\cdot dx=A_1\cdot v_1\cdot dt$
Έξοδος: $V=A_2\cdot dx=A_2\cdot v_2\cdot dt$

$(V/dt=A\cdot v)$

$A_1\cdot v_1 = A_2\cdot v_2$: αυξάνεται η ταχύτητα όταν μειώνεται η διατομή

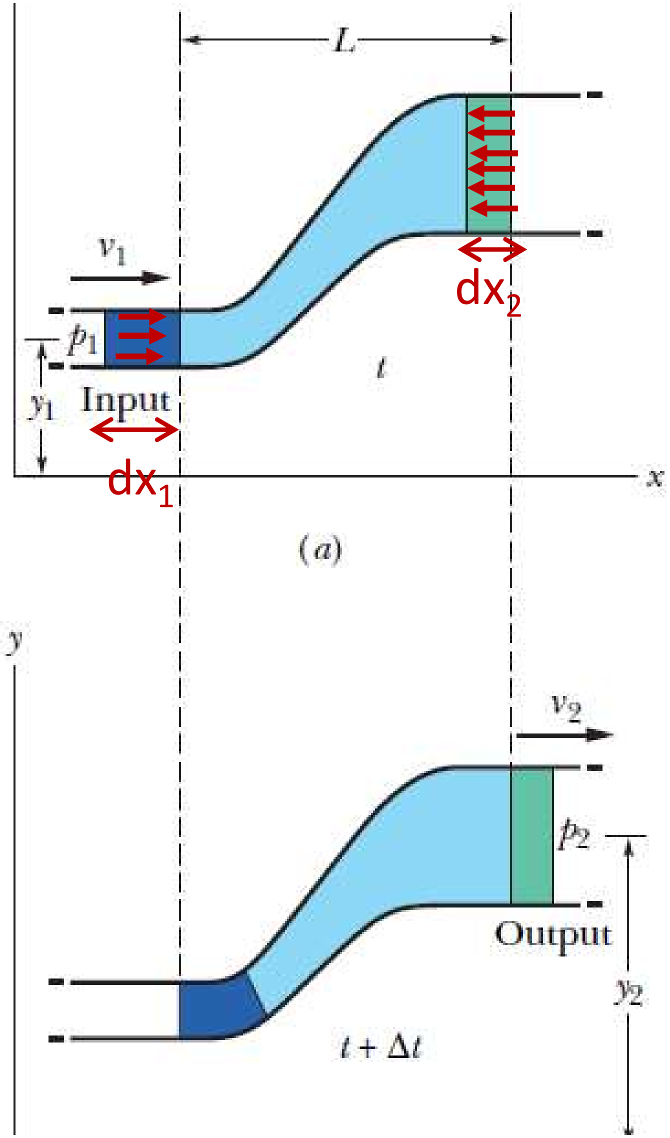
Ρυθμός ροής όγκου (παροχή):
$R_V=dV/dt=A\cdot v$ (σταθερά)

Ρυθμός ροής μάζας:
$R_m=dm/dt=\rho\cdot A\cdot v$ (σταθερά)



Ρευματικές γραμμές: η ταχύτητα εφάπτεται σε κάθε σημείο, η πύκνωση δηλώνει αύξηση μέτρου ταχύτητας

Εξίσωση Bernoulli (Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στα ρευστά)



Μεταβολή Κ.Ε. (ΔΚΕ) =έργο που εκτελείται (W)

Fluid flows at a steady rate through a length L of a tube, from the input end at the left to the output end at the right. From time t in (a) to time t+Dt in (b), the amount of fluid shown in purple enters the input end and the equal amount shown in green emerges from the output end.

Για το στοιχειώδες ρευστό που εισέρχεται (χωρίς ιξώδες):

$dx_1=v_1dt$

Δέχεται δύναμη $F_1=p_1A_1$ ➔ παράγει έργο $W_1=dx_1\cdot p_1A_1$

Το ρευστό κατά την έξοδό του δέχεται από τα δεξιά του δύναμη $F_2=p_2A_2$ ➔ παράγει έργο $W_2= - dx_2\cdot p_2A_2$

Έργο λόγω βαρύτητας κατά την ανύψωση:

$W_G = - dm\cdot g\cdot(y_2-y_1)$

$\Delta KE=W_1+W_2+W_G$

Όσος όγκος εισέρχεται, τόσος εξέρχεται (ασυμπ. ρευστό)

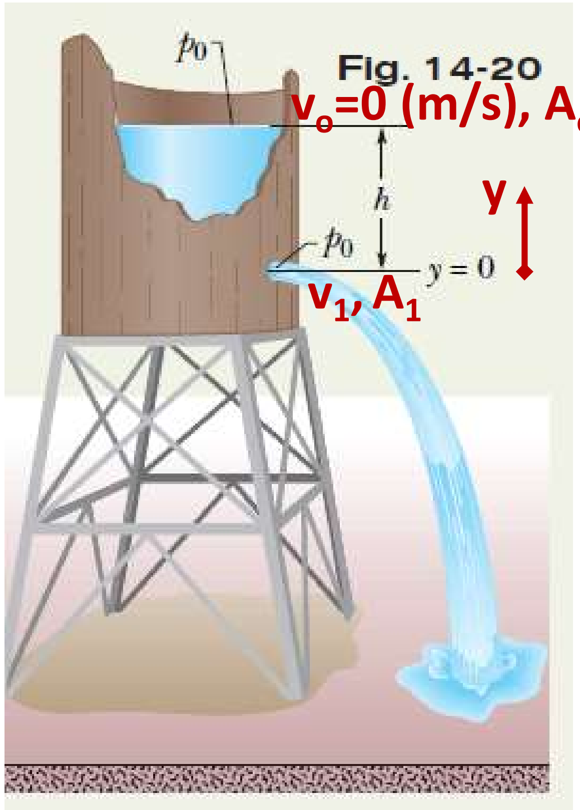
$$\frac{1}{2}dm\cdot v_2^2-\frac{1}{2}dm\cdot v_1^2=-dm\cdot g\cdot(y_2-y_1)+dx_1p_1A_1-dx_2p_2A_2$$

$dm=\rho dV$

$dV=dx_iA_i$

$$p_1+\tfrac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1=p_2+\tfrac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g y_2.$$

$$p+\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho g y=\text{a constant} \qquad \text{(Bernoulli's equation).}$$



Ο όγκος που έχει εξέλθει από την δεξαμενή:

$V = A_o(h-y) \;\; => \;\; \boldsymbol{dV = -A_o dy}$

Εξίσωση Bernoulli:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2.$$

$p_o + 0 + \rho g y = p_o + 1/2\rho {v_1}^2 + \rho g 0 \;\; => \;\; \boldsymbol{v_1 = \sqrt{2gy}}$

Αρχική στάθμη y=h: η ταχύτητα εξόδου είναι: $\boldsymbol{v_1 = \sqrt{2gh}}$

- Πώς αλλάξει η στάθμη y με τον χρόνο;

Εξίσωση συνέχειας:

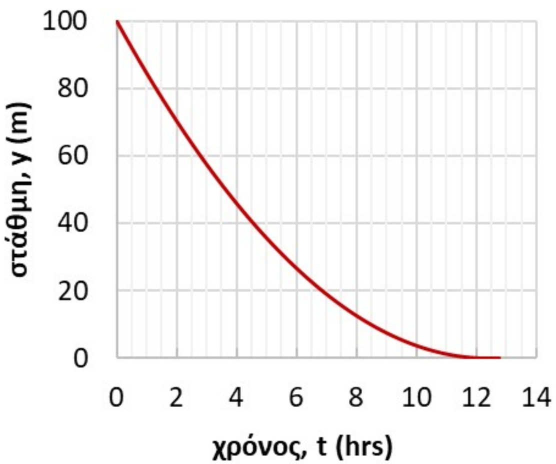
$$v \cdot A = \frac{dy}{dt} A = \frac{dV}{dt} = const.$$

$$\frac{dV}{dt} = -A_o \frac{dy}{dt} = A_1 v = A_1 \sqrt{2gy}$$

$$-A_o \frac{dy}{dt} = A_1 \sqrt{2g} \cdot \sqrt{y} \;\; => \;\; \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{A_1}{A_o}\sqrt{2g} \cdot dt$$

$$y^{-1/2} dy = -\frac{A_1}{A_o}\sqrt{2g} \cdot dt \;\; => 2\sqrt{y} - 2\sqrt{h} = -\frac{A_1}{A_o}\sqrt{2g}\, \mathrm{t}$$

$$\Longrightarrow y = \left(\sqrt{h} - \frac{A_1}{A_o}\sqrt{\frac{g}{2}}\, \mathrm{t}\right)^2$$



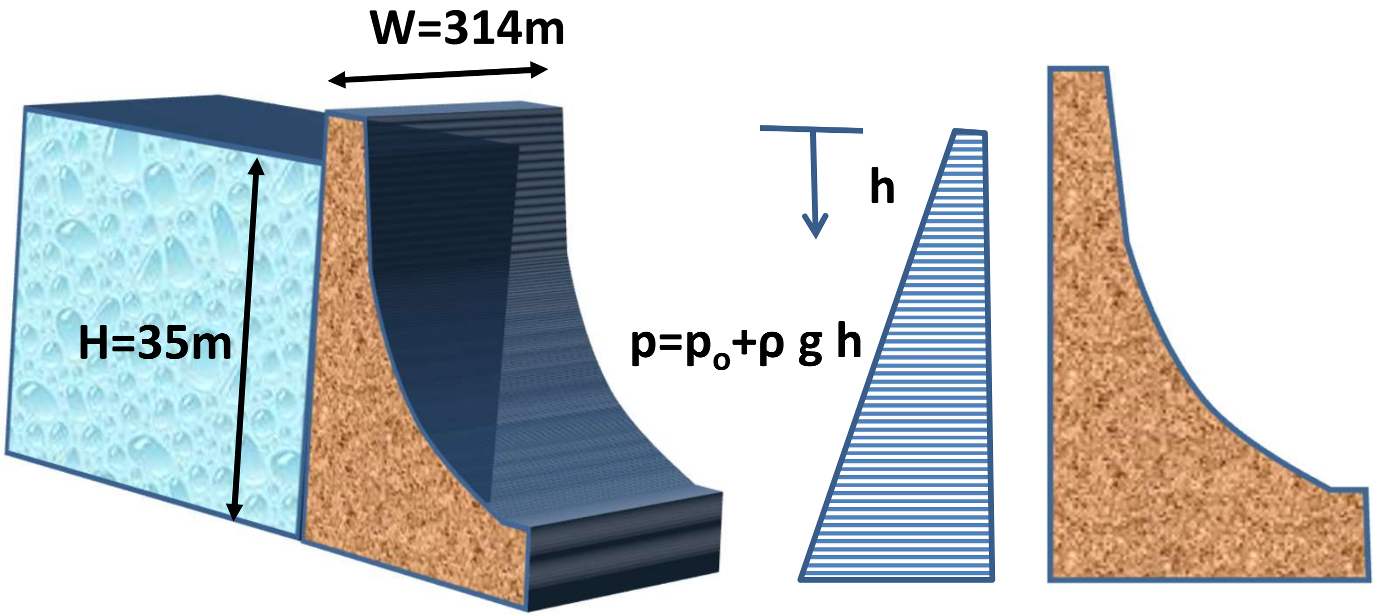
Παράδειγμα:

Για κυλινδρική δεξαμενή με R_o=10m και οπή με r_1=0.1m =>

A_1/A_o=0.0001 & h=100m

Για y=0 => t=12.4hrs

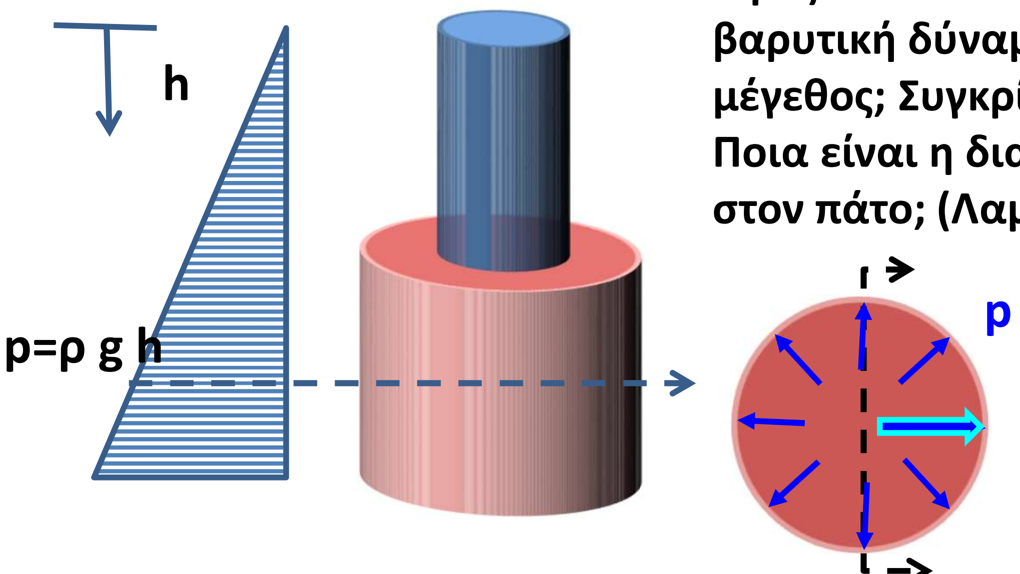
Ασκήσεις για το σπίτι: σχετικώς με την υδροστατική πίεση



Στο δίπλα σχήμα, το νερό βρίσκεται σε βάθος H=35m πίσω από ένα φράγμα πλάτους W=314m. Βρείτε την συνολική δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) λόγω υδροστατικής πίεσης που δέχεται το φράγμα, ποιο το σημείο εφαρμογής της και τι ροπή δημιουργεί στην βάση του φράγματος.

Εξηγείστε γιατί πλαταίνουμε την διατομή του φράγματος προς την θεμελίωση.

Στο δίπλα σχήμα (δεξαμενή νερού, γεμάτη), ο λεπτός σωλήνας έχει διατομή A και ύψος L, ενώ ο φαρδύς σωλήνας διάμετρο D και ύψος H. Ποια είναι η υδροστατική δύναμη στον πάτο; Ποια είναι η βαρυτική δύναμη του νερού; Τι σχέση έχουν αυτές ως προς το μέγεθος; Συγκρίνετε προσεχτικά τους όρους και αποφανθείτε. Ποια είναι η διακύμανση της πλευρικής δύναμης στην σύνδεση και στον πάτο; (Λαμβάνουμε εδώ την μισή πλευρική επιφάνεια)



Θυμηθείτε ότι οι υδροστατικές πιέσεις ασκούνται κάθετα σε επιφάνειες, δείτε την επόμενη βοηθητική διαφάνεια… =>

Example: Water Stream

Figure 14-18 shows how the stream of water emerging from a faucet "necks down" as it falls. This change in the horizontal cross-sectional area is characteristic of any laminar (non-turbulant) falling stream because the gravitational force increases the speed of the stream. Here the indicated cross-sectional areas are $A_0 = 1.2\ \text{cm}^2$ and $A = 0.35\ \text{cm}^2$. The two levels are separated by a vertical distance $h = 45$ mm. What is the volume flow rate from the tap?

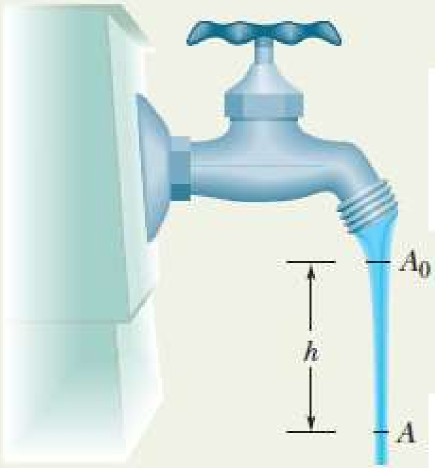


Fig. 14-18 As water falls from a tap, its speed increases. Because the volume flow rate must be the same at all horizontal cross sections of the stream, the stream must "neck down" (narrow).

KEY IDEA

The volume flow rate through the higher cross section must be the same as that through the lower cross section.

Calculations: From Eq. 14-24, we have

$$A_0 v_0 = Av, \tag{14-26}$$

where v_0 and v are the water speeds at the levels corresponding to A_0 and A. From Eq. 2-16 we can also write, because the water is falling freely with acceleration g,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \tag{14-27}$$

Eliminating v between Eqs. 14-26 and 14-27 and solving for v_0, we obtain

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.045\ \text{m})(0.35\ \text{cm}^2)^2}{(1.2\ \text{cm}^2)^2 - (0.35\ \text{cm}^2)^2}} \\ &= 0.286\ \text{m/s} = 28.6\ \text{cm/s}. \end{aligned}$$

From Eq. 14-24, the volume flow rate R_V is then

$$\begin{aligned} R_V &= A_0 v_0 = (1.2\ \text{cm}^2)(28.6\ \text{cm/s}) \\ &= 34\ \text{cm}^3/\text{s}. \end{aligned} \qquad \text{(Answer)}$$

Example: Bernoulli's Principle

Ethanol of density $\rho = 791 \text{ kg/m}^3$ flows smoothly through a horizontal pipe that tapers (as in Fig. 14-15) in cross-sectional area from $A_1 = 1.20 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ to $A_2 = A_1/2$. The pressure difference between the wide and narrow sections of pipe is 4120 Pa. What is the volume flow rate R_V of the ethanol?

KEY IDEAS

(1) Because the fluid flowing through the wide section of pipe must entirely pass through the narrow section, the volume flow rate R_V must be the same in the two sections. Thus, from Eq. 14-24,

$$R_V = v_1 A_1 = v_2 A_2. \tag{14-35}$$

However, with two unknown speeds, we cannot evaluate this equation for R_V. (2) Because the flow is smooth, we can apply Bernoulli's equation. From Eq. 14-28, we can write

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y, \tag{14-36}$$

where subscripts 1 and 2 refer to the wide and narrow sections of pipe, respectively, and y is their common elevation. This equation hardly seems to help because it does not contain the desired R_V and it contains the unknown speeds v_1 and v_2.

Calculations: There is a neat way to make Eq. 14-36 work for us: First, we can use Eq. 14-35 and the fact that $A_2 = A_1/2$ to write

$$v_1 = \frac{R_V}{A_1} \quad \text{and} \quad v_2 = \frac{R_V}{A_2} = \frac{2R_V}{A_1}. \tag{14-37}$$

Then we can substitute these expressions into Eq. 14-36 to eliminate the unknown speeds and introduce the desired volume flow rate. Doing this and solving for R_V yield

$$R_V = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}}. \tag{14-38}$$

We still have a decision to make: We know that the pressure difference between the two sections is 4120 Pa, but does that mean that $p_1 - p_2$ is 4120 Pa or -4120 Pa? We could guess the former is true, or otherwise the square root in Eq. 14-38 would give us an imaginary number. Instead of guessing, however, let's try some reasoning. From Eq. 14-35 we see that speed v_2 in the narrow section (small A_2) must be greater than speed v_1 in the wider section (larger A_1). Recall that if the speed of a fluid increases as the fluid travels along a horizontal path (as here), the pressure of the fluid must decrease. Thus, p_1 is greater than p_2, and $p_1 - p_2 = 4120$ Pa. Inserting this and known data into Eq. 14-38 gives

$$R_V = 1.20 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \sqrt{\frac{(2)(4120 \text{ Pa})}{(3)(791 \text{ kg/m}^3)}}$$

$$= 2.24 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}. \qquad \text{(Answer)}$$