

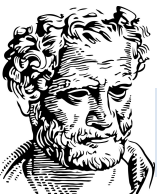
## ➤ Κινηματική (ταχύτητα, επιτάχυνση) σε μία ή περισσότερες διαστάσεις

**Ο Κόσμος και τα πάντα μέσα σε αυτόν κινούνται...**

Η κίνηση προκαλείται από δυνάμεις (ωθήσεις & έλξεις)...

Εξετάζουμε προς το παρόν την κίνηση καθαυτή: ένα αντικείμενο επιταχύνει, επιβραδύνει, σταματά ή αλλάζει κατεύθυνση...

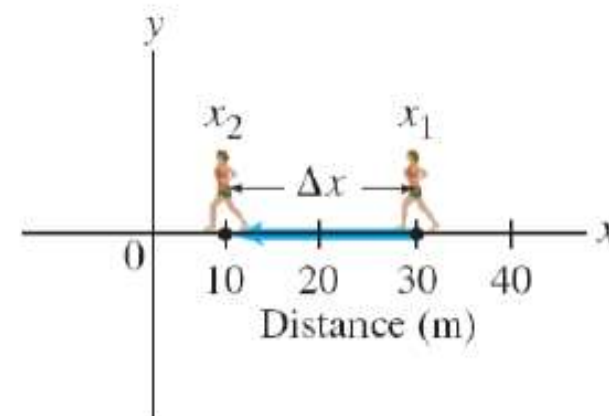
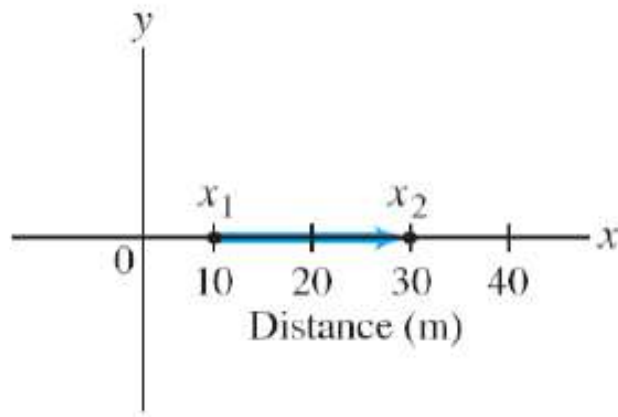
- Συστήματα Αναφοράς και μετατόπιση
- Μέση Ταχύτητα
- Στιγμιαία Ταχύτητα
- Επιτάχυνση
- Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση
- Προβλήματα



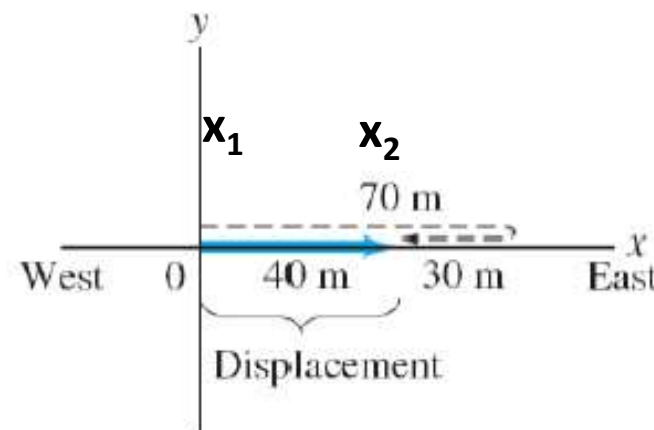
# Μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου ή άκαμπτου σώματος – Ορισμοί/Θεωρήσεις:

Πραγματοποιείται κατά μήκος ευθείας γραμμής (π.χ. κατά άξονα  $x$ )

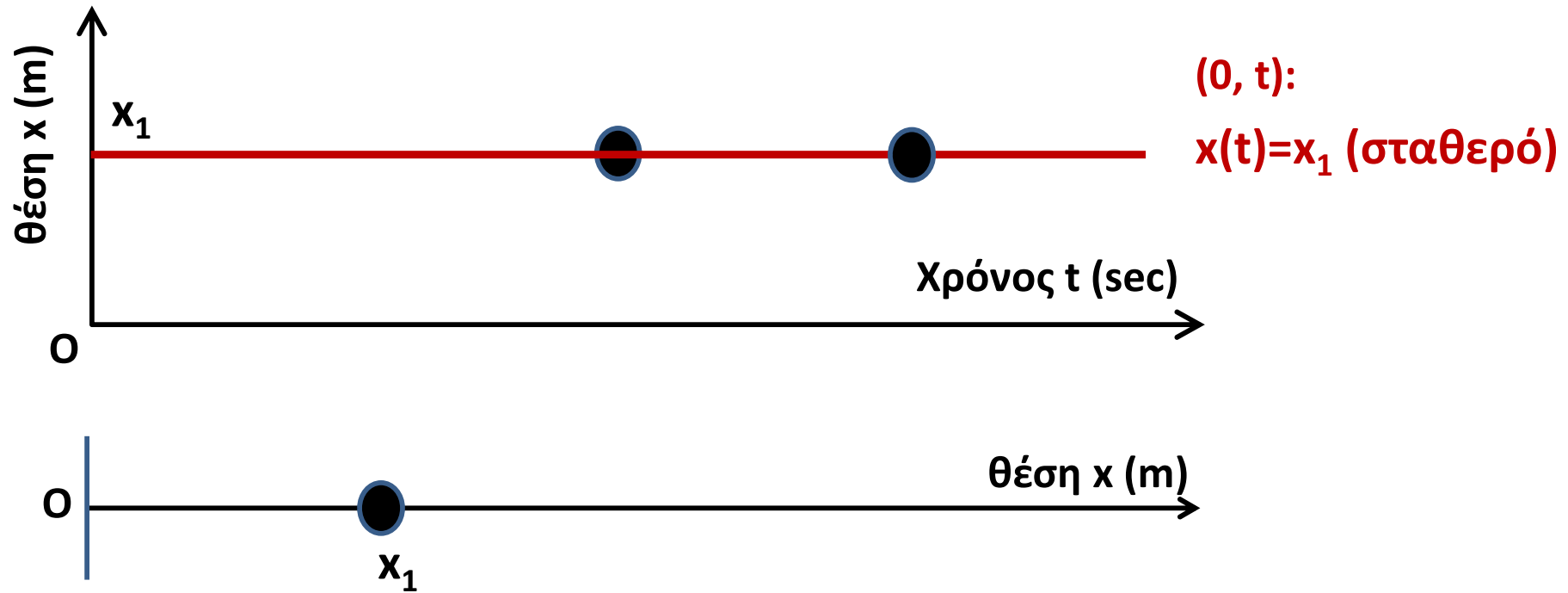
Η μετατόπιση ορίζεται ως :  $\Delta x = x_2 - x_1$ .



Απόσταση (διακεκομμένη γραμμή) είναι το «μήκος» της τροχιάς που ακολουθήθηκε για να φτάσει στο τελικό σημείο



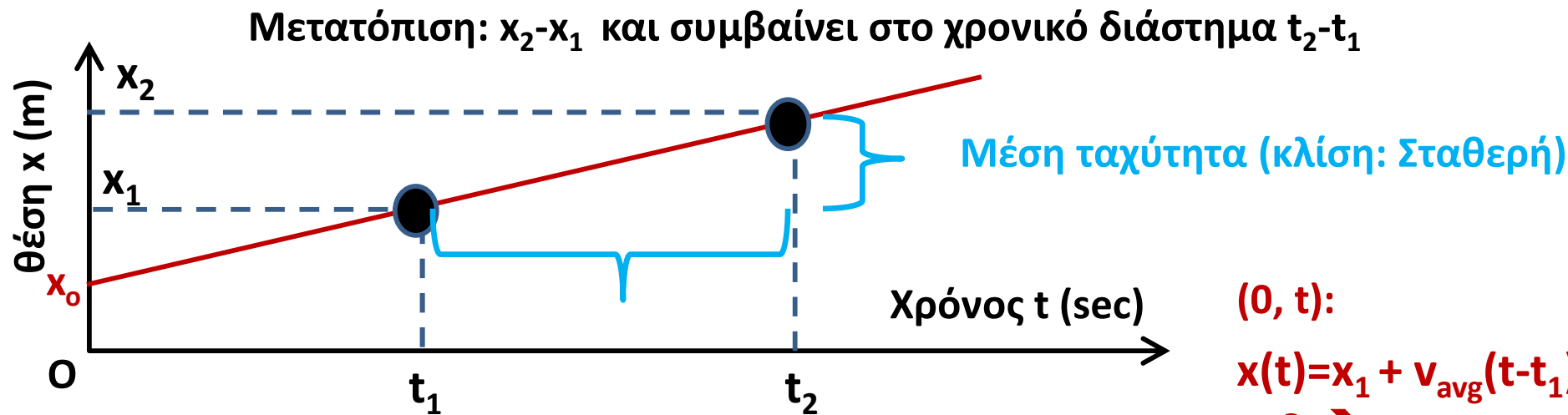
Η περιγραφή της θέσης  $x$  ενός σωματιδίου  
ορίζεται συναρτήσει του χρόνου  $t$ :  $x(t)$



Μετατόπιση: 0

Όταν δεν αλλάζει η θέση με τον χρόνο  $\rightarrow$  ηρεμία – ακίνητο σώμα

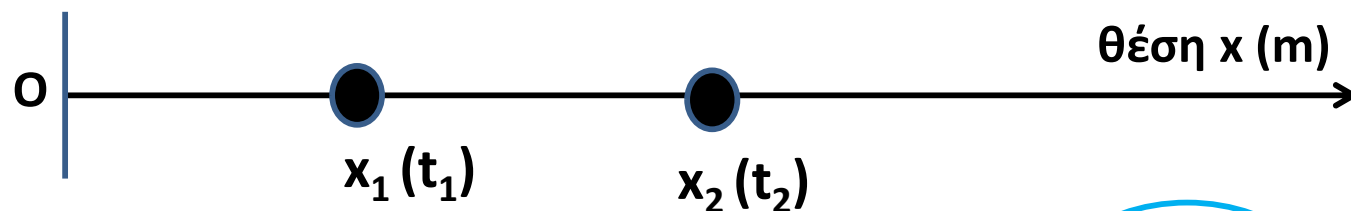
# Η περιγραφή της θέσης $x$ ενός σωματιδίου ορίζεται συναρτήσει του χρόνου $t$ : $x(t)$



$(0, t)$ :

$$x(t) = x_1 + v_{avg}(t - t_1)$$

$$t = 0 \Rightarrow x_0 = x_1 - v_{avg}t_1$$

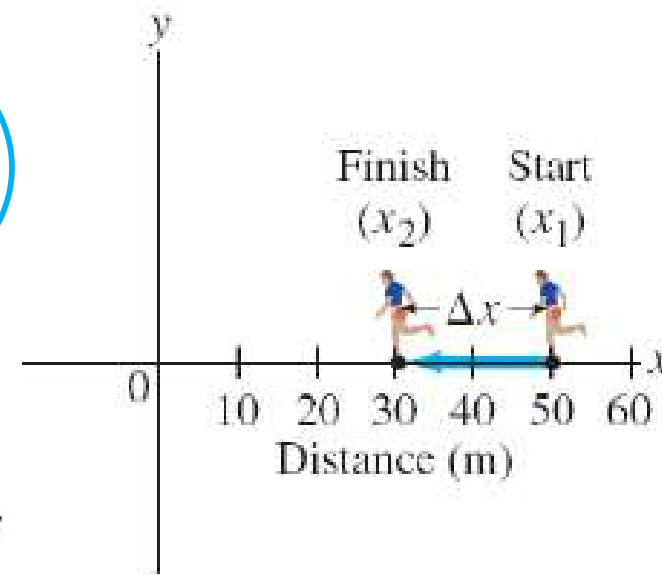


Μέση ταχύτητα (διάνυσμα):  $v_{avg} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

Αν  $x_2 > x_1 \Rightarrow$  θετική ταχύτητα

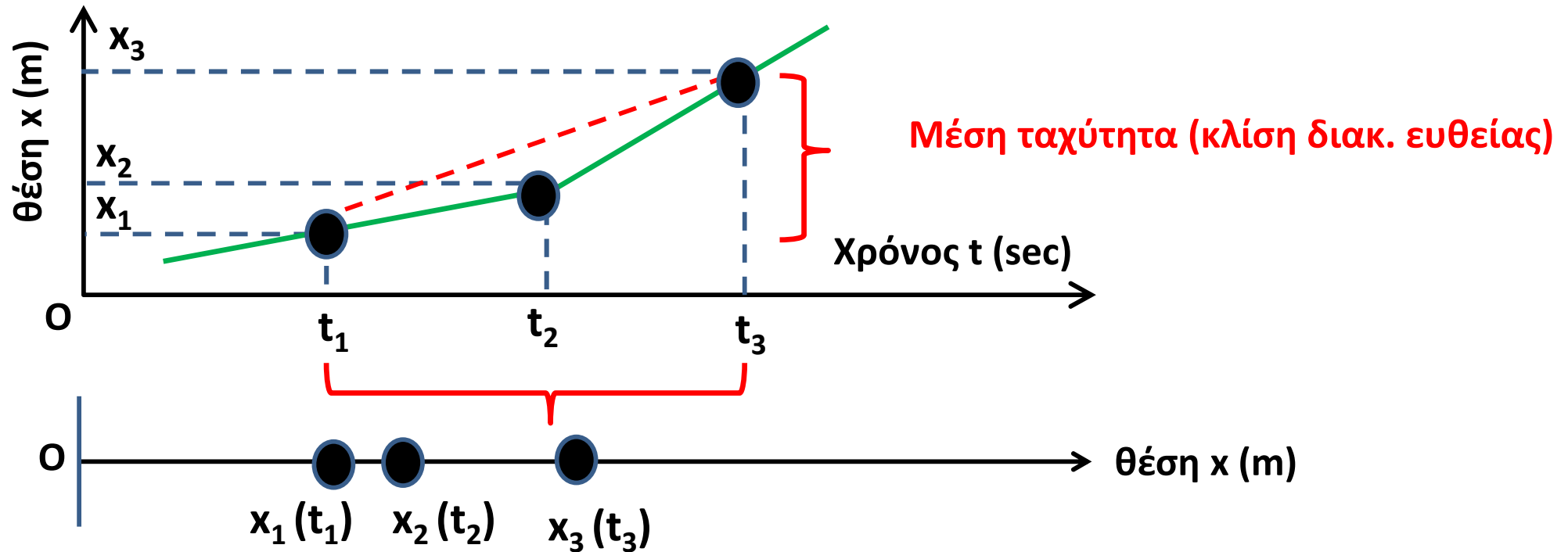
Αν  $x_2 < x_1 \Rightarrow$  αρνητική ταχύτητα

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} \\ &= \frac{30,0 - 50,0 \text{ m}}{3,0 \text{ s}} = -6,7 \text{ m/s} \end{aligned}$$



# Η περιγραφή της θέσης $x$ ενός σωματιδίου ορίζεται συναρτήσει του χρόνου $t$ : $x(t)$

Μετατόπιση:  $x_3 - x_1$  και συμβαίνει στο χρονικό διάστημα  $t_3 - t_1$

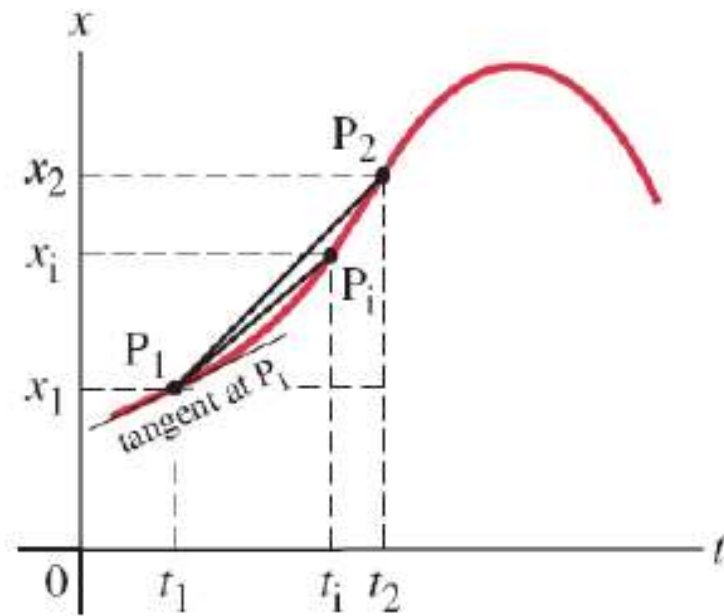
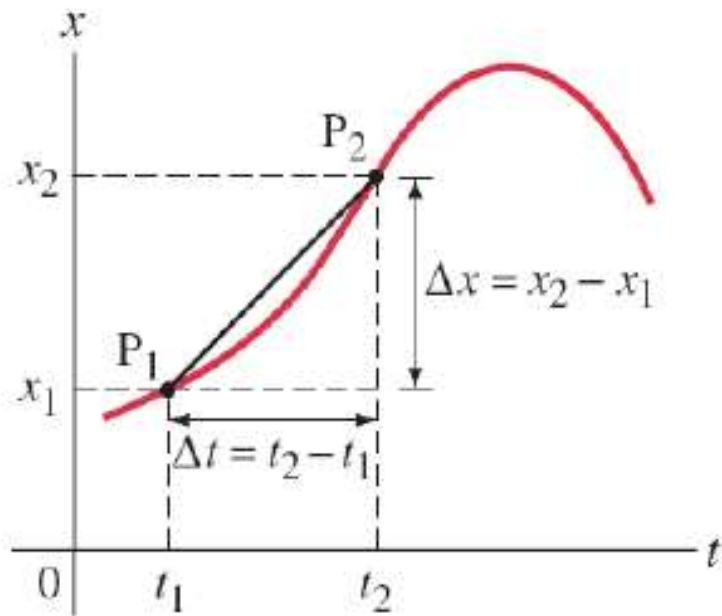


Μέση Ταχύτητα (διάνυσμα):  $\mathbf{v}_{avg} = \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1}$

Στιγμαία Ταχύτητα (διάνυσμα):  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

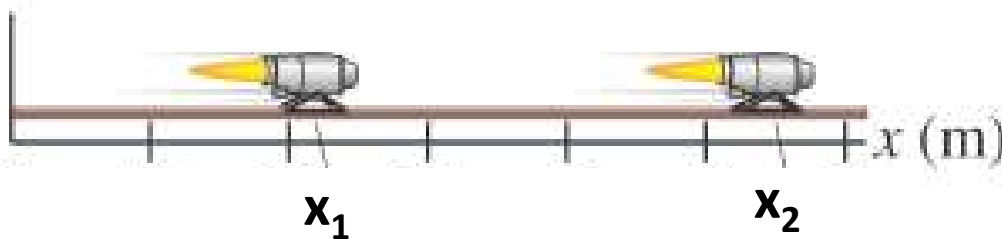
Στιγμιαία Ταχύτητα (διάνυσμα):  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ .

Σε μια γραφική παράσταση της θέσης σαν συνάρτηση του χρόνου, η Σ.Τ. είναι η εφαπτομένη της καμπύλης.



## Παράδειγμα:

Μία μηχανή τύπου jet κινείται πάνω σε πειραματικές ράγες (άξονας  $x$ ). Θα υποθέσουμε ότι η μηχανή είναι σημείο. Η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου δίδεται από την εξίσωση  $x = At^2 + B$ , όπου  $A = 2,10 \text{ m/s}^2$  και  $B = 2,80 \text{ m}$ .



Σε κάθε χρονική στιγμή αναζητείται η θέση:

$$x_1 = At_1^2 + B = 2,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} [3,00\text{s}]^2 + 2,8\text{m} = 21,7\text{m}$$

$$x_2 = At_2^2 + B = 2,10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} [5,00\text{s}]^2 + 2,8\text{m} = 55,3\text{m}$$

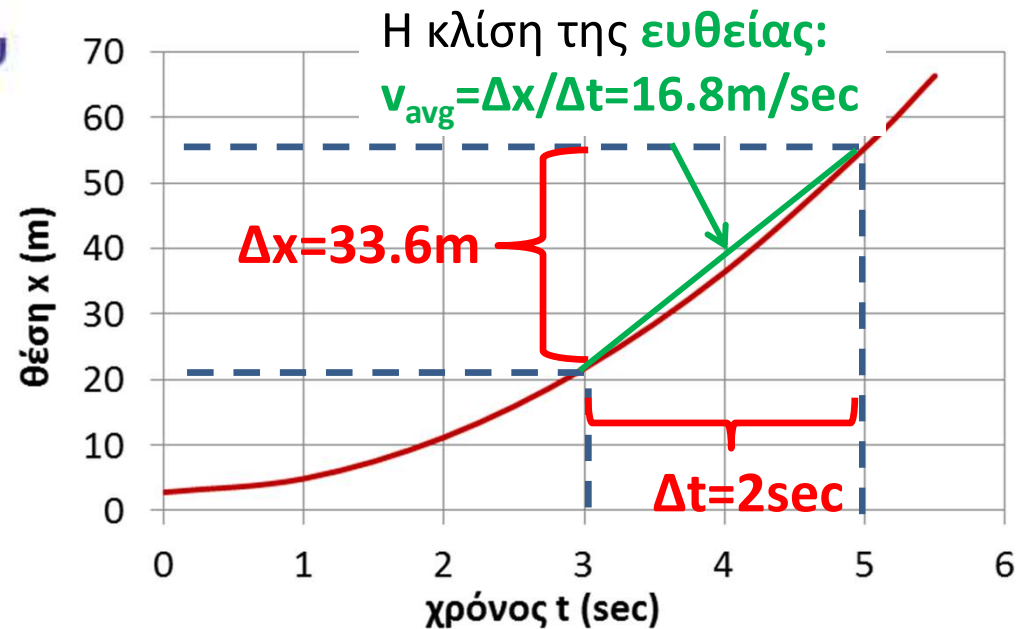
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 55,3\text{m} - 21,7\text{m} = 33,6\text{m}$$

$$\text{ή } \Delta x = x_2(t_2) - x_1(t_1) = A t_2^2 + B - (A t_1^2 + B) = A(t_2^2 - t_1^2)$$

Η μετατόπιση δεν δίνει την πληροφορία της αρχικής θέσης...

Προσδιορίστε τη μετατόπιση της μηχανής για το χρονικό διάστημα μεταξύ  $t_1 = 3,00 \text{ s}$  και  $t_2 = 5,00 \text{ s}$ .

Και την Μέση Ταχύτητα



Ποια η Στιγμιαία Ταχύτητα στις  $x_1$  &  $x_2$

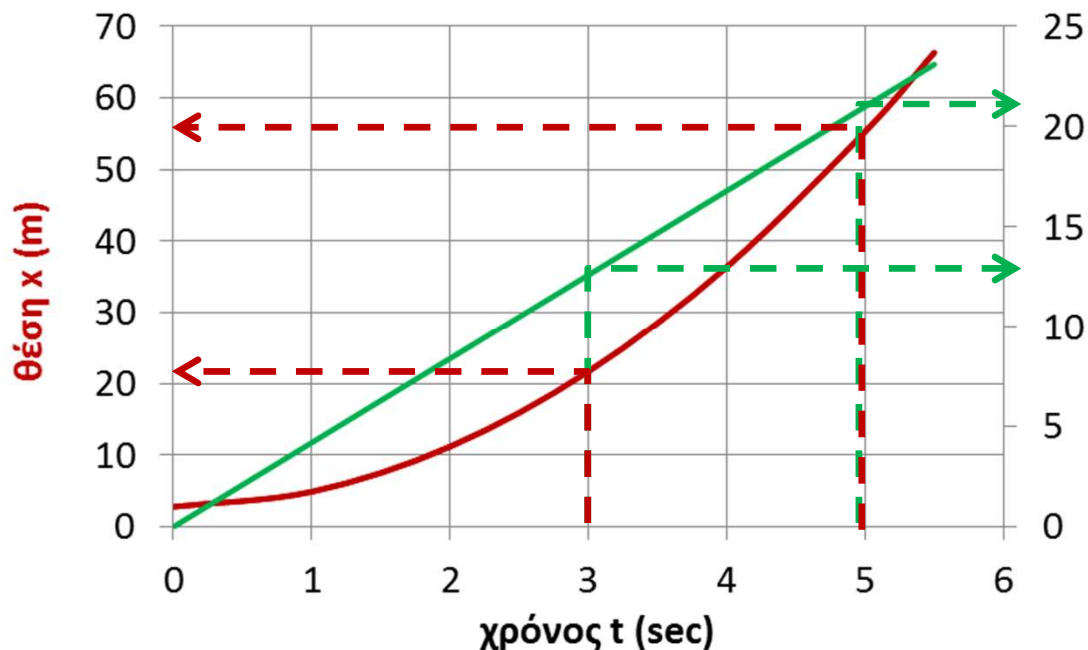
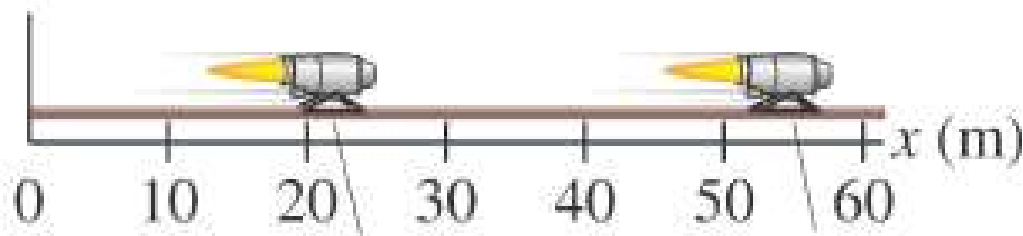
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (At^2 + B) = 2At$$

$$v_1 = 2 \cdot 2,1 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} = 12.6 \text{ m/sec}$$

$$v_2 = 2 \cdot 2,1 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 21 \text{ m/sec}$$

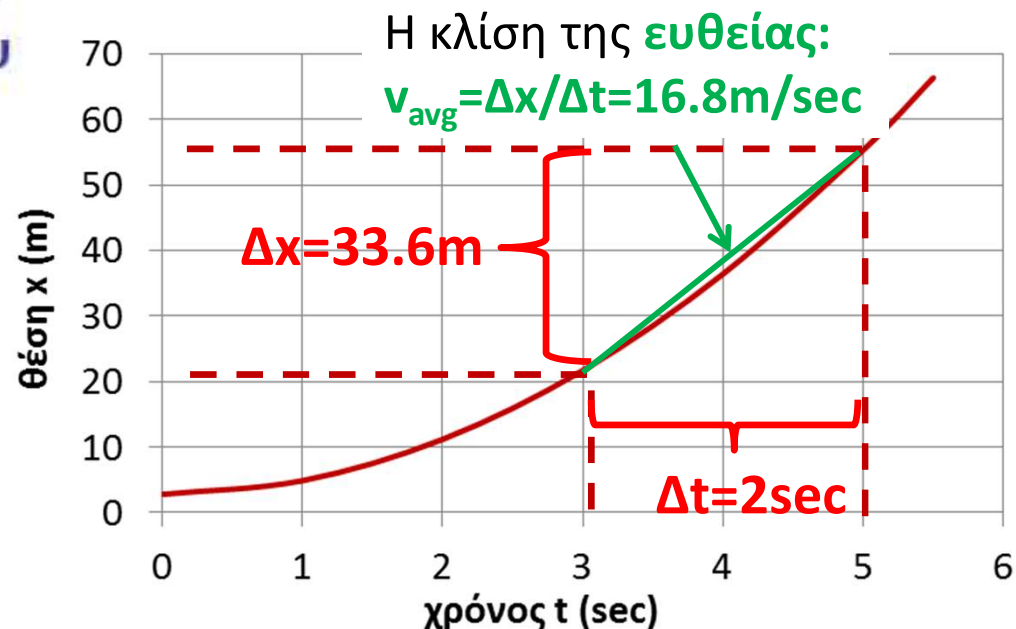
## Παράδειγμα:

Μία μηχανή τύπου jet κινείται πάνω σε πειραματικές ράγες (άξονας x). Θα υποθέσουμε ότι η μηχανή είναι σημείο. Η θέση του σαν συνάρτηση του χρόνου δίδεται από την εξίσωση  $x = At^2 + B$ , όπου  $A = 2,10 \text{ m/s}^2$  και  $B = 2,80 \text{ m}$ .



Προσδιορίστε τη μετατόπιση της μηχανής για το χρονικό διάστημα μεταξύ  $t_1 = 3,00 \text{ s}$  και  $t_2 = 5,00 \text{ s}$ .

Και την Μέση Ταχύτητα



Ποια η Στιγμαία Ταχύτητα στις  $x_1$  &  $x_2$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + B) = 2At$$

$$v_1 = 2 \cdot 2,1 \text{ m/s}^2 \cdot 3 \text{ s} = 12,6 \text{ m/sec}$$

$$v_2 = 2 \cdot 2,1 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 21 \text{ m/sec}$$



Εάν γνωρίζουμε την συνάρτηση θέσης το πρόβλημα είναι απολύτως ορισμένο.

$$x(t) = At^2 + B$$



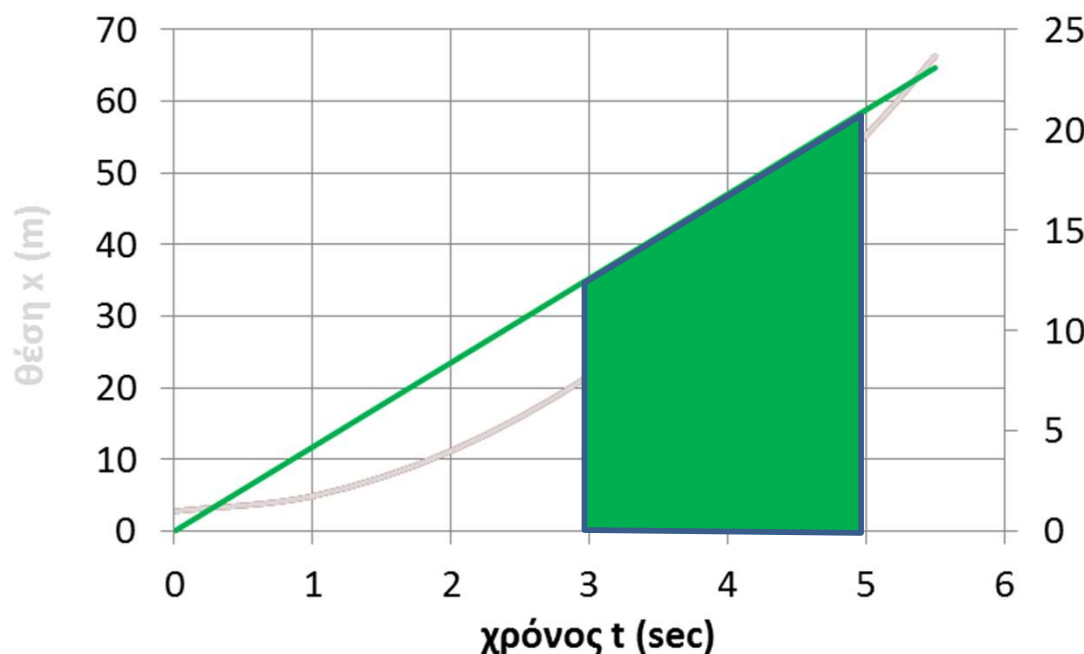
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + B) = 2At$$

Εάν γνωρίζουμε μόνο την συνάρτηση της στιγμιαίας ταχύτητας  $v(t) = 2At$   
(δείχνει πως μεταβάλλεται η θέση με τον χρόνο)

τότε με βάση τον ολοκληρωτικό λογισμό μπορούμε μόνο να ορίσουμε την μετατόπιση και όχι την ακριβή θέση.

Πρόβλημα αρχικής τιμής

$$\underline{dx(t) = v(t)dt} \Rightarrow x(t) = \int 2At dt + x_0 = At^2 + x_0$$



$$x(t_2) - x(t_1) = A(t_2^2 - t_1^2) = 33.6\text{m}$$

Η Εμβαδόν που περιβάλλεται από την κατανομή της ταχύτητας και τον άξονα του χρόνου:

$$0,5 \cdot (12,6 + 21)\text{m/sec} \cdot (5-3)\text{sec} = 33.6\text{m}$$

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

# Όταν η ταχύτητα ενός σώματος μεταβάλλεται στον χρόνο → Επιτάχυνση

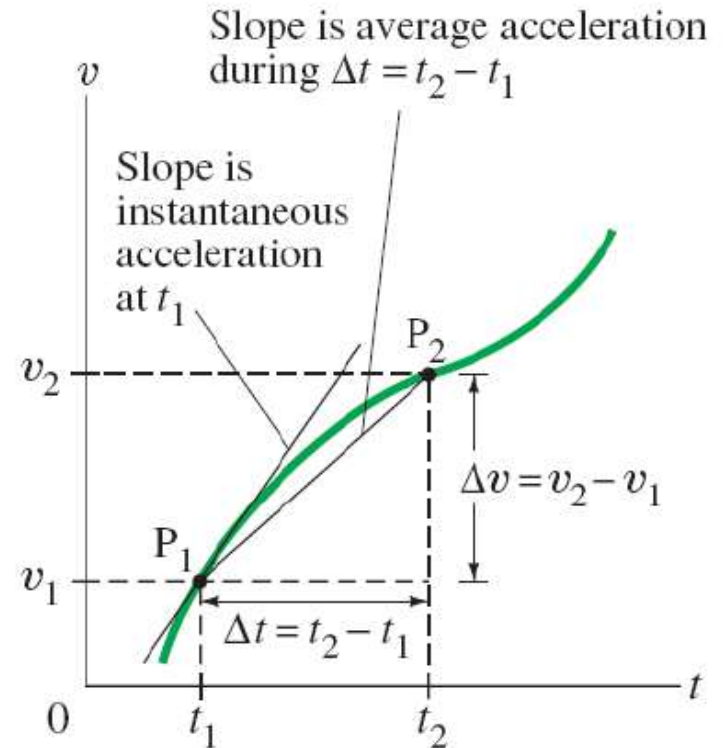
Η επιτάχυνση είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

Μέση επιτάχυνση:  $a_{avg} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

Στιγμαία επιτάχυνση:  $\alpha = \frac{dv}{dt}$

$\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

γραφικά: η επιτάχυνση είναι η εφαπτομένη της καμπύλης  $v(t)$  στο  $t$ .



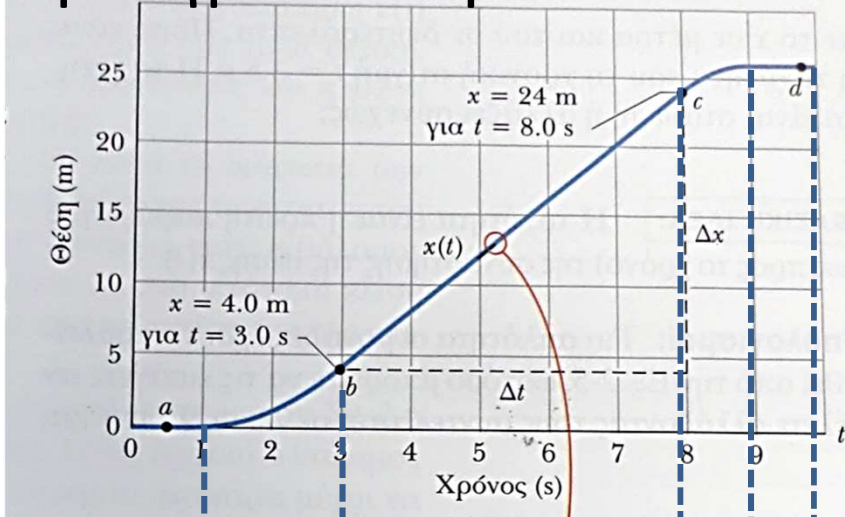
$x(t) = At^2 + B \quad \Rightarrow \quad v(t) = 2At \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = 2A$

Πρόβλημα αρχικής τιμής

$\alpha(t) = 2A \quad \Rightarrow \quad dv(t) = a(t)dt \Rightarrow v(t) = \int 2Adt + v_o = 2At + v_o$

$\Rightarrow dx(t) = v(t)dt \Rightarrow x(t) = \int (2At + v_o)dt + x_o = At^2 + v_o t + x_o$

# Παράδειγμα: Ασανσέρ που κινείται από το ισόγειο στον 7<sup>ο</sup> όροφο



Για χρόνο  $[0, 1]$ :

$$x(t)=0 \text{ και } dx=0 \rightarrow v(t)=0 \rightarrow a(t)=0$$

Για χρόνο  $[1, 3]$ :

$$x(t) = a_0(t - 1)^2 + v_1(t - 1) + x_1$$

Για  $t=3$ :  $4 = a_0(3-1)^2 \rightarrow a_0 = 1 \text{ m/sec}^2$

$$v(t) = 2a_0(t - 1) \text{ \& } a(t) = 2a_0 = 2 \text{ m/sec}^2$$

Για χρόνο  $[3, 8]$ :

$$x(t) = 4 + v_2(t - 3) = 4 + 4(t - 3)$$

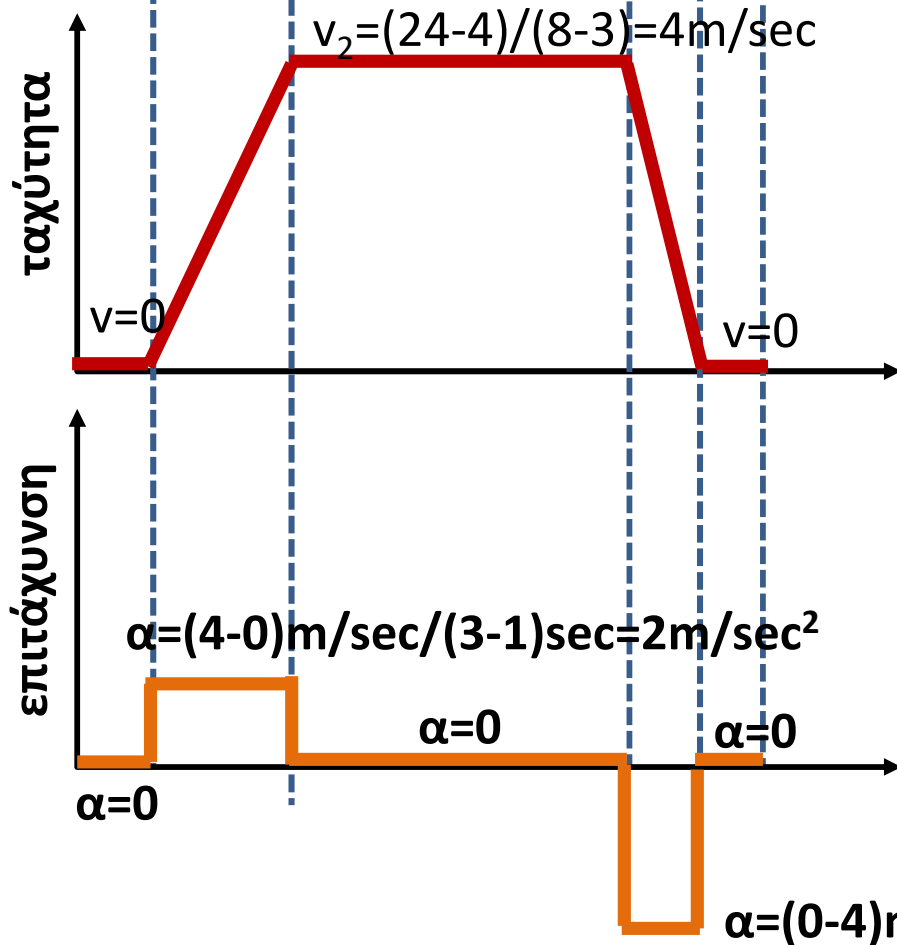
$$v(t) = 4 \text{ m/sec} \text{ \& } a(t) = 0 \text{ m/sec}^2$$

Για χρόνο  $[8, 9]$ :

$$x(t) = -2(t - 8)^2 + 4(t - 8) + 24$$

$$v(t) = 4 - 4(t - 8)$$

$$a(t) = -4 \text{ m/sec}^2$$



## Ασκήσεις για το σπίτι:

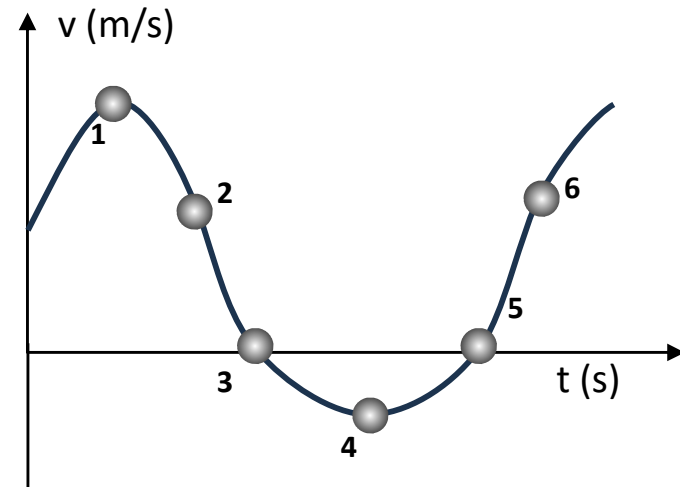
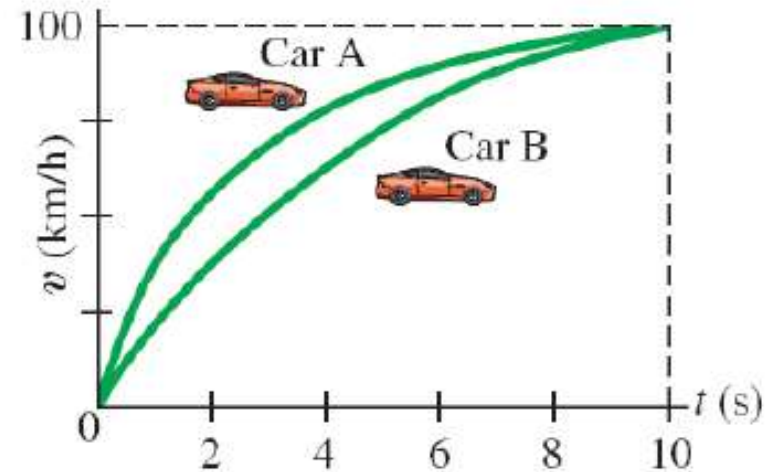
1.

«Διαβάζοντας» το γράφημα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου αποφανθείτε συγκριτικά για τα δύο είδη κίνησης (π.χ. γρηγορότερη κίνηση, μέση επιτάχυνση) και για την μετατόπιση που αυτές προκαλούν (σε ποια περίπτωση είναι μεγαλύτερη)

2. Στο διάγραμμα δίδεται η ταχύτητα σωματιδίου που κινείται επί άξονα. Το σημείο 1 είναι το ψηλότερο της καμπύλης και το σημείο 4 το χαμηλότερο. Τα σημεία 2 και 6 βρίσκονται στην ίδια στάθμη. Ποια είναι η κατεύθυνση της κίνησης (α) την χρονική στιγμή  $t=0$  s και (β) στο σημείο 4; (γ) Σε ποιο από τα έξι σημεία το σωματίδιο αντιστρέφει την κατεύθυνση κίνησής του; (δ) Ταξινομήστε τα έξι σημεία σύμφωνα με το μέτρο της επιτάχυνσης, (πχ. Μεγαλύτερη επιτάχυνση ως πρώτη τιμή)

3. Μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου με συνάρτηση θέσης,  $x(t)=4-27t+t^3$

Να δώσετε σε σκαρίφημα και να περιγράψετε την κίνηση για  $t \geq 0$ ) (π.χ. κατεύθυνση, εάν είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη, ταχύτητα θετική ή αρνητική, χρόνο που κάτι αλλάζει...)



## Ασκήσεις για το σπίτι:

1.

«Διαβάζοντας» το γράφημα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου αποφανθείτε συγκριτικά για τα δύο είδη κίνησης (π.χ. γρηγορότερη κίνηση, μέση επιτάχυνση) και για την μετατόπιση που αυτές προκαλούν (σε ποια περίπτωση είναι μεγαλύτερη)

### Λύση

Για  $t=0$  s: **μηδενική ταχύτητα** των δύο οχημάτων

Το όχημα A αναπτύσσει αρχικά **μεγαλύτερη επιτάχυνση** από το B

(**κλίση** σε κάθε θέση του διαγράμματος  $v - t \rightarrow$  **επιτάχυνση**  $a(t)=dv/dt$ )

Έτσι, για  $t=2$  s το A έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το B

σε  $t=6$  s το όχημα A έχει **μικρότερη επιτάχυνση** από το B

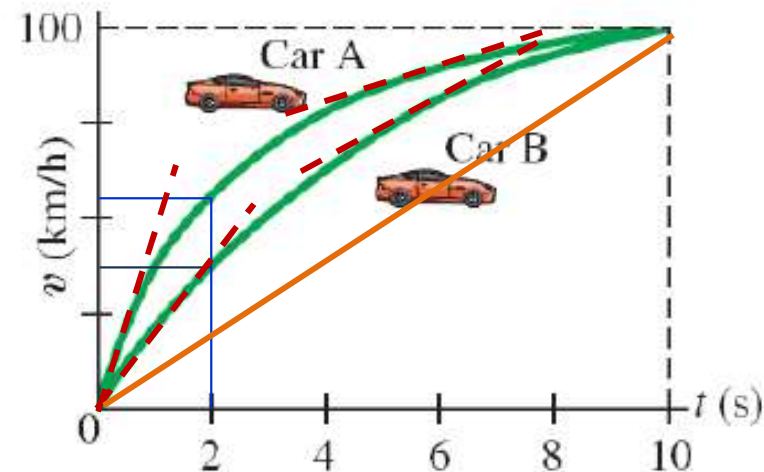
Και τα δύο οχήματα έχουν ίδια **μέση επιτάχυνση**  $= (100 - 0)(\text{km/h})/[(10 - 0) (\text{s})]=0.28\text{m/s}^2$

Και τα δύο οχήματα εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση με μειούμενη επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου (θετική κλίση)

Επειδή:

$$dx(t) = v(t)dt \Rightarrow x(t) = \int v(t)dt$$

Το εμβαδόν μεταξύ καμπύλης και άξονα του χρόνου αποδίδει την συνολική μετατόπιση: Το A διανύει μεγαλύτερη μετατόπιση. Δεν είναι γνωστή όμως η αρχική θέση.



**Ασκήσεις για το σπίτι:** 3. Μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου με συνάρτηση θέσης,  $x(t)=4-27t+t^3$   
Να δώσετε σε σκαρίφημα και να περιγράψετε την κίνηση για  $t \geq 0$  (π.χ. κατεύθυνση, εάν είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη, ταχύτητα θετική ή αρνητική, χρόνο που κάτι αλλάζει...)

### Λύση

$$x(t)=4-27t+t^3, \quad x \text{ σε m, } t \text{ σε s}$$

Με παραγωγή:

$$\text{ταχύτητα } v(t)=dx(t)/dt=-27+3t^2 \rightarrow \mathbf{v(t)=-27+3t^2}$$

Με παραγωγή:

$$\text{επιτάχυνση } a(t)=dv(t)/dt=6t \rightarrow \mathbf{a(t)=6t}$$

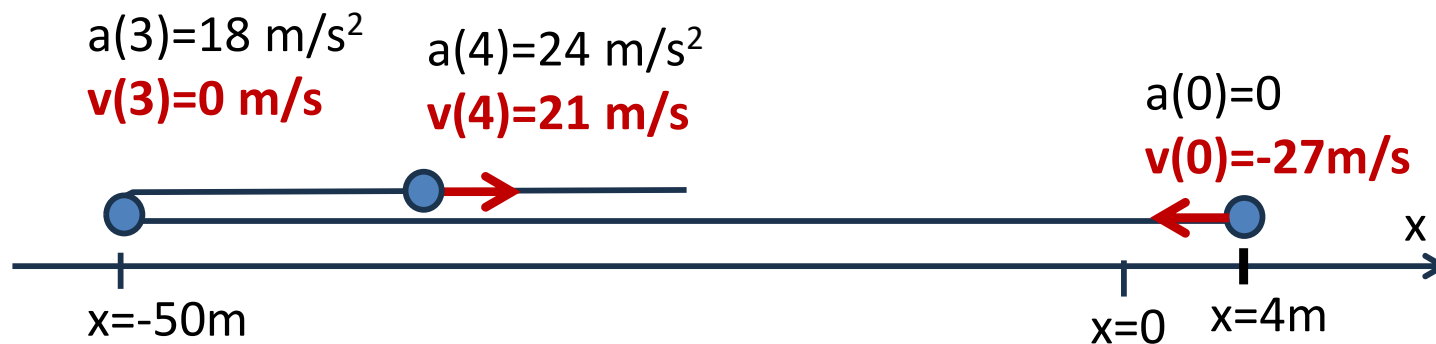
Την χρονική στιγμή  $t=0$ :

- Θέση:  $x(0)=4\text{m}$ , ταχύτητα  $v(0)=-27\text{m/s}$ , επιτάχυνση  $a(0)=0 \rightarrow$  κίνηση προς τα αριστερά
- Μηδενισμός ταχύτητας:  $0=-27+3t^2 \rightarrow t=\pm 3 \text{ s}$  (3 s πριν και 3 s μετά το  $t=0 \text{ s}$ )

$0 < t < 3 \text{ s}$ :

- η ταχύτητα παραμένει αρνητική (κίνηση προς τα αριστερά)
- Η επιτάχυνση είναι θετική  $\rightarrow$  επιβραδυνόμενη κίνηση
- Για  $t=3 \text{ s}$ :  $v(3)=0$  (στιγμιαίος μηδενισμός ταχύτητας),  $x(3)=-50 \text{ m}$ ,  $a(3)=18 \text{ m/s}^2$

Για  $t=4 \text{ s}$ :  $v(4)=21 \text{ m/s}$  (κίνηση προς τα δεξιά),  $a(4)=24 \text{ m/s}^2 \rightarrow$  επιταχυνόμενη κίνηση



**Ασκήσεις για το σπίτι:** 3. Μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου με συνάρτηση θέσης,  $x(t)=4-27t+t^3$   
 Να δώσετε σε σκαρίφημα και να περιγράψετε την κίνηση για  $t \geq 0$  (π.χ. κατεύθυνση, εάν είναι επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη, ταχύτητα θετική ή αρνητική, χρόνο που κάτι αλλάζει...)

**Λύση**

