ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

3. ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

4. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Προσεκτικός σχεδιασμός υδραυλικών έργων λόγω των αυξανομένων αναγκών σε νερό και της αυξανόμενης ανάγκης προστασίας από πλημμύρες.
- Διαχείριση μιας ομάδας ταμιευτήρων για την ανάσχεση πλημμυρών κατά βέλτιστο τρόπο.
- Σχεδιασμός αρδευτικού συστήματος λαμβάνοντας υπόψη την πιθανότητα αστοχίας του συστήματος.
- Σχεδιασμός ταμιευτήρων λαμβάνοντας υπόψη τις υψηλές πλημμυρικές παροχές των μελλοντικών χρόνων.

2. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

<u>Σύμφωνα με το σκοπό που εξυπηρετούν</u>

- προστασία από πλημμύρες
- άρδευση καλλιεργειών
- παροχή νερού για οικιακή και βιομηχανική χρήση
- παραγωγή υδροηλεκτρικής ενέργειας
- εμπλουτισμός υδατορευμάτων κατά τις περιόδους χαμηλής παροχής
- ναυσιπλοΐα

<u>Ταμιευτήρες απλής ή πολλαπλής σκοπιμότητας</u>

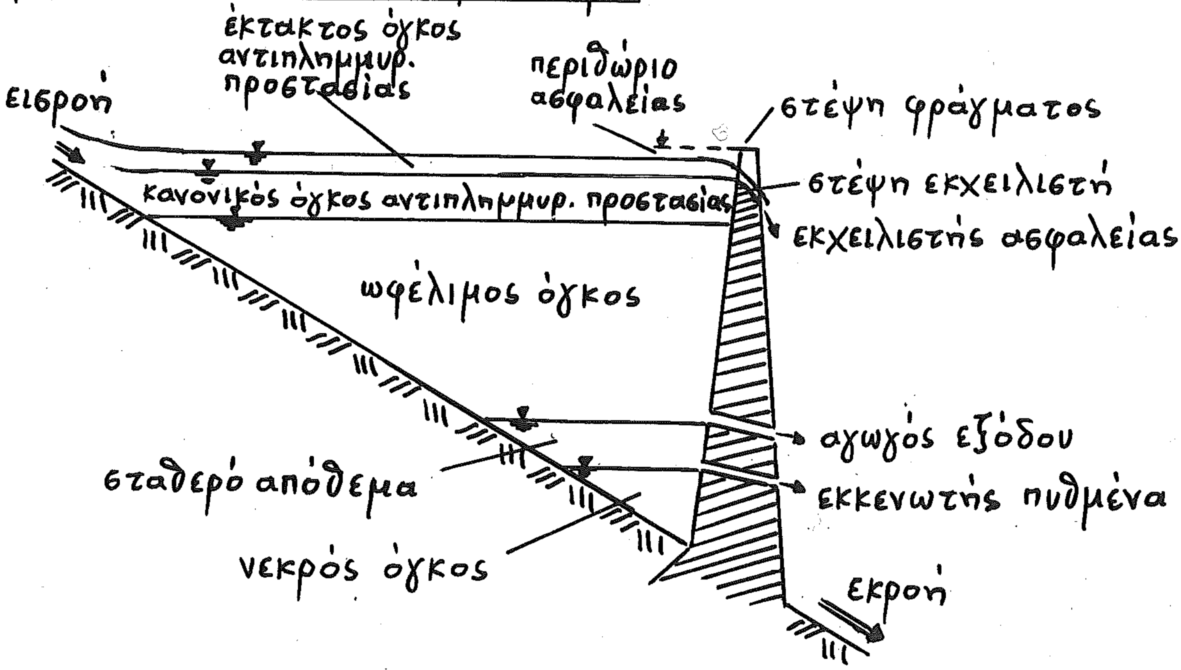
<u>Μεμονωμένος ταμιευτήρας ή ομάδα ταμιευτήρων</u>

Ομάδα ταμιευτήρων: διατεταγμένοι εν σειρά ή εν παραλλήλω

3. ΝΤΕΤΕΡΜΙΝΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

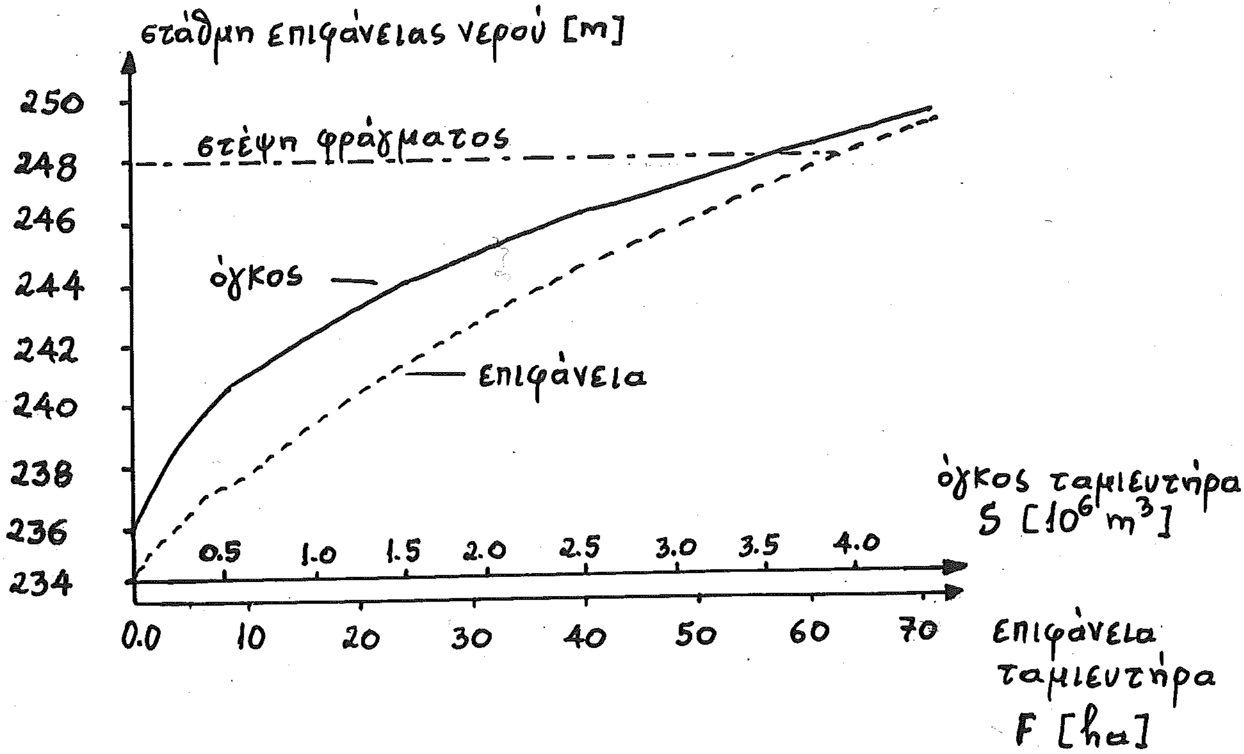
- Σύστημα: ένας ή περισσότεροι ταμιευτήρες.
- Σχέση ανάμεσα στην είσοδο (αίτιο) και στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος βάσει φυσικών αρχών.

<u>Υποδιαίρεση του όγκου ενός ταμιευτήρα</u>



Χωρητικότητα ταμιευτήρα (S_{max} ή K): όγκος κάτω από τη στέψη του εκχειλιστή ασφαλείας

Χαρακτηριστικές Καμπύλες ενός ταμιευτήρα



$$\boxed{S = a h^b}$$

S : όγκος ταμιευτήρα [m^3]

h : ύψος της στάθμης του νερού υπεράνω του πυθμένα [m]

Συνήθως $b=2$ (παραβολική καμπύλη)

$a = 0.014$ (για την περίπτωση του σχήματος)

Χαρακτηριστικές παράμετροι ενός ταμιευτήρα

$$\alpha = \frac{\text{μέση παροχή εκροής}}{\text{μέση παροχή εισροής}} = \frac{A\ [m^3/s]}{MQ\ [m^3/s]} = \text{βαθμός εξισορρόπησης}$$

$$\beta = \frac{\text{όγκος νερού ταμιευτήρα}}{\text{ετήσιος όγκος εισροής}} = \text{βαθμός ανάπτυξης}$$

$\beta < 1$ για ταμιευτήρες ανάσχεσης πλημμυρών

$\beta \geqslant 1$ για ταμιευτήρες υδροδότησης

Συνάρτηση συστήματος ενός ταμιευτήρα

Συνθήκη συνέχειας: $\boxed{I(t) - A(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}}$

$I(t)$: εισροή

$A(t)$: εκροή

$S(t)$: αποθηκευμένος όγκος νερού

$A(t) = f(S, I)$ $\qquad$ $A(t) = f(S)$

$$\frac{dS}{dt} + f(S) = I(t)$$

Απλή περίπτωση: $S = KA$ $\Rightarrow$ γραμμικός ταμιευτήρας

K : σταθερά του ταμιευτήρα [χρόνος]

$$K\frac{dA}{dt} + A = I$$

Λύση: $$A(t) = A(t_o)e^{-(t-t_o)/K} + \int_{t_o}^{t} I(\tau)\frac{1}{K}e^{-(t-\tau)/K}d\tau$$

τ: μεταβλητή ολοκλήρωσης

$A(t_o)e^{-(t-t_o)/K}$ $\Rightarrow$ διαδικασία εκκένωσης ενός ταμιευτήρα, που τη χρονική στιγμή t_o έχει όγκο νερού $S_o = KA(t_o)$ και μετά τη χρονική στιγμή t_o δεν έχει εισροές.

Εάν $t_o \to \infty$ και $t-\tau = t'$, τότε

$$A(t) = -\int_{-\infty}^{0} I(t-t')\frac{1}{K}e^{-t'/K}dt' \quad \text{ή} \quad A(t) = \int_{0}^{+\infty} I(t-t')\frac{1}{K}e^{-t'/K}dt'$$

Ολοκλήρωμα αναδίπλωσης (convolution integral)

Συνάρτηση συστήματος γραμμικού ταμιευτήρα: $\frac{1}{K}e^{-t'/K}$

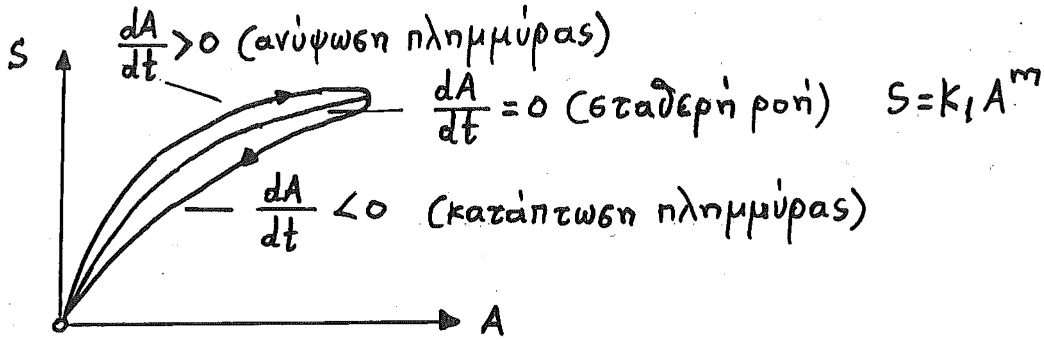
$$\boxed{A = ch^d}$$

A: εκροή από έναν εκκενωτή πυθμένα ή από έναν εκχειλιστή ασφαλείας

c,d: σταθερές εξαρτώμενες από τη μορφή των τεχνικών έργων

$$S = ah^b \Rightarrow S = a\left(\frac{A}{c}\right)^{b/d} \Rightarrow \boxed{S = k_1 A^m}$$

μη γραμμικός ταμιευτήρας



Σταθερή ροή : $S = K_1 A^m$

Ασταθής ροή : $S = K_1 A^m + K_2 \frac{dA}{dt}$

} μη γραμμικός ταμιευτήρας

$$\frac{dS}{dt} = K_1 m A^{m-1} \frac{dA}{dt} + K_2 \frac{d^2A}{dt^2}$$

$$I - A = \frac{dS}{dt} \Rightarrow K_2 \frac{d^2A}{dt^2} + K_1 m A^{m-1} \frac{dA}{dt} + A = I$$

(για το τμήμα ενός ποταμού)

$$K_1 m A^{m-1} \frac{dA}{dt} + A = I \qquad \text{(για ταμιευτήρες)}$$

Διαστασιολόγηση ταμιευτήρων ανάσχεσης πλημμυρών

- Προστασία κατοικημένων περιοχών με τεχνικά έργα στα υδατορεύματα (αναχώματα, φραγμάτια, αγωγοί κ.λπ.)
- Προστασία ευρύτερων περιοχών με δεξαμενές ή ταμιευτήρες ανάσχεσης πλημμυρών

Βήματα διαστασιολόγησης

- Προσδιορισμός των εκροών από τον ταμιευτήρα έτσι ώστε η παροχή νερού κατάντη του ταμιευτήρα να μην υπερβαίνει μια προβλεπόμενη τιμή.
- Εύρεση του πλημμυρικού κύματος διαστασιολόγησης.
- Προσδιορισμός του κανόνα λειτουργίας του ταμιευτήρα σε περίπτωση πλημμύρας.
- Διαστασιολόγηση του ταμιευτήρα βάσει των πληροφοριών από τα προηγούμενα βήματα.

Παράδειγμα 1

Δίδονται :

- το κύμα μελέτης
- η καμπύλη όγκου του ταμιευτήρα και η χωρητικότητα του ταμιευτήρα κάτω από τη στέψη του εκχειλιστή
- η υδραυλική χαρακτηριστική καμπύλη του εκκενωτή και του εκχειλιστή

Ζητείται η ελάχιστη διατομή του εκκενωτή έτσι ώστε το κύμα μελέτης να διέλθει μέσω του ταμιευτήρα χωρίς να ενεργοποιηθεί ο εκχειλιστής ασφαλείας.

Λύση

$$\boxed{A_1 = F v = F \sqrt{2g}\, h^{1/2} = c_1 h^{1/2}}$$ (Torricelli)

A_1 : παροχή εκροής μέσω του εκκενωτή πυθμένα [m^3/s]

F : υγρή διατομή [m^2]

v : μέση ταχύτητα ροής [m/s]

g : επιτάχυνση της βαρύτητας [m/s^2]

h : απόσταση της στάθμης της επιφάνειας του νερού από το κέντρο του στομίου εισροής του εκκενωτή πυθμένα [m]

c_1 : σταθερά

$$\boxed{A_2 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g}\, h_{\ddot{u}}^{3/2} = c_2 h_{\ddot{u}}^{3/2}}$$ (Poleni)

A_2 : παροχή υπεράνω της στέψης του εκχειλιστή [m^3/s]

μ : συντελεστής παροχής

b : μήκος της στέψης του εκχειλιστή [m]

$h_{\ddot{u}}$: απόσταση της στάθμης της επιφάνειας του νερού από τη στέψη του εκχειλιστή [m]

c_2 : σταθερά

Παραδοχή: $c_1 = 1$ $\quad c_2 = 13$ $\Rightarrow$

$F \simeq 0.3\ m^2$ $\quad b \simeq 6\ m$ (προσωρινά μεγέθη μελέτης)

$$A = c_1 h^{1/2} + c_2 h_{ü}^{3/2}$$

A : συνολική παροχή εκροής από τον ταμιευτήρα $[m^3/s]$

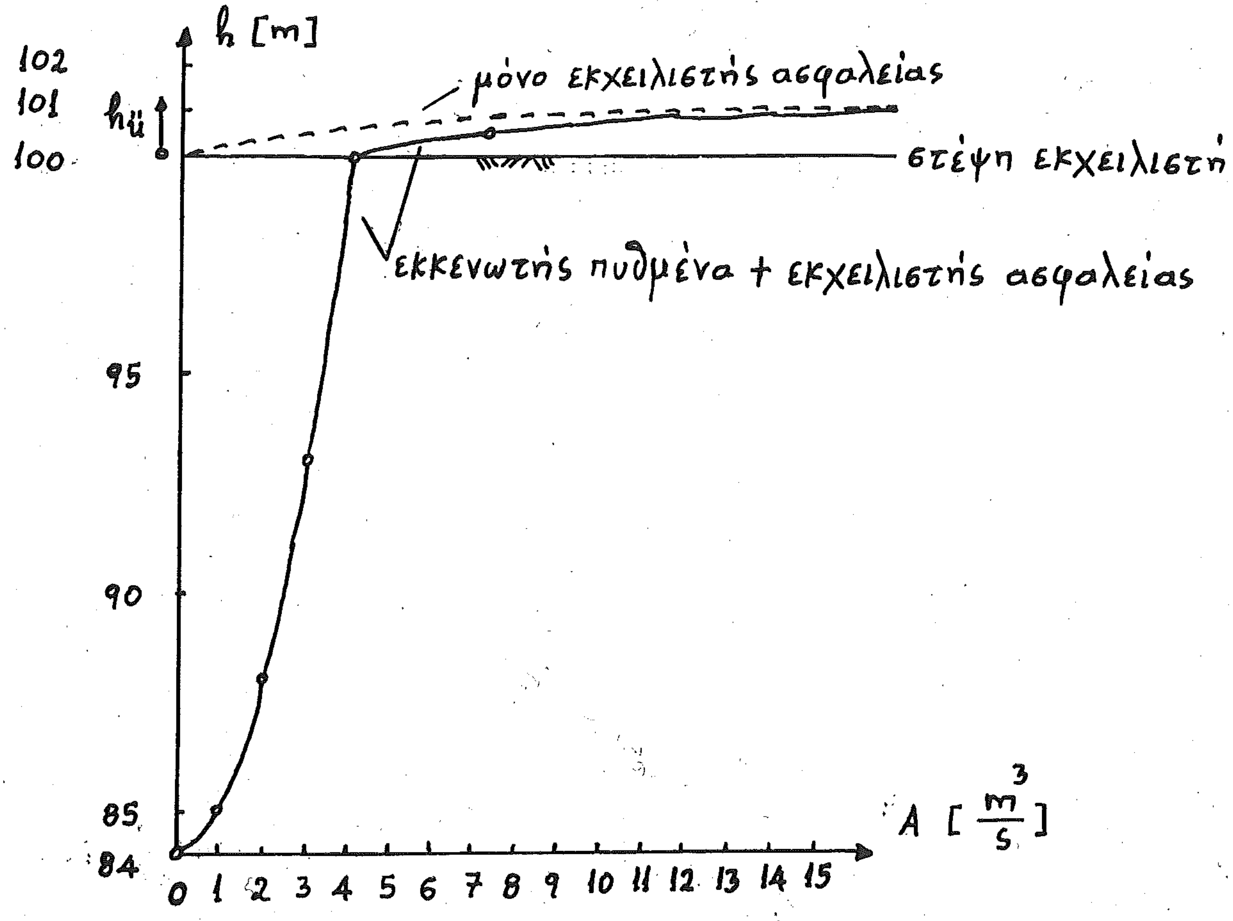
$$h_{ü} = 0 \Rightarrow A = c_1 h^{1/2}$$

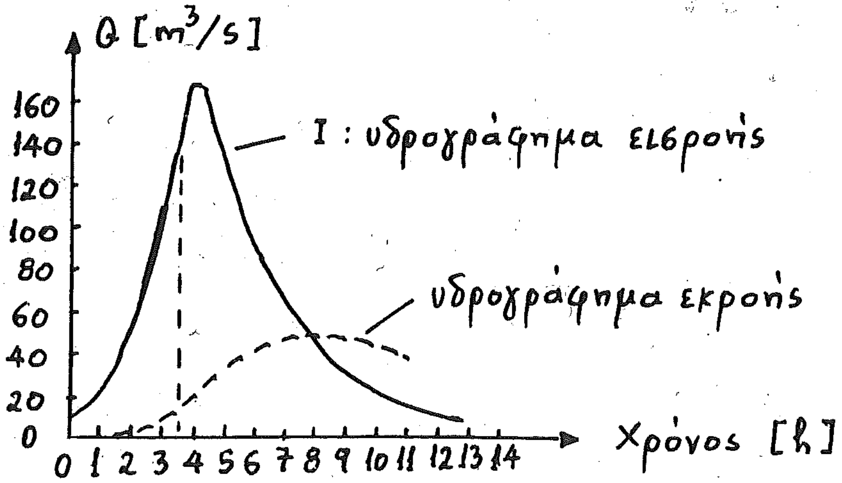
$$S = a h^2 \Rightarrow A = \frac{c_1}{a^{1/4}} S^{1/4}$$

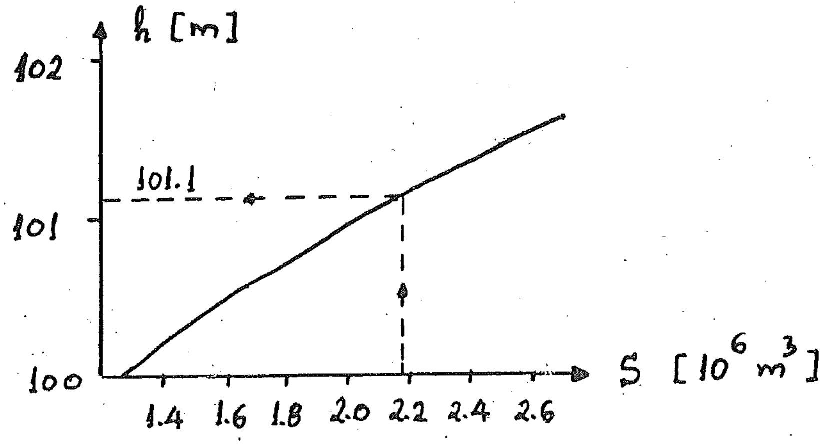
$$\frac{dS}{dt} = I - A = I - \frac{c_1}{a^{1/4}} S^{1/4}$$

- Η συνάρτηση $I(t)$ δεν δίδεται σε αναλυτική μορφή, αλλά ως εμπειρική καμπύλη.
- Αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης.
- Διακριτοποίηση των συνεχών συναρτήσεων $I(t)$, $S(t)$ και $A(t)$.
- Διόδευση πλημμυρικού κύματος εισροής μέσω του ταμιευτήρα και του εκκενωτή πυθμένα.

Υδραυλική καμπύλη του εκκενωτή πυθμένα και του εκχειλιστή ασφαλείας







Παράδειγμα 2

Δίδονται:

- κύμα μελέτης
- καμπύλη όγκου ταμιευτήρα
- υδραυλική καμπύλη του εκχειλιστή ασφαλείας

Να γίνει διαστασιολόγηση του εκχειλιστή ασφαλείας

Παραδοχές:

- Κατά την εισροή του κύματος μελέτης, ο ταμιευτήρας είναι πλήρης και ο εκκενωτής πυθμένα κλειστός.
- Ανώτατη επιτρεπομένη στάθμη της επιφάνειας του νερού πάνω από τη στέψη του εκχειλιστή: σε υψόμετρο 101.7 m

Λύση

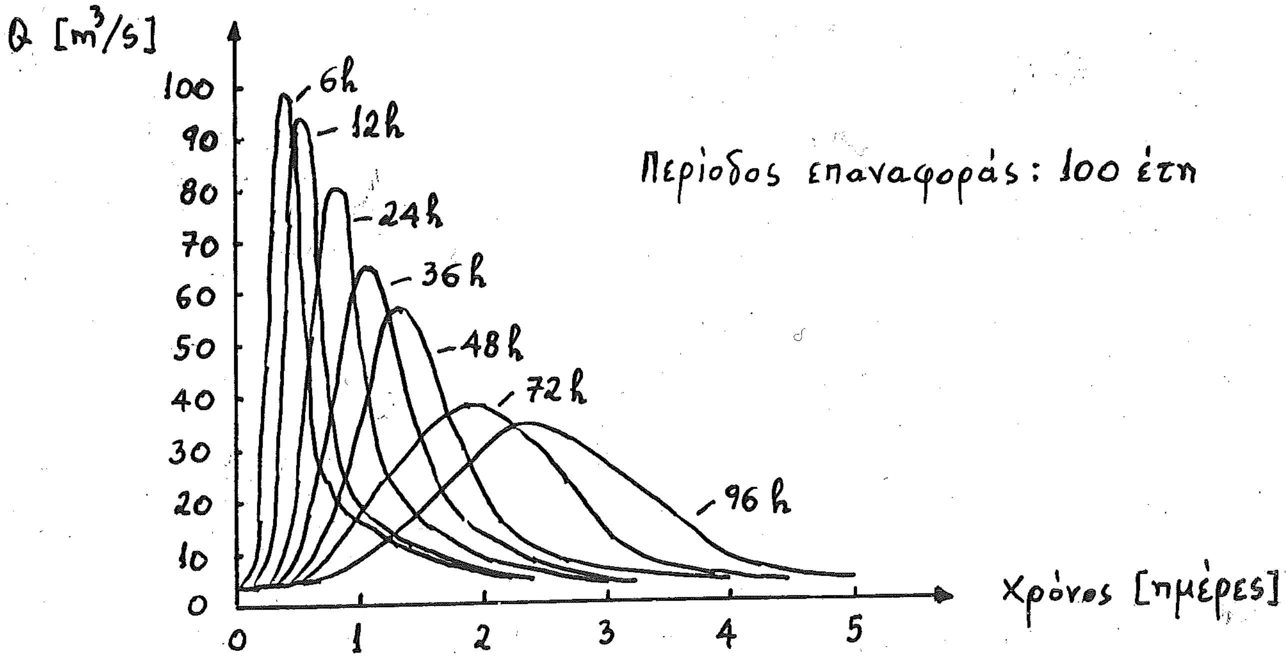
Ώρες	Δt [h]	I_i [$\frac{m^3}{s}$]	$I_i \Delta t$ [m^3]	Στάθμη [m] (παραδ.)	A_i [$\frac{m^3}{s}$]	$A_i \Delta t$ [m^3]	ΔS [m^3]	S [m^3]	Στάθμη [m]	Σύγκρ. στήλης 5 και 10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3-4	1.0	140	504000	101.3 (παραδ.)	20.5 (σχήμα)	73850	430150	2171550	101.1 (σχήμα)	χαμηλή
				101.1	15.0	54000	450000	2191400	101.1	εντάξει

Παράδειγμα 3

Δεδομένα:

- Επιτρεπόμενη παροχή του υδατορεύματος κατάντη ενός σχεδιαζόμενου ταμιευτήρα ανάσχεσης πλημμυρών
  $AQ = 14\ m^3/s$
- Πλημμυρικά κύματα μελέτης
- Ο εκχειλιστής ασφαλείας δεν πρέπει να ενεργοποιείται κατά τη διέλευση του κύματος μελέτης μέσω του ταμιευτήρα.

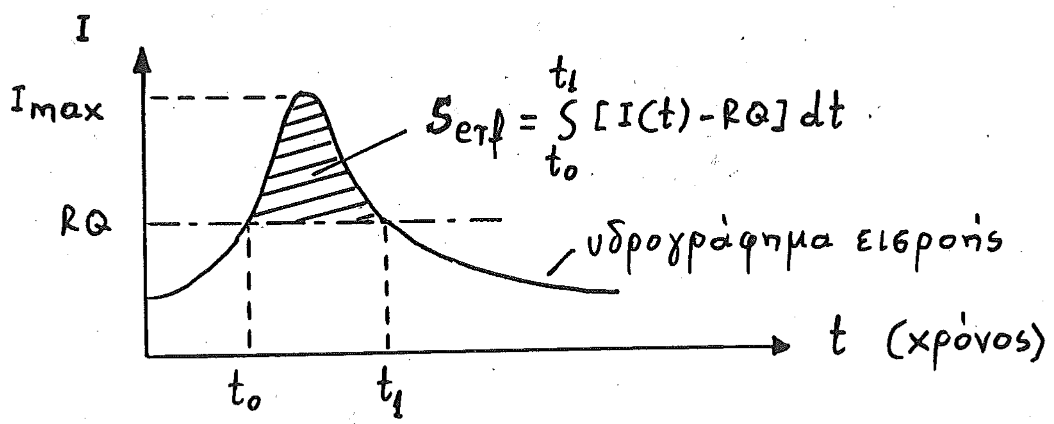
Ζητείται η αναγκαία χωρητικότητα του ταμιευτήρα, έτσι ώστε η παροχή εκροής RQ να είναι σταθερή και ίση προς την παροχή AQ, δηλ. $RQ = AQ = 14\ m^3/s$.



Λύση

I : εισροή A : εκροή

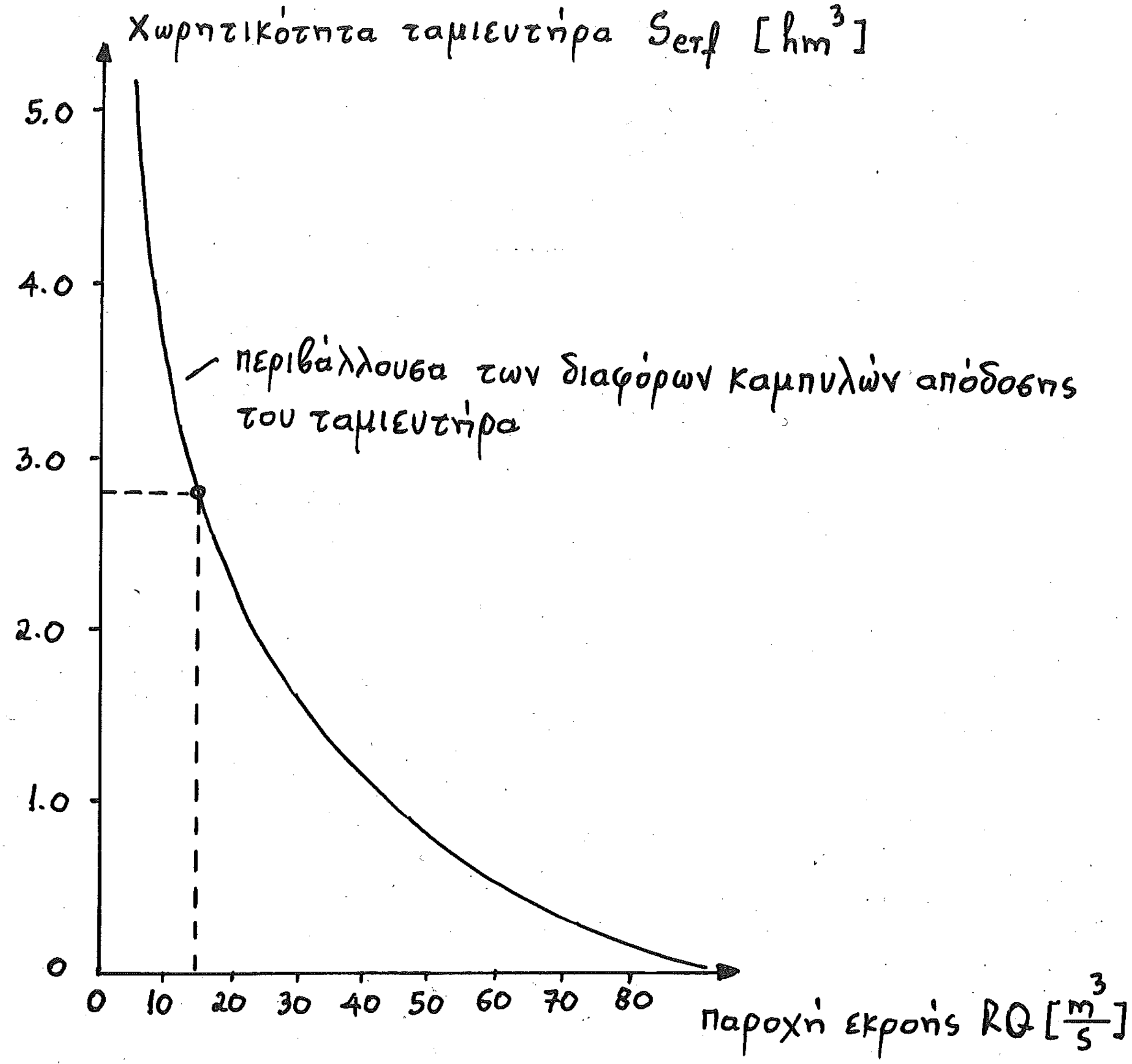
- Εάν $I \geqslant RQ$, τότε $A = RQ$
- Εάν $I < RQ$, τότε $A = I$
- Εξίσωση συνέχειας: $I(t) - RQ = \frac{dS}{dt}$
- Εάν το κύμα μελέτης $I(t)$ δινόταν π.χ. ως εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσε να λυθεί η εξίσωση συνέχειας.
- Ημιγραφική μέθοδος:



$S_{επ}$: αναγκαία χωρητικότητα

- Καμπύλη απόδοσης του ταμιευτήρα:

  Γραφική παράσταση της σχέσης ανάμεσα στο $S_{επ}$ και στο RQ



Για $RQ = 14\ m^3/s \Rightarrow S_{erf} = 2.8 \times 10^6\ m^3$

- <u>Αντίστροφο πρόβλημα:</u>

Χωρητικότητα του ταμιευτήρα: γνωστή από τοπογραφικά δεδομένα

Παροχή εκροής RQ: ζητείται

Διαστασιολόγηση ταμιευτήρων αποθήκευσης

- Διαστασιολόγηση ταμιευτήρων ανάσχεσης πλημμυρών: πλημμυρικά γεγονότα μικρής διάρκειας
- Διαστασιολόγηση ταμιευτήρων αποθήκευσης: μεγάλες περίοδοι ξηρασίας
- Χωρητικότητα ταμιευτήρων αποθήκευσης > Χωρητικότητα ταμιευτήρων ανάσχεσης πλημμυρών
- Πλήθος υδρολογικών στοιχείων: μεγαλύτερη σημασία για το σχεδιασμό ταμιευτήρων αποθήκευσης

Μέθοδος της αθροιστικής καμπύλης (Rippl, 1883)

$$\boxed{M(t) = \int_0^t I(t)\,dt}$$

$I(t)$: υδρογράφημα εισροής

$M(t)$: αθροιστική καμπύλη εισροής

$$\boxed{I(t) = \frac{dM(t)}{dt} = tg\alpha}$$

α : γωνία κλίσεως της αθροιστικής καμπύλης εισροής

Παράδειγμα

Δίδονται :

- Υδρογράφημα εισροής διάρκειας 20 ετών υπό μορφή μέσων μηνιαίων τιμών

- Σταθερό υδρογράφημα εκροής $A(t) = MQ = 20.9\ m^3/s$

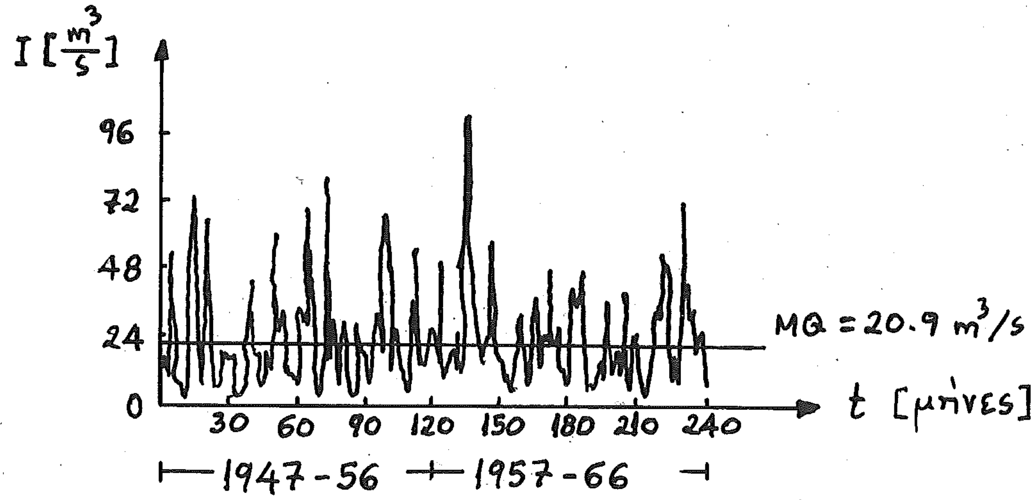
  MQ : μέση παροχή εισροής

  Κατάσταση πλήρους εξισορρόπησης

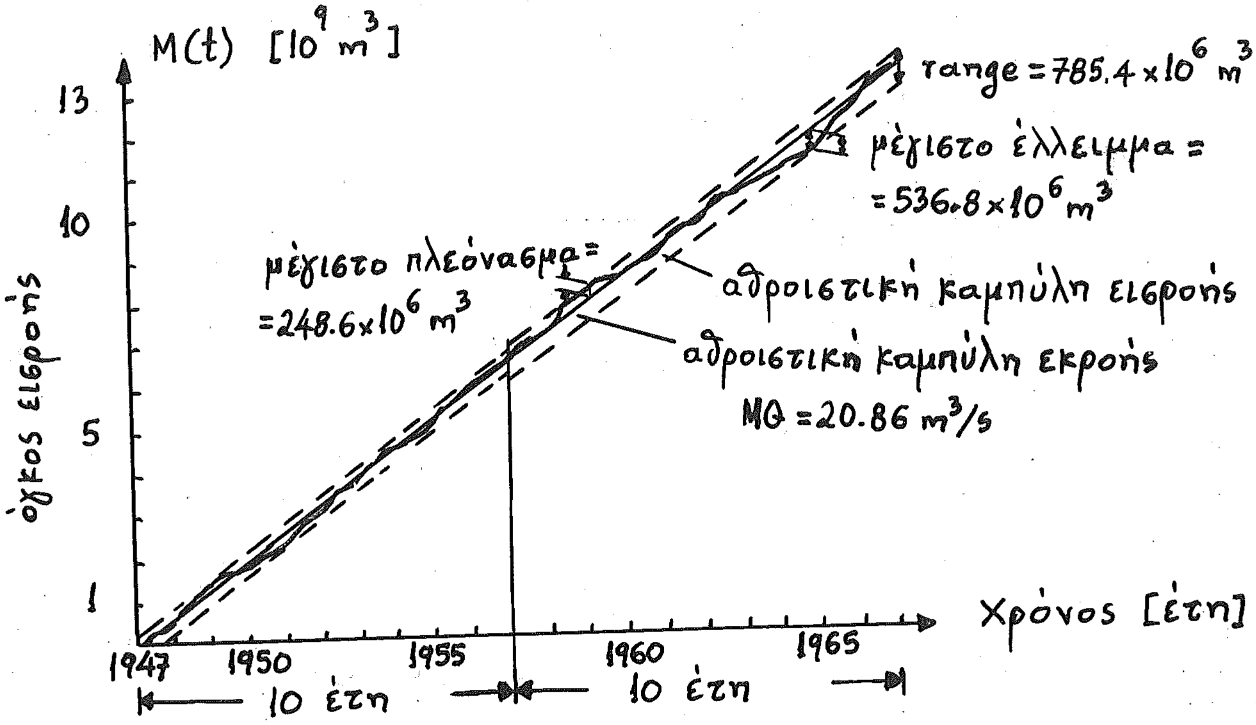
- Σταθερό υδρογράφημα εκροής $A(t) = 0.4\ MQ = 8.46\ m^3/s$ (εναλλακτική πρόταση)

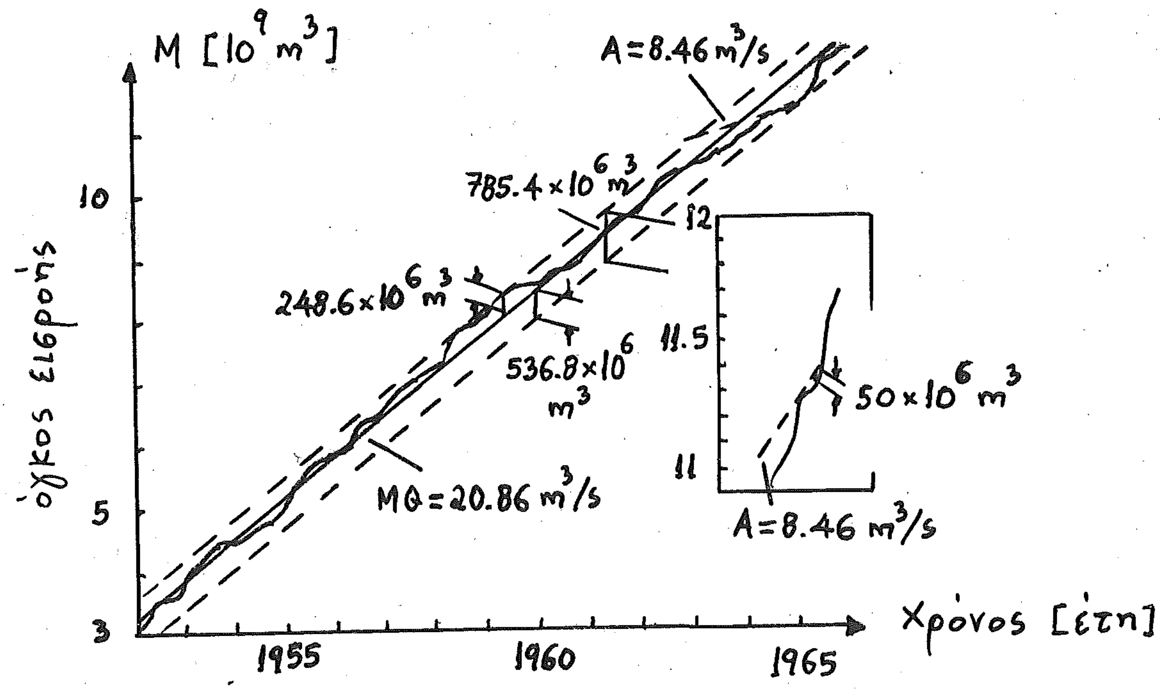
  Κατάσταση μερικής εξισορρόπησης

Ζητείται η αναγκαία χωρητικότητα του ταμιευτήρα για τις περιπτώσεις $A(t) = 20.9\ m^3/s$ και $A(t) = 8.46\ m^3/s$



Λύση





- Αντίστροφο πρόβλημα:

Δεδομένα: υδρογράφημα εισροής, χωρητικότητα ταμιευτήρα

Ζητείται η μέγιστη δυνατή εκροή (συνήθως σταθερή)

4. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΑΜΙΕΥΤΗΡΩΝ

- Εισροή νερού
- Αποθήκευση νερού
- Εκροή νερού

} στοχαστικές (τυχαίες) διαδικασίες

- Μαθηματικές σχέσεις της στοχαστικής μεθοδολογίας: θεωρία πιθανοτήτων, θεωρία στοχαστικών χρονοσειρών

- Στοχαστικές μέθοδοι: → πιθανολογικές (ή πιθανοκρατικές) → καθαρά στοχαστικές

Πιθανολογικές μέθοδοι ⇒ κατανομή πιθανοτήτων

Καθαρά στοχαστικές μέθοδοι ⇒ "αυτοσυσχέτιση"

- Παράδειγμα: Διαστασιολόγηση ενός ταμιευτήρα ανάσχεσης πλημμυρών

Ντετερμινιστική διαστασιολόγηση: βάσει της "μέγιστης δυνατής πλημμύρας" (possible maximum flood).

Στοχαστική διαστασιολόγηση: ο ταμιευτήρας να μην υπερχειλίζει συχνότερα από μια φορά στα 100 χρόνια (κατά μέσο όρο).

Μεταβατική πιθανότητα

$$\boxed{P\,(X_t = a \mid X_{t-1} = b) = q\,(a,b) \quad \text{ή} \quad q_{ab}}$$

Μεταβλητή X : αποθηκευμένος όγκος νερού

$q\,(a,b)$: μεταβατική πιθανότητα

(πιθανότητα υπό όρον ή δεσμευμένη πιθανότητα)

Δείκτης t : χρόνος

Πίνακας (ή μητρώο) μεταβατικών πιθανοτήτων (Q)

- Τιμές της μεταβλητής X : $a_1, a_2, \ldots a_n$ (n τιμές)
- n^2 μεταβατικές πιθανότητες από το χρόνο $t-1$ στο χρόνο t

$$Q = \begin{pmatrix} q(a_1,a_1) & q(a_1,a_2) & \cdots & q(a_1,a_n) \\ q(a_2,a_1) & q(a_2,a_2) & \cdots & q(a_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q(a_n,a_1) & q(a_n,a_2) & \cdots & q(a_n,a_n) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{p}\,Q = \vec{p}}$$

p_i : πιθανότητα να έχει ο ταμιευτήρας τη χρονική στιγμή t την αποθήκευση X_i (για μόνιμη ή σταθερή διαδικασία)

Παράδειγμα εφαρμογής του πίνακα μεταβατικών πιθανοτήτων

- Μεταβλητή X : εισροή νερού σ' έναν ταμιευτήρα
- $X = b - a \qquad X = b \qquad$ και $\quad X = b + a$

  b : σταθερή εκροή $\qquad$ a : σταθερή ποσότητα νερού
- Οι τιμές της μεταβλητής X είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- $P(X = b - a) = q \qquad P(X = b) = r \qquad P(X = b + a) = p$
- $p + r + q = 1$
- Ζητείται η κατανομή πιθανοτήτων για την αποθηκευμένη ποσότητα νερού την τυχούσα χρονική στιγμή t

Λύση

- Εξίσωση συνέχειας: $\quad S_t = S_{t-1} + X_{t-1} - b = S_{t-1} + Y_{t-1}$

  S : αποθήκευση νερού (μεταβλητή κατάστασης)

  Y : καθαρή εισροή (εισροή X - εκροή b)

  $Y = -a \;,\; Y = 0 \quad$ και $\quad Y = a$
- $S = ia \qquad S_{max} = na$

  $S = 5a \Rightarrow$ κατάσταση $\xi = 5$

Καταστάσεις του ταμιευτήρα

κενός	$0 \leq S < 0.5a$	$\xi = 0$
$S = a$	$0.5a \leq S < 1.5a$	$\xi = 1$
$S = 2a$	$1.5a \leq S < 2.5a$	$\xi = 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S = (n-1)a$	$(n-1.5)a \leq S < (n-0.5)a$	$\xi = n-1$
πλήρης	$(n-0.5)a \leq S < na$	$\xi = n$

Πίνακας εισροών

X	Y	$\eta = \frac{Y}{a}$	Πιθανότητα
$b-a$	$-a$	-1	q
b	0	0	r
$b+a$	a	1	p

X : εισροή Y : καθαρή εισροή η : σχετική εισροή

- Εξίσωση συνέχειας : $S_t = S_{t-1} + Y_{t-1}$

$$\xi_t = \xi_{t-1} + \eta_{t-1}$$

- Μετασχηματισμός κατάστασης : $\xi_{t-1} \rightarrow \xi_t = \xi_{t-1} + \eta_{t-1}$

$$\xi_{t-1} \neq 0 \quad \text{και} \quad \xi_{t-1} \neq n$$

Πιθανότητες

μετάβασης από την κατάσταση ξ_{t-1} στην κατάσταση ξ_t

$\xi_{t-1} = i \to \xi_t = i-1$ με πιθανότητα q

$\xi_{t-1} = i \to \xi_t = i$ " " r

$\xi_{t-1} = i \to \xi_t = i+1$ " " p

Οριακές συνθήκες της μετάβασης $\xi_{t-1} \to \xi_t$

ξ_{t-1}	ξ_t	X	Πιθανότητα
0 (κενός)	0	$X \leq b$	$1-p$ ή $q+r$
0	1	$X = b+a$	p
n (πλήρης)	$n-1$	$X = b-a$	q
n	n	$X \geq b$	$1-q$ ή $r+p$

Πίνακας (μητρώο) μεταβατικών πιθανοτήτων

ξ_t \ ξ_{t-1}	0	1	2 ----------	$n-1$	n
0	$1-p$	q	0 ----------	0	0
1	p	r	q ----------	0	0
2	0	p	r ----------	0	0
⋮					
$n-1$	0	0	0 ----------	r	q
n	0	0	0 ----------	p	$1-q$

$$\boxed{\vec{p}\,Q = \vec{p}}$$

p_i	p_0	p_1	p_2	-------	p_n
p_0	$q(0,0)$	$q(0,1)$	$q(0,2)$	-------	$q(0,n)$
p_1	$q(1,0)$	$q(1,1)$	$q(1,2)$	-------	$q(1,n)$
p_2	$q(2,0)$	$q(2,1)$	$q(2,2)$	-------	$q(2,n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
p_n	$q(n,0)$	$q(n,1)$	$q(n,2)$	-------	$q(n,n)$

$$p_0 = q(0,0)p_0 + q(0,1)p_1 + q(0,2)p_2 + \cdots + q(0,n)p_n$$

ή $$0 = [q(0,0)-1]p_0 + q(0,1)p_1 + q(0,2)p_2 + \cdots + q(0,n)p_n$$

	p_0	p_1	p_2	-------	p_n
0	$q(0,0)-1$	$q(0,1)$	$q(0,2)$	-------	$q(0,n)$
0	$q(1,0)$	$q(1,1)-1$	$q(1,2)$	-------	$q(1,n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
0	$q(n,0)$	$q(n,1)$	$q(n,2)$	-------	$q(n,n)-1$

Πίνακας (μητρώο) μεταβατικών πιθανοτήτων

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\
\hline
0 & -p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & p & -p-q & q & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & p & -p-q & \cdots & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p-q & q \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & -q
\end{array}
$$

p_i : πιθανότητα ώστε το σταθερό (μόνιμο) σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση i

$$p + r + q = 1 \Rightarrow r - 1 = -p - q$$

Μη συμμετρική κατανομή πιθανοτήτων εισροής $(p \neq q)$

$$p_i = \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^i \qquad \text{ή} \qquad p_i = K\left(\frac{p}{q}\right)^i$$

$$K = \frac{1-(p/q)}{1-(p/q)^{n+1}}$$

$$p_0 = K \qquad p_n = K\,(p/q)^n$$

Συμμετρική κατανομή πιθανοτήτων εισροής $(p = q)$

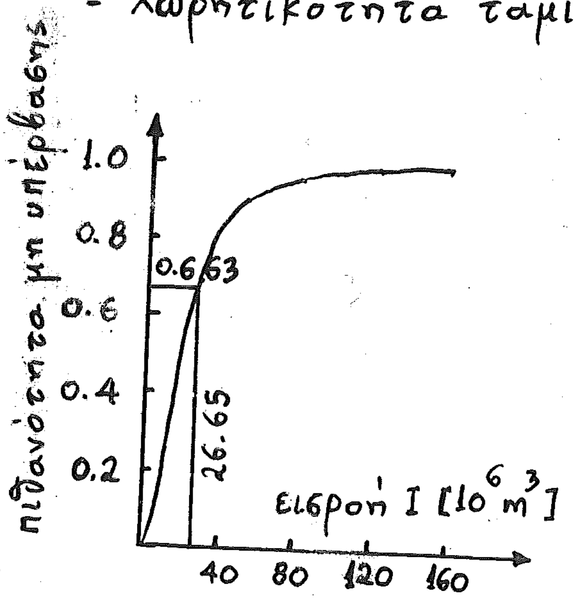
$$p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n+1}$$

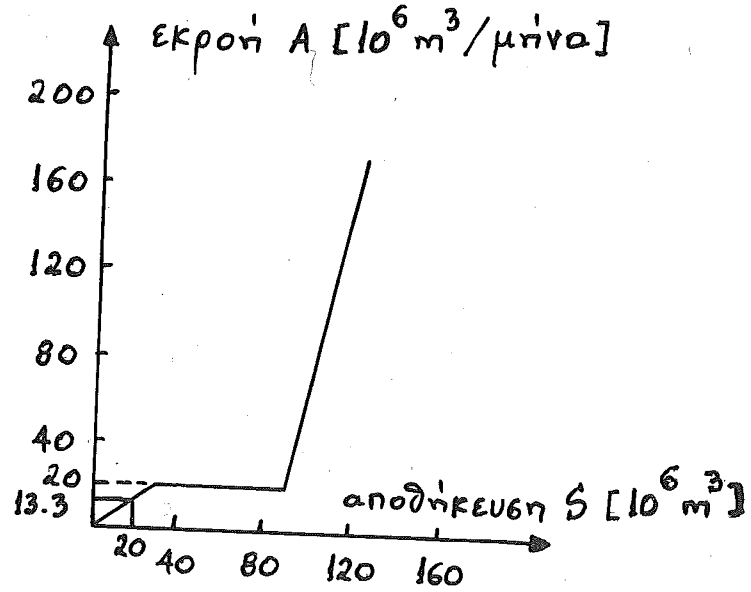
Θεωρία της "ουράς αναμονής" (queuing theory)

- Προσέλευση κόσμου στο ταμείο ενός κινηματογράφου ⇒ εισροή νερού στον ταμιευτήρα
- Μήκος της ουράς αναμονής ⇒ αποθήκευση νερού στον ταμιευτήρα
- Εξυπηρέτηση του κόσμου στο ταμείο ⇒ κανόνας εκροής νερού από τον ταμιευτήρα
- Απομακρυνόμενα άτομα από το ταμείο ⇒ εκροή νερού από τον ταμιευτήρα

Παράδειγμα

- Χωρητικότητα ταμιευτήρα $S_{max} = 120 \cdot 10^6 \; m^3$





- Απαιτουμένη εκροή : $20 \cdot 10^6 \; m^3$ ανά μήνα
- Ζητείται η (σταθερή) κατανομή πιθανοτήτων p_i των αποθηκεύσεων και η κατανομή πιθανοτήτων των εκροών

Λύση

- Διακριτοποίηση του αποθηκευμένου όγκου νερού σε 12 επιμέρους όγκους:

$$S = \frac{S_{max}}{12} = \frac{120 \cdot 10^6}{12} = 10 \cdot 10^6 \ m^3$$

Προσωρινός πίνακας μεταβατικών πιθανοτήτων

	p_0	p_{0-10}	p_{10-20}	p_{20-30}	------	$p_{110-120}$
p'_0	0	0	0	0	--------	0
p'_{10}	0.358	0.239	0.018	0	--------	0
p'_{20}	0.663	0.605	0.477	0.239	--------	0
p'_{30}	0.835	0.813	0.721	0.605	--------	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
p'_{120}	1	1	1	1	--------	1

- Πρώτη τιμή της τρίτης γραμμής του πίνακα : 0.663

$$0 \leq \Delta S \leq 20 \cdot 10^6 \ m^3 \Rightarrow \quad 0 \leq I - A \leq 20 \cdot 10^6 \ m^3$$

$$\left.\begin{array}{l} S = 0 \Rightarrow A = 0 \\ S = 20 \cdot 10^6 \Rightarrow A = 13.3 \cdot 10^6 \ m^3 \end{array}\right\} \text{μέσος όρος } A = 6.65 \cdot 10^6 \ m^3$$

$$I - 6.65 \cdot 10^6 \leq 20 \cdot 10^6 \Rightarrow I \leq 26.65 \cdot 10^6 \ m^3 \Rightarrow \text{πιθανότητα } 66.3\%$$

Εξίσωση για την τρίτη γραμμή

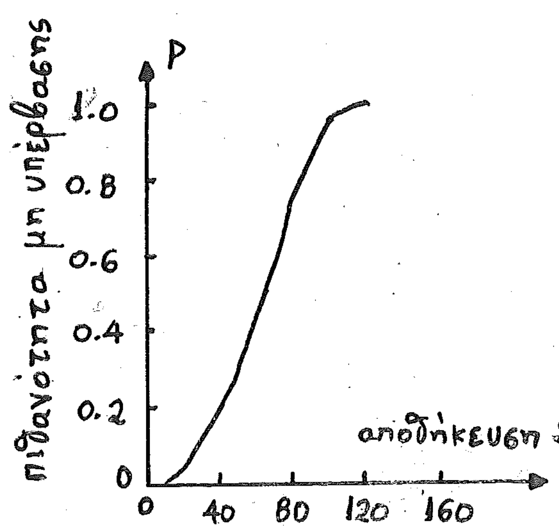
$$p'_{20} = 0.663\,p_0 + 0.605\,p_{0-10} + 0.477\,p_{10-20} + 0.239\,p_{20-30} + \cdots + 0.0\,p_{110-120}$$

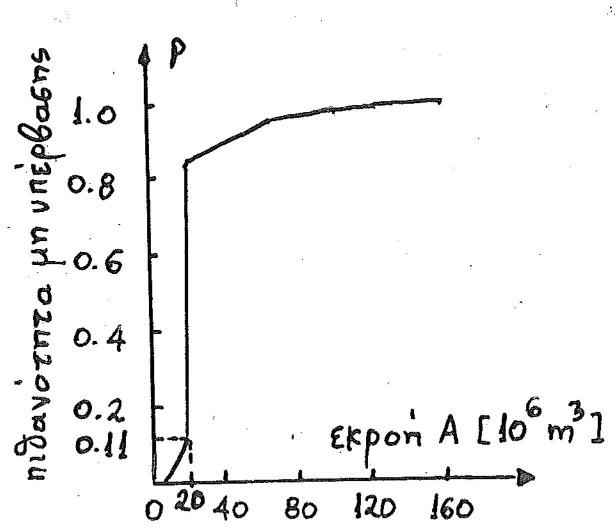
Τελικός πίνακας μεταβατικών πιθανοτήτων

	p_0	p_{0-10}	p_{10-20}	------	$p_{110-120}$	Πυκνότητα αποθήκευσης	Κατανομή αποθήκευσης
p'_0	0	0	0	------	0	0	0
p'_{0-10}	0.358	0.239	0.018	------	0	0.00082	0.00082
p'_{10-20}	0.305	0.366	0.459	------	0	0.03449	0.03531
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
$p'_{110-120}$	0	0	0.005	------	0.012	0.01503	1

Εξίσωση για την τρίτη γραμμή

$$p'_{10-20} = 0.305\,p_0 + 0.366\,p_{0-10} + 0.459\,p_{10-20} + \cdots + 0.0\,p_{110-120}$$



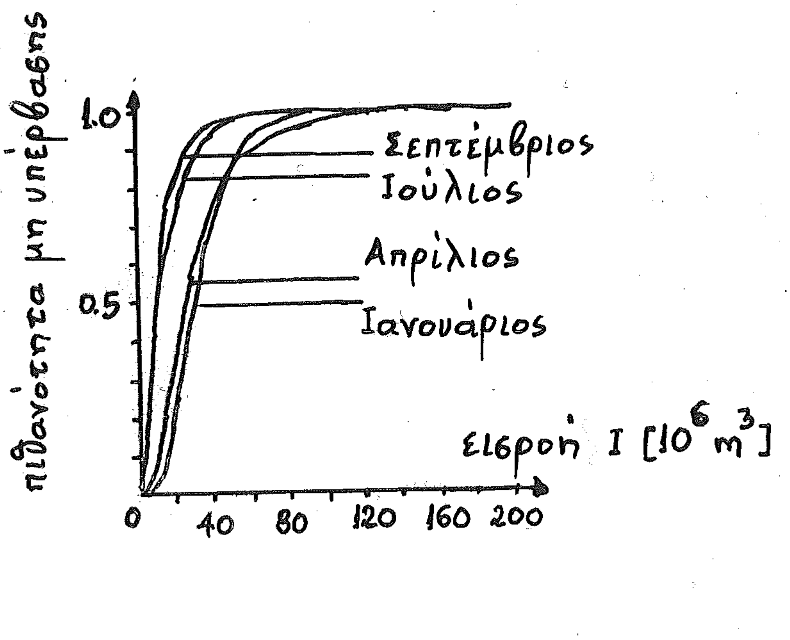


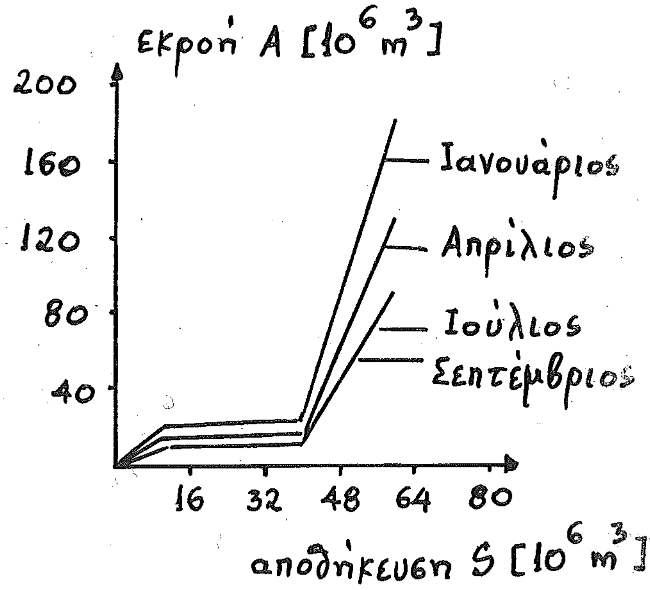
Εφαρμογή της θεωρίας της "ουράς αναμονής" σε μηνιαία βάση

- Μεταβαλλόμενη κατανομή των πιθανοτήτων εισροής από μήνα σε μήνα
- Μεταβαλλόμενος κανόνας εκροής από μήνα σε μήνα

Παράδειγμα

- Μετρήσεις παροχής νερού για 45 έτη στο υδατόρευμα που θα τροφοδοτεί ένα σχεδιαζόμενο ταμιευτήρα
- Εμπειρική κατανομή συχνότητας των μηνιαίων όγκων εισροής
- Προσαρμογή της θεωρητικής λογαριθμικής κατανομής πιθανοτήτων Pearson III





- Ζητείται η κατανομή των αποθηκεύσεων και των εκροών

Λύση

Μήνας	Πίνακας μεταβατικών πιθανοτήτων	Διάνυσμα λύσης
Ιανουάριος	Q_1	$\vec{p}_2$
Φεβρουάριος	Q_2	$\vec{p}_3$
⋮	⋮	⋮
Νοέμβριος	Q_{11}	$\vec{p}_{12}$
Δεκέμβριος	Q_{12}	$\vec{p}_1$

$\boxed{\vec{p} = Q\vec{p}}$ $\Rightarrow$ σύστημα εξισώσεων για κάθε μήνα

Ιανουάριος $\vec{p}_2 = Q_1 \vec{p}_1$

Φεβρουάριος $\vec{p}_3 = Q_2 \vec{p}_2$

⋮

Δεκέμβριος $\vec{p}_1 = Q_{12} \vec{p}_{12}$

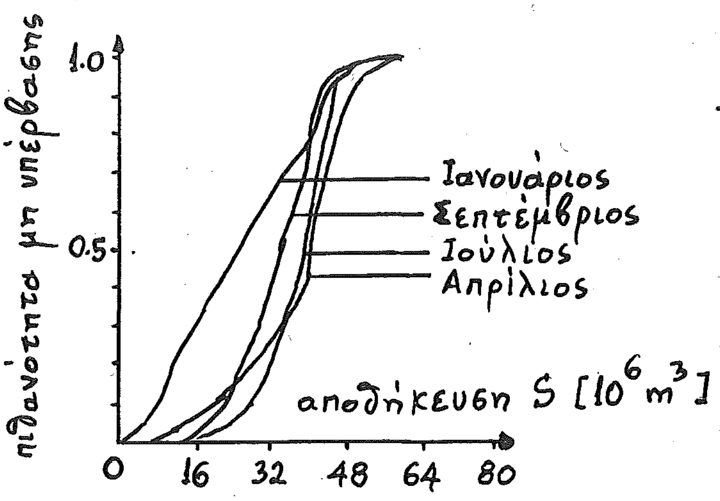
$$\vec{p}_2 = Q_1 \vec{p}_1$$

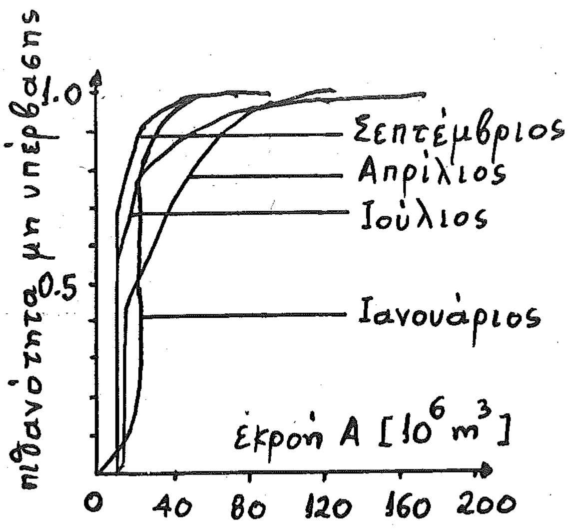
$$\vec{p}_3 = Q_2 \vec{p}_2 = Q_2 Q_1 \vec{p}_1$$

$$\vec{p}_4 = Q_3 \vec{p}_3 = Q_3 Q_2 Q_1 \vec{p}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{p}_1 = Q_{12} \vec{p}_{12} = Q_{12} Q_{11} Q_{10} \cdots Q_2 Q_1 \vec{p}_1$$





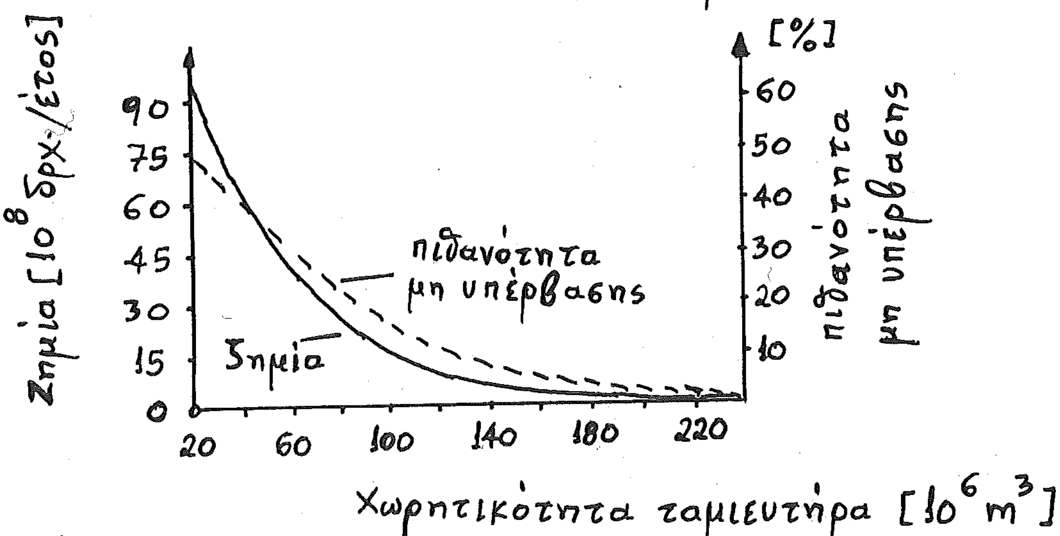
- Χωρητικότητα του ταμιευτήρα: 100 επιμέρους τμήματα
- 12 πίνακες μεταβατικών πιθανοτήτων
- Κάθε πίνακας: 100 × 100 στοιχεία
- 120 000 μεμονωμένες τιμές μεταβατικών πιθανοτήτων

Ανάλυση ευαισθησίας του ταμιευτήρα βάσει της θεωρίας της "ουράς αναμονής"

- Χωρητικότητα του ταμιευτήρα και πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής
- Κανόνας εκροής και πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής
- Χωρητικότητα του ταμιευτήρα και κανόνας εκροής (για σταθερή πιθανότητα μη υπέρβασης της εκροής)
- Μέγεθος διαστημάτων διακριτοποίησης

Σχέση μεταξύ χωρητικότητας του ταμιευτήρα και πιθανότητας μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής

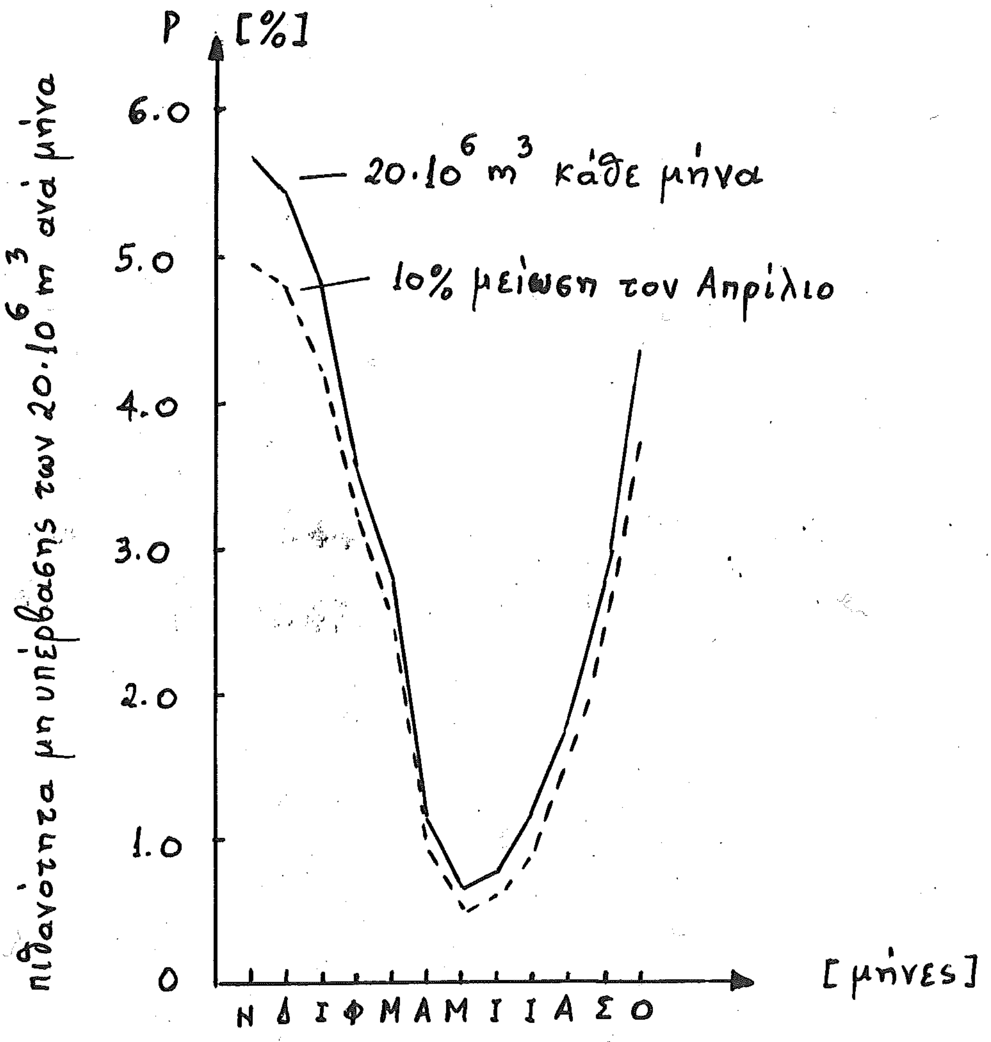
- Έκταση λεκάνης απορροής του ταμιευτήρα : 604 km^2



- $240 \times 10^6 \ m^3 \Rightarrow 1\%$
- $120 \times 10^6 \ m^3 \Rightarrow 11\%$
- Τιμή νερού : 150 δρχ./m^3

Σχέση μεταξύ κανόνα εκροής και πιθανότητας μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής

- Χωρητικότητα ταμιευτήρα $K = 200 \cdot 10^6 \, m^3$
- Απαιτούμενη εκροή: $20 \cdot 10^6 \, m^3$ ανά μήνα



Αποτελέσματα ανάλυσης ευαισθησίας

Μήνας με 10% μείωση της απαιτούμενης εκροής	Πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής [%]	Ζημία [10^6 δρχ.]	
Ιανουάριος	2.54	177	
Φεβρουάριος	2.55	180	
Μάρτιος	2.56	181.5	⇒ μέγιστη ζημία
Απρίλιος	2.54	180	
Μάϊος	2.48	175.5	
Ιούνιος	2.48	175.5	
Ιούλιος	2.44	172.5	
Αύγουστος	2.44	171	⇒ ελάχιστη ζημία
Σεπτέμβριος	2.47	172.5	
Οκτώβριος	2.54	175.5	
Νοέμβριος	2.52	175.5	
Δεκέμβριος	2.53	177	
Σε κανένα μήνα	2.92	210	

Σχέση μεταξύ χωρητικότητας του ταμιευτήρα και κανόνα εκροής (σταθερή πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής)

- Έκταση λεκάνης απορροής του ταμιευτήρα : 955 km^2
- Ετήσια πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής : 5%
- $p(A_i)$: πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής το μήνα i

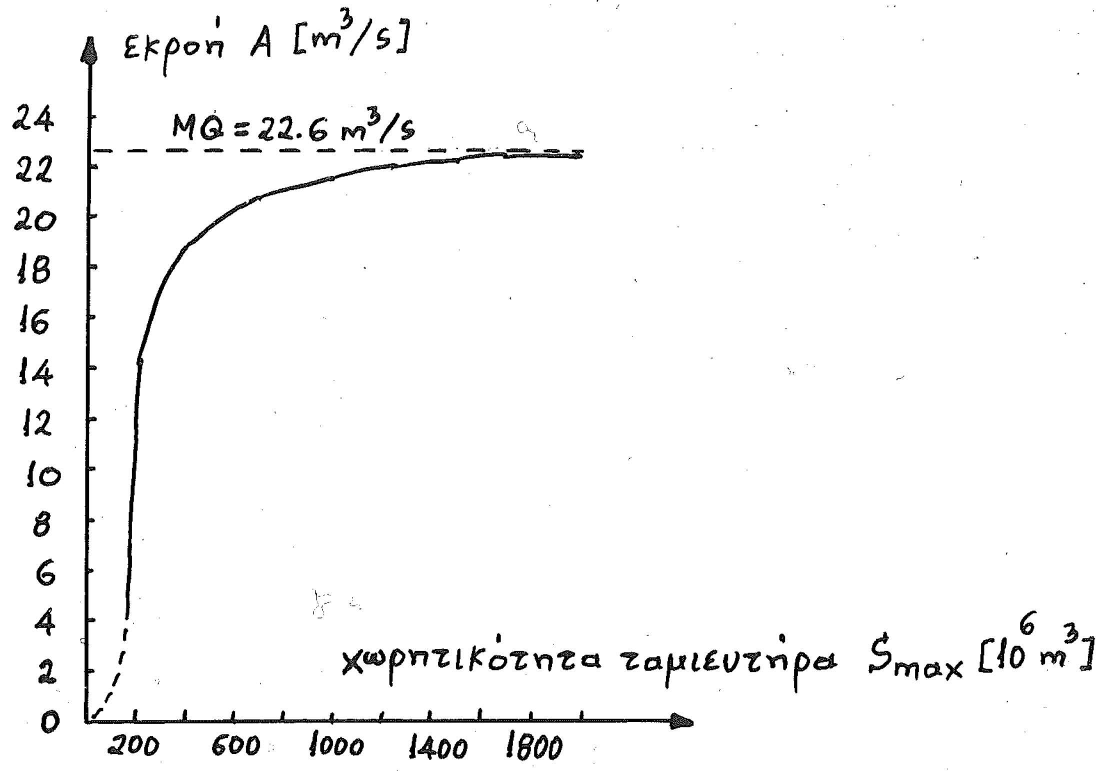
  $1 - p(A_i)$: πιθανότητα υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής το μήνα i

$\prod_{i=1}^{12} [1 - p(A_i)]$ ⇒ γινόμενο

πιθανότητα υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής σ' ένα έτος

$1 - \prod_{i=1}^{12} [1 - p(A_i)]$: πιθανότητα μη υπέρβασης της απαιτούμενης εκροής σ' ένα έτος (τουλάχιστο μια φορά)

Καμπύλη απόδοσης του ταμιευτήρα:



MQ : μέση εισροή

- Για $A = MQ = 22.6\ m^3/s$ (πλήρης εξισορρόπηση) $\Rightarrow S_{max} = 2 \cdot 10^9\ m^3$
- Για $A = 21.6\ m^3/s \Rightarrow S_{max} = 1 \cdot 10^9\ m^3$
- Αύξηση της χωρητικότητας από $160 \cdot 10^6\ m^3$ σε $200 \cdot 10^6\ m^3$ (κατά 25%) τριπλασιάζει την εκροή, από $4\ m^3/s$ σε $12\ m^3/s$

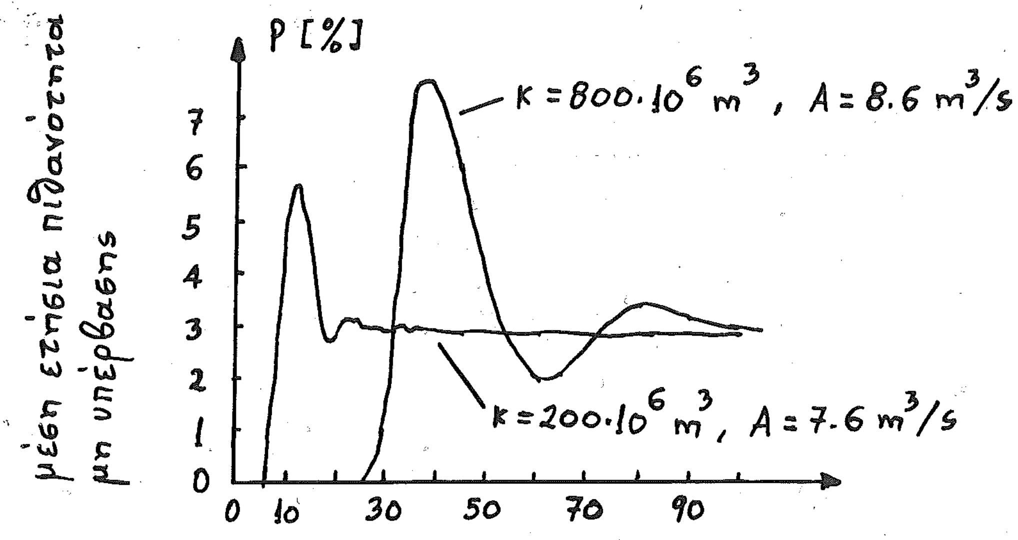
Σχετική καμπύλη απόδοσης του ταμιευτήρα:

$1 - \dfrac{A}{MQ} \Rightarrow$ άξονας τεταγμένων $\left(\dfrac{A}{MQ}\right.$: βαθμός εξισορρόπησης)

$\dfrac{S_{max}}{\Sigma I} \Rightarrow$ άξονας τετμημένων (βαθμός ανάπτυξης)

ΣI : άθροισμα μηνιαίων όγκων εισροής για ένα έτος

Επίδραση της διακριτοποίησης



- $K = 800 \cdot 10^6 \, m^3 \Rightarrow$ σταθεροποίηση στα 90 τμήματα
- $K = 200 \cdot 10^6 \, m^3 \Rightarrow$ σταθεροποίηση στα 30 τμήματα
- $K = 800 \cdot 10^6 \, m^3 \Rightarrow \Delta S = \dfrac{800 \cdot 10^6}{6} = 133 \cdot 10^6 \, m^3$ (6 τμήματα)

$$\Delta S = \frac{800 \cdot 10^6}{100} = 8 \cdot 10^6 \, m^3 \quad \text{(100 τμήματα)}$$

μέσος μηνιαίος όγκος εισροής $= 20 \cdot 10^6 \, m^3$

$\Delta S = 133 \cdot 10^6 \, m^3 \Rightarrow$ λανθασμένα αποτελέσματα

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

- "Operations Research" (επιχειρησιακή έρευνα)
- Βέλτιστος σχεδιασμός
- Συνάρτηση στόχου
- Περιορισμοί (constraints)
- Βέλτιστη απόφαση: μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου
- Βέλτιστο : μέγιστο ή ελάχιστο

Παράδειγμα

- Ταμιευτήρας για υδροδότηση και παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
- Υδροδότηση : 150 δρχ./m^3, x_1 m^3
- Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας : 75 δρχ./m^3, x_2 m^3
- Συνάρτηση στόχου (Z) ⇒ συνάρτηση κέρδους

  $Z = 150x_1 + 75x_2 \Rightarrow \max$

- x_1, x_2 : μεταβλητές απόφασης
- $Z \Rightarrow \max$, όταν $x_1 \to \infty$ και $x_2 \to \infty$ (μη ρεαλιστικό)
- Περιορισμός $x_1 + x_2 \leq S$

  S : χωρητικότητα ταμιευτήρα

- $Z \Rightarrow max$, όταν $x_1 = S$ και $x_2 = 0$ (μη ρεαλιστικό)

- Περιορισμός: $x_2 \geqslant A$

  A: όγκος νερού που πρέπει να αποδοθεί μέσω του εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας πίσω στον ποταμό, κατάντη του ταμιευτήρα

- Βέλτιστη λύση: $x_2 = A$ $x_1 = S - A$

- Εξίσωση συνέχειας:

$$S_{i+1} = S_i + I_i - x_{1,i} - x_{2,i}$$

S_i : αποθηκευμένος όγκος νερού το μήνα i

I_i : εισρέων όγκος νερού το μήνα i

$x_{1,i}$: εκρέων όγκος νερού για υδροδότηση το μήνα i

$x_{2,i}$: εκρέων όγκος νερού για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας το μήνα i

S_{i+1} : αποθηκευμένος όγκος νερού το μήνα i+1

S_i : κατάσταση του ταμιευτήρα το μήνα i

S_{i+1} : 〃 〃 〃 〃 〃 $i+1$

Εξίσωση συνέχειας ⇒ Εξίσωση μετασχηματισμού κατάστασης

Μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → μέθοδοι προσομοίωσης

Αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης
- → γραμμικός προγραμματισμός
- → δυναμικός προγραμματισμός

Γραμμικός προγραμματισμός

Συνάρτηση στόχου
Περιορισμοί
$\Big\}$ γραμμικές εξισώσεις

- Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

c_i : σταθεροί συντελεστές

x_i : μεταβλητές απόφασης

- Περιορισμοί: $\sum_{i=1}^{n} a_{ki} x_i \leq b_k \qquad k = 1, 2, \ldots, m$

m ανισότητες, n άγνωστοι

Συνθήκες προσήμου: $x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

(θετικές εισροές, αποθηκεύσεις κ.λπ.)

- Βέλτιστη τιμή (μέγιστη ή ελάχιστη) της συνάρτησης στόχου Z
- Αλγόριθμος Simplex
- Σύστημα ανισοτήτων ⇒ σύστημα γραμμικών εξισώσεων

- Εισαγωγή επιπλέον αγνώστων μεταβλητών x_{n+k}

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + x_{n+k} = b_k & k=1,2,3,\dots,m \\ x_{n+k} \geq 0 & k=1,2,3,\dots,m \end{array}\right\} \text{Περιορισμοί}$$

(συνθήκες προσήμου)

- <u>Με μορφή πινάκων:</u>

Συνάρτηση στόχου: $Z = cx$

Περιορισμοί: $Ax = b, \quad x \geq 0$

x : διάνυσμα γραμμής με n+m στοιχεία

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$

c : διάνυσμα γραμμής με n+m στοιχεία

$c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{n+m}$

$c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{n+m} = 0$

b : διάνυσμα στήλης με m στοιχεία

$b_1, b_2, \dots, b_m$

A : πίνακας με m γραμμές και n+m στήλες

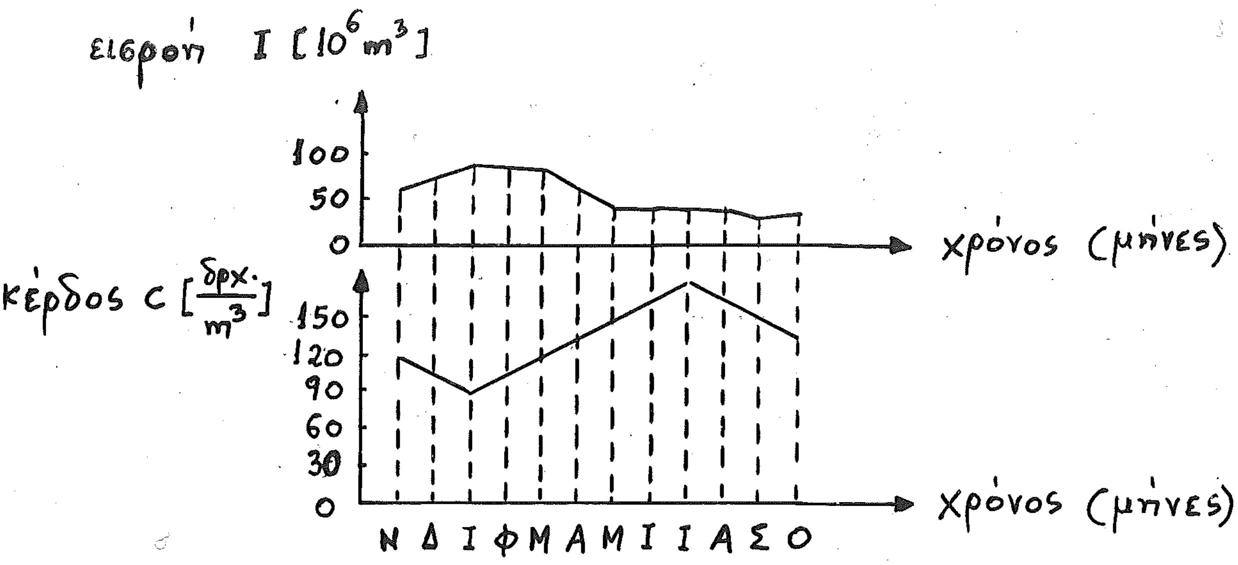
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = b \Rightarrow m$ γραμμικές εξισώσεις με $n+m$ αγνώστους
- Εύρεση της λύσης x που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση στόχου Z (αλγόριθμος Simplex)

<u>Παράδειγμα γραμμικού προγραμματισμού</u>

- Ταμιευτήρας απλής σκοπιμότητας
- Δίδονται:
  - το υδρογράφημα εισροών σε μέση μηνιαία βάση
  - η καμπύλη του μηνιαίου κέρδους σε δρχ./m^3 νερού
  - χωρητικότητα ταμιευτήρα $S_{max} = 200 \cdot 10^6\ m^3$
  - αποθηκευμένος όγκος νερού στην αρχή του έτους $S_0 = 100 \cdot 10^6\ m^3$

- Ζητούνται τα υδρογραφήματα των μηνιαίων εκροών και αποθηκεύσεων, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό ετήσιο κέρδος.



Μαθηματική διατύπωση

x_i : εκροή νερού από τον ταμιευτήρα κατά το μήνα i (μεταβλητή απόφασης)

c_i : τιμή του νερού ανά m^3 κατά το μήνα i (άρδευση)

Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_{i=1}^{12} c_i x_i = \max$

Περιορισμοί:

α. Θετικές αποθηκεύσεις στον ταμιευτήρα

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} I_i + S_o \qquad n=1,2,----,11 \qquad (11 \text{ συνθήκες})$$

β. Ετήσιο ισοζύγιο

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = \sum_{i=1}^{12} I_i \qquad (1 \text{ συνθήκη})$$

γ. Μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα

$$S_{max} \geqslant S_o + \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad n = 1,2,----,11 \qquad (11 \text{ συνθήκες})$$

δ. Ελάχιστη παροχή νερού στον ποταμό κατάντη του ταμιευτήρα: $20 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \geqslant 20 \cdot 10^6 \; m^3 \qquad i = 1,2,----,12 \qquad (12 \text{ συνθήκες})$$

ε. Μέγιστη επιτρεπόμενη εκροή: $140 \cdot 10^6$ m^3 ανά μήνα

$$x_i \leq 140 \cdot 10^6 \, m^3 \qquad i = 1,2,----,12 \qquad (12 \text{ συνθήκες})$$

46 ανισότητες και μία εξίσωση $\Rightarrow m = 47$

Λύση

Συνάρτηση στόχου

$$Z = 120x_1 + 105x_2 + 90x_3 + 105x_4 + 120x_5 + 135x_6 + 150x_7 + 165x_8 +$$
$$+ 180x_9 + 165x_{10} + 150x_{11} + 135x_{12}$$

x_1 : εκροή το Νοέμβριο

x_2 : εκροή το Δεκέμβριο

κ.λπ.

Περιορισμοί

α. $x_1 \leq I_1 + S_o \qquad (n=1)$

$$x_1 + x_{13} = I_1 + S_o = (58.6 + 100) \cdot 10^6 = 158.6 \cdot 10^6$$

για $n=2$

$$x_1+x_2+x_{14} = I_1+I_2+S_o = (58.6+72.2+100)\cdot 10^6 = 230.8\times 10^6$$

$\vdots$

για $n=11$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i + x_{23} = \sum_{i=1}^{11} I_i + S_o =$$

$$= (58.6+72.2+83.2+81.9+83.5+58.6+39.3+40.8+38.7+35.3+30.9)\cdot 10^6 +$$

$$+ 100\times 10^6 = 723\times 10^6 \ m^3$$

β. $\sum_{i=1}^{12} x_i = 655.7\times 10^6$

γ. για $n=1$

$$S_{max} \geqslant S_o + I_1 - x_1 \Rightarrow 200\times 10^6 \geqslant (100+58.6)\cdot 10^6 - x_1$$

$$-x_1 + x_{24} = (200-158.6)\cdot 10^6 = 41.4\times 10^6 \ m^3$$

για $n=2$

$$-x_1 - x_2 + x_{25} = -30.8$$

δ. για $i=1$ $\quad x_1 \geqslant 20\times 10^6 \ m^3 \Rightarrow x_1 = 20\times 10^6 + x_{35}$

$$x_1 - x_{35} = 20\times 10^6$$

για $i=2$ $\quad x_2 - x_{36} = 20\times 10^6 \ m^3$

ε. ανάλογοι συλλογισμοί

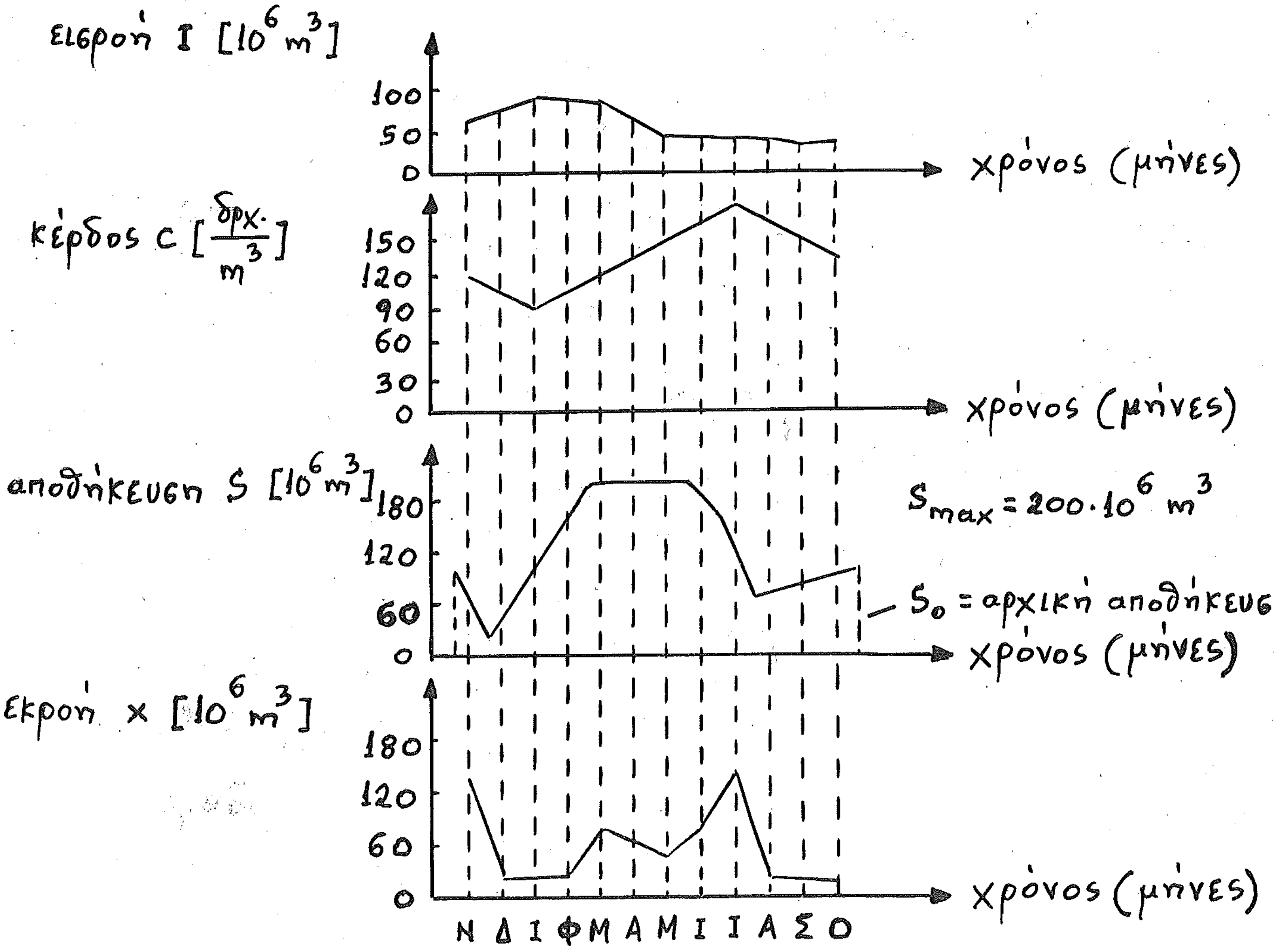
- Περιορισμοί : 47 εξισώσεις $(m=47)$
- Αριθμός αγνώστων : κατ' αρχήν 12 $(x_1, x_2, ---, x_{12})$ $(n=12)$

  εν γένει $n+m$

  τελικά $n+m-1$ (μια εξίσωση)

Αποτελέσματα

- Αριστερά μέλη των εξισώσεων περιορισμών ⇒ πίνακας A
- Δεξιά " " " " ⇒ διάνυσμα b
- Συντελεστές της συνάρτησης στόχου ⇒ διάνυσμα c
- $Z_{max} = 96.3 \times 10^9$ δρχ. ανά έτος (κέρδος)



Δυναμικός προγραμματισμός

- Ένα σύνθετο πρόβλημα με πολλές μεταβλητές αναλύεται σε πολλά επιμέρους προβλήματα με λίγες μεταβλητές (decomposition)
- Διαδοχική επίλυση των επιμέρους προβλημάτων
- Αρχή του βέλτιστου κατά Bellman
- Γραμμικότητα (ή μη γραμμικότητα) της συνάρτησης στόχου και των περιορισμών : άνευ σημασίας

Εισαγωγικό παράδειγμα

- Ταμιευτήρας πολλαπλής σκοπιμότητας

- Αποθηκευμένος όγκος νερού S
  - → όγκος A_1 για άρδευση
  - → όγκος A_2 για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
  - → όγκος A_3 για ύδροδότηση μιας πόλης

- Μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση του νερού

Συνάρτηση στόχου

- Άρδευση $Z_1 = c_1\sqrt{A_1}$
- Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας $Z_2 = c_2 A_2$
- Υδροδότηση $Z_3 = c_3\sqrt{A_3}$

$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = c_1\sqrt{A_1} + c_2 A_2 + c_3\sqrt{A_3}$ ⇒ μη γραμμική

A_1, A_2, A_3 : μεταβλητές απόφασης

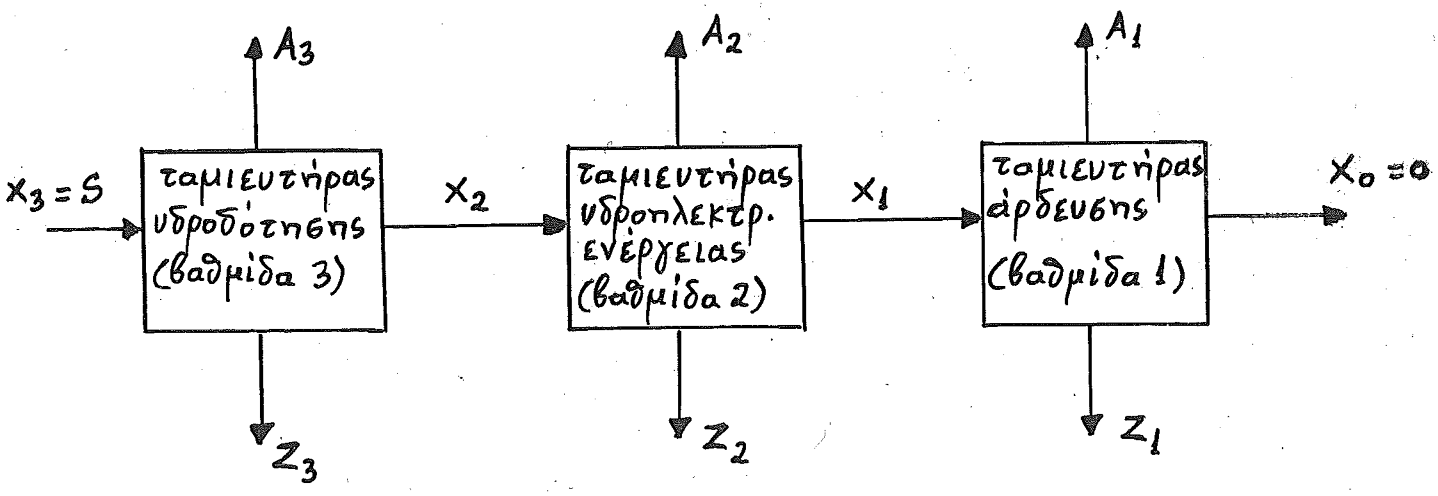
- Προσδιορισμός των A_1, A_2, A_3 έτσι ώστε $Z \Rightarrow max$

Περιορισμοί

$A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 \geq 0$

$A_1 + A_2 + A_3 = S$

Αποσύνθεση (decomposition)



x_1, x_2, x_3 : μεταβλητές κατάστασης

Μετασχηματισμός κατάστασης :

$$x_n - A_n = x_{n-1} = t_n(x_n, A_n)$$

Αρχή του βέλτιστου κατά Bellman

Πρώτη βαθμίδα

$z_1 = f_1(A_1, x_1) = c_1\sqrt{A_1}$, $A_1 \le x_1$

$f_1^*(x_1) = \max f_1(A_1, x_1) = \max\{c_1\sqrt{A_1}\}$, $A_1 \le x_1$

ή $f_1^*(x_1) = c_1\sqrt{x_1}$

$A_1^* = x_1 \quad 0 \le x_1 \le S$

A_1^* : απόφαση που παρέχει το μέγιστο $f_1^*(x_1)$

Δεύτερη βαθμίδα

$f_2(A_1, A_2, x_1, x_2) = c_2 A_2 + c_1\sqrt{A_1}$

$f_2^*(x_1, x_2) = \max\{f_2(A_1, A_2, x_1, x_2)\}$, $A_1 \le x_1$, $A_2 \le x_2$

Μετάβαση από τη βαθμίδα 1 στη βαθμίδα 2:

$t_2(A_2, x_2) = x_2 - A_2 = x_1$

$f_2^*(x_1, x_2) = \max\{c_2 A_2 + \max[c_1\sqrt{A_1}]\}$, $A_2 \le x_2$, $A_1 \le t_2(A_2, x_2)$

$f_2^*(x_2) = \max\{c_2 A_2 + f_1^*[t_2(A_2, x_2)]\}$, $A_2 \le x_2$

A_2^* : τιμή του A_2 που παρέχει το μέγιστο $f_2^*(x_2)$

Γενίκευση για τη βαθμίδα n :

$$\boxed{f_n^*(x_n) = \max\{Z_n + f_{n-1}^*[t_n(A_n, x_n)]\}, \quad A_n \leq x_n} \qquad \text{(Bellman)}$$

A_n^* : τιμή του A_n που παρέχει το βέλτιστο $f_n^*(x_n)$

Πρώτη βαθμίδα : άρδευση, $n=1$

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_1(A_1, x_1) = x_1 - A_1 = x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = A_1$$

- Μερική συνάρτηση στόχου:

$$z_1 = f_1(x_1, A_1) = c_1\sqrt{A_1}$$

- Μέγιστο: $f_1^*(x_1) = c_1\sqrt{x_1}$

- Βέλτιστη απόφαση : $A_1^* = x_1$

Δεύτερη βαθμίδα: άρδευση και υδροηλεκτρική ενέργεια, $n=2$

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_2(x_2, A_2) = x_2 - A_2 = x_1$$

- Μερική συνάρτηση στόχου:

$$f_2(x_2, A_2) = z_2 + f_1^*[t_2(x_2, A_2)]$$

- Μέγιστο: $f_2^*(x_2) = \max\{c_2 A_2 + f_1^*(x_2 - A_2)\}, \quad A_2 \leq x_2$

$$f_1^*(x_2-A_2)=c_1\sqrt{x_2-A_2}$$

$$f_2^*(x_2)=\max\{c_2A_2+c_1\sqrt{x_2-A_2}\}\ ,\quad A_2\leq x_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial A_2}=0 \Rightarrow \quad c_2-\frac{c_1}{2\sqrt{x_2-A_2}}=0 \quad\Rightarrow\quad A_2^*=x_2-\frac{c_1^2}{4c_2^2}$$

$$f_2^*(x_2)=c_2x_2+\frac{c_1^2}{4c_2}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial A_2^2}=-\frac{c_1}{4\sqrt{(x_2-A_2)^3}}<0 \quad\Rightarrow\quad f_2^*(x_2) \text{ είναι μέγιστο (και όχι ελάχιστο)}$$

<u>Τρίτη βαθμίδα : άρδευση + υδροηλεκτρική ενέργεια + υδροδότηση, n=3</u>

- Μετασχηματισμός κατάστασης:

$$t_3(x_3,A_3)=x_3-A_3=x_2 \Rightarrow x_2=S-A_3 \qquad (x_3=S)$$

- Συνάρτηση στόχου:

$$f_3(x_3,A_3)=Z_3+f_2^*[t_3(x_3,A_3)]$$

- Μέγιστο:

$$f_3^*(x_3)=\max\left\{c_3\sqrt{A_3}+c_2(S-A_3)+\frac{c_1^2}{4c_2}\right\}\ ,\quad A_3\leq S$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial A_3}=\frac{c_3}{2\sqrt{A_3}}-c_2=0 \quad\Rightarrow\quad A_3^*=\frac{c_3^2}{4c_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial A_3^2}=-\frac{c_3}{4\sqrt{A_3^3}}<0$$

$$A_2^* = x_2 - \frac{c_1^2}{4c_2^2} = S - A_3 - \frac{c_1^2}{4c_2^2} = S - \frac{c_3^2 + c_1^2}{4c_2^2}$$

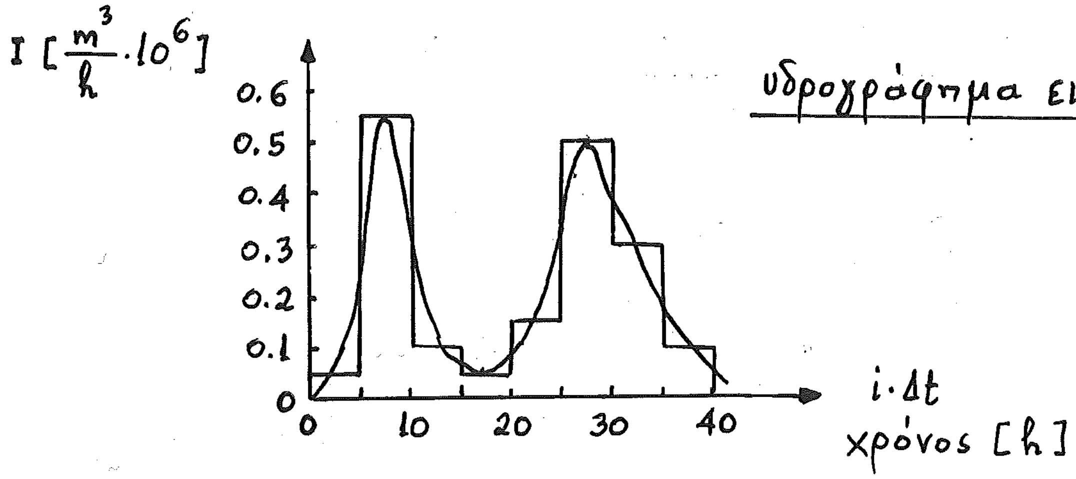
- Εξίσωση περιορισμού: $A_1^* = S - A_2^* - A_3^* = \dfrac{c_1^2}{4c_2^2}$

- Μέγιστη τιμή της συνάρτησης στόχου:

$$Z = c_1\sqrt{A_1^*} + c_2 A_2^* + c_3\sqrt{A_3^*}$$

$$Z = c_2 S + \frac{c_1^2 + c_3^2}{4c_2}$$

Εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σ' έναν ταμιευτήρα ανάσχεσης πλημμυρών



υδρογράφημα εισροής

- Χωρητικότητα ταμιευτήρα: $K = 1.5\times 10^6\ m^3$
- Να ελαχιστοποιηθούν οι προκαλούμενες ζημιές

Συνάρτηση στόχου (μη χρηματική)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} A_i^2 = min \qquad (i : \text{χρονικό βήμα})$$

$$A_i = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t} Q(t)\,dt \qquad (A_i : \text{μεταβλητή απόφασης})$$

$Q(t)$: παροχή εκροής

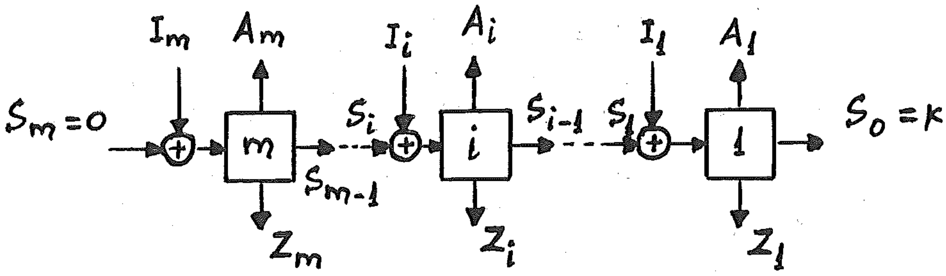
A_i : όγκος εκροής στο χρονικό διάστημα μεταξύ t_i και $t_i+\Delta t$

Περιορισμοί

- $S_i \leq k$
- $S_i \geq 0 \qquad A_i \geq 0$
- $S_i + I_i \geq A_i \geq \begin{cases} S_i + I_i - k & \text{(μη υπερχείλιση του ταμιευτήρα)} \\ 0, & \text{όταν } S_i + I_i - k \leq 0 \end{cases}$
- $m = 8$ χρονικά διαστήματα $\Rightarrow$ 32 περιορισμοί

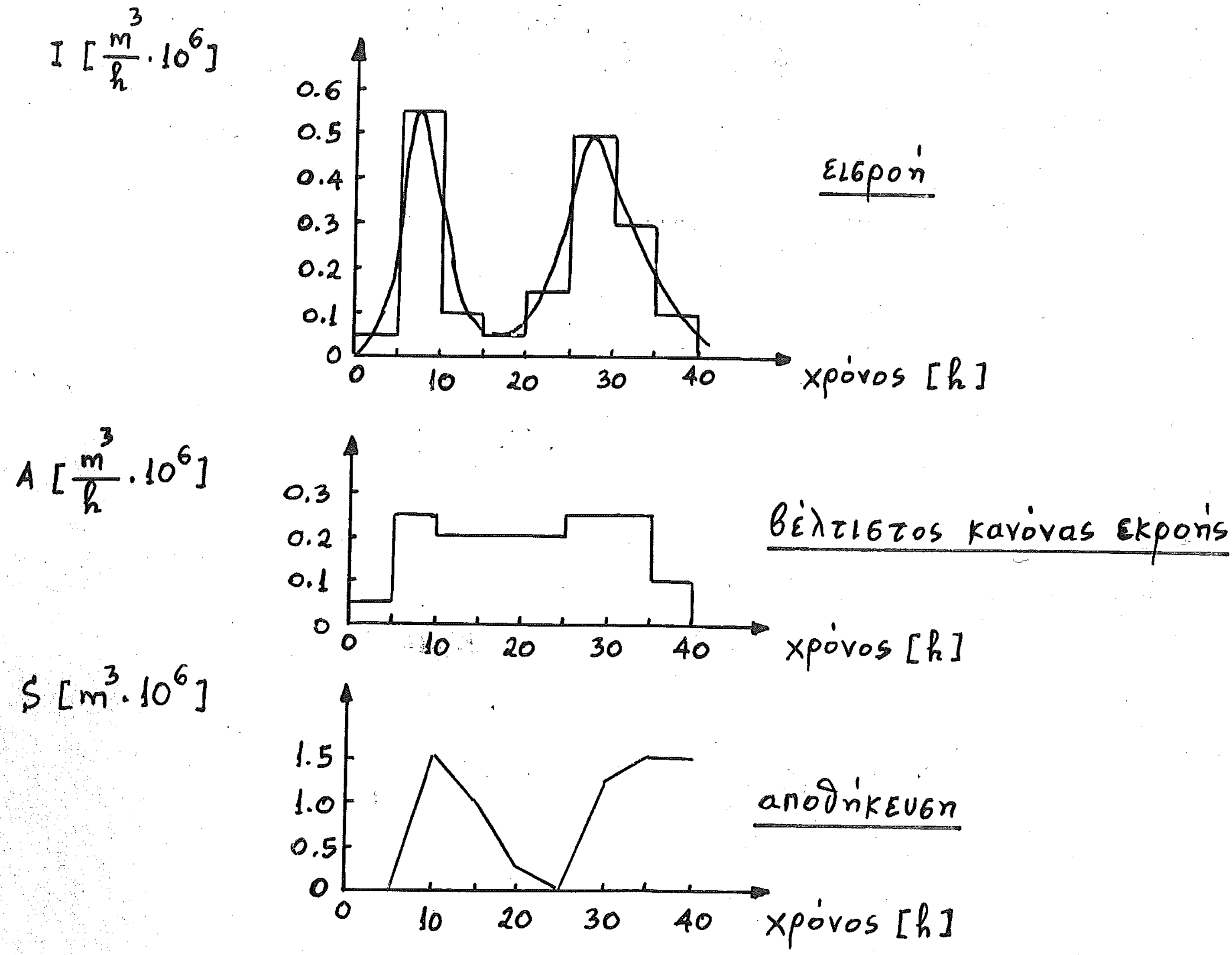
Μετασχηματισμός κατάστασης

- Αρχική κατάσταση $(i=m)$: $S_m = 0$ (κενός ταμιευτήρας)
- Τελική κατάσταση $(i=0)$: $S_0 = k$ (πλήρης ταμιευτήρας)
- Εξίσωση συνέχειας : $t_i(S_i, A_i) = S_{i-1} = S_i + I_i - A_i$

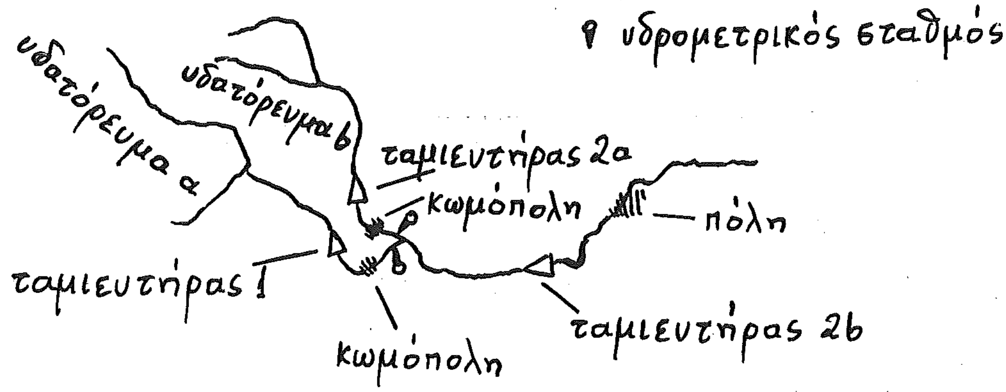


Εξίσωση Bellman

$$f_i^*(S_i) = \min \{ A_i^2 + f_{i-1}^* [t_i(S_i, A_i)] \}$$


I [m³/h · 10⁶]
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
10
20
30
40
εισροή
χρόνος [h]
A [m³/h · 10⁶]
0.3
0.2
0.1
βέλτιστος κανόνας εκροής
χρόνος [h]
S [m³ · 10⁶]
1.5
1.0
0.5
αποθήκευση
χρόνος [h]

Εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού σε μια ομάδα ταμιευτήρων ανάσχεσης πλημμυρών



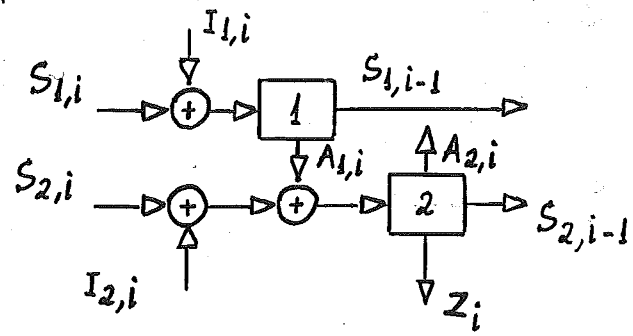
- Για ποια διάταξη ταμιευτήρων, για ένα δεδομένο πλημμυρικό κύμα, επιτυγχάνεται η μέγιστη προστασία μιας πόλης από πλημμύρες;
- Συνολική χωρητικότητα ταμιευτήρων : 10^6 m^3
- Δύο εναλλακτικές λύσεις:

  Ταμιευτήρες 1 και 2a (εν παραλλήλω)

  Ταμιευτήρες 1 και 2b (εν σειρά)

Δύο ταμιευτήρες εν σειρά

Βαθμίδα i



Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_i Z_i = \sum_i A_{2,i}^2 = \min$

Εξίσωση Bellman για τη βαθμίδα i

$$f_i^*(S_{1,i}, S_{2,i}) = \min \{ A_{2,i}^2 + f_{i-1}^* [t_{1,i}(A_{1,i}, S_{1,i}), t_{2,i}(A_{2,i}, S_{2,i})] \}$$

Μετασχηματισμός κατάστασης

$$t_{1,i}(S_{1,i}, A_{1,i}) = S_{1,i-1} = S_{1,i} + I_{1,i} - A_{1,i}$$

$$t_{2,i}(S_{2,i}, A_{2,i}) = S_{2,i-1} = S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - A_{2,i}$$

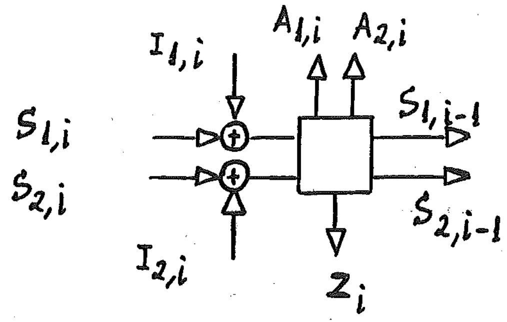
Περιορισμοί

$0 \leq S_{1,i} \leq K_1$ $\qquad$ $0 \leq S_{2,i} \leq K_2$

$$S_{1,i} + I_{1,i} \geq A_{1,i} \geq \begin{matrix} S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \\ 0, \text{ όταν } S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \leq 0 \end{matrix}$$

$$S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} \geq A_{2,i} \geq \begin{matrix} S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - K_2 \\ 0, \text{ όταν } S_{2,i} + I_{2,i} + A_{1,i} - K_2 \leq 0 \end{matrix}$$

Δύο ταμιευτήρες εν παραλλήλω



Συνάρτηση στόχου: $Z = \sum_i Z_i = \sum_i (A_{1,i} + A_{2,i})^2 = \min$

Εξίσωση Bellman για τη βαθμίδα i

$$f_i^*(S_{1,i}, S_{2,i}) = \min\{(A_{2,i} + A_{1,i})^2 + f_{i-1}^*[t_{1,i}(A_{1,i}, S_{1,i}), t_{2,i}(A_{2,i}, S_{2,i})]\}$$

Μετασχηματισμός κατάστασης

$$t_{1,i}(S_{1,i}, A_{1,i}) = S_{1,i-1} = S_{1,i} + I_{1,i} - A_{1,i}$$

$$t_{2,i}(S_{2,i}, A_{2,i}) = S_{2,i-1} = S_{2,i} + I_{2,i} - A_{2,i}$$

Περιορισμοί

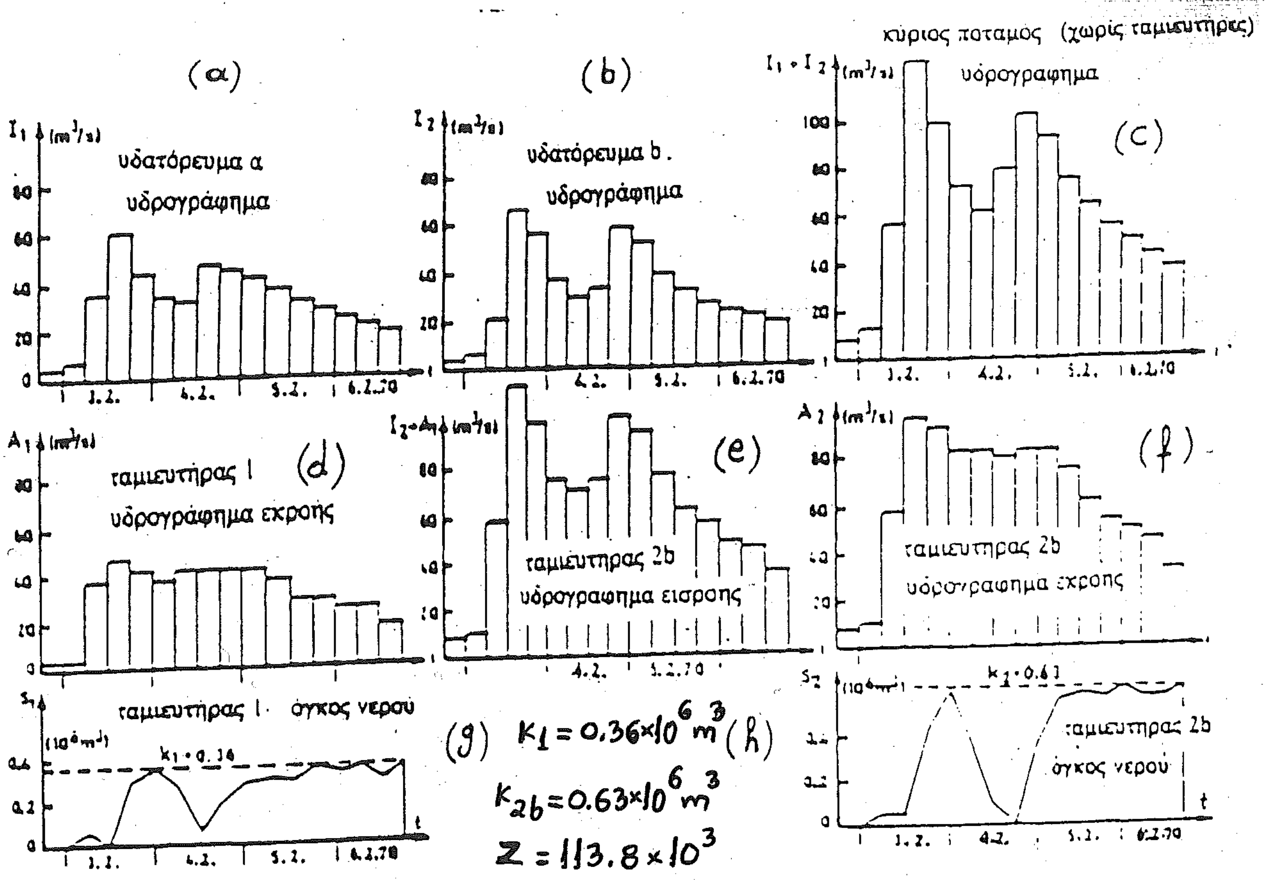
$0 \leq S_{1,i} \leq K_1$ $\qquad$ $0 \leq S_{2,i} \leq K_2$

$S_{1,i} + I_{1,i} \geq A_{1,i} \geq$ $S_{1,i} + I_{1,i} - K_1$

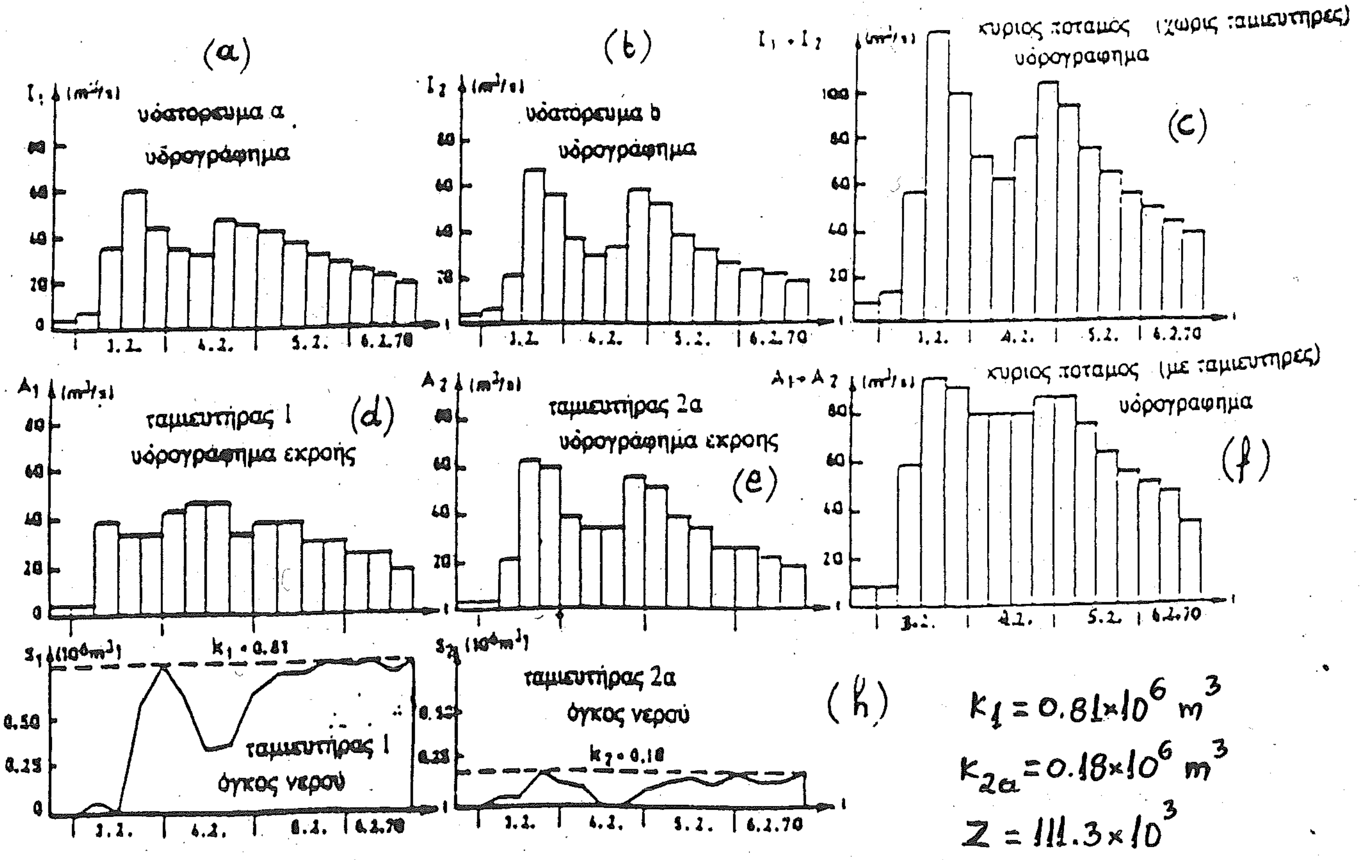
0, όταν $S_{1,i} + I_{1,i} - K_1 \leq 0$

$S_{2,i} + I_{2,i} \geq A_{2,i} \geq$ $S_{2,i} + I_{2,i} - K_2$

0, όταν $S_{2,i} + I_{2,i} - K_2 \leq 0$



Βέλτιστος κανόνας εκροής για δύο ταμιευτήρες εν σειρά



Βέλτιστος κανόνας εκροής για δύο ταμιευτήρες εν παραλλήλω

Μέθοδοι προσομοίωσης

- Επίλυση σύνθετων προβλημάτων διαχείρισης ταμιευτήρων
- Δεν ενδείκνυνται οι αναλυτικές μέθοδοι βελτιστοποίησης για σύνθετα προβλήματα διαχείρισης υδατικών πόρων:
  - υπερβολικές απλοποιήσεις, οπότε η προκύπτουσα λύση δεν ανταποκρίνεται στο πραγματικό πρόβλημα
  - πολύπλοκο αναλυτικό μοντέλο (δυσεπίλυτα μαθηματικά προβλήματα ή προβλήματα προγραμματισμού Η/Υ)

- Προσομοίωση (simulation):

  "Απομίμηση" συστημάτων του πραγματικού κόσμου και διαδικασιών στο μοντέλο.

- Φυσικά μοντέλα (πειραματικά, εργαστηριακά): δευτερεύουσας σημασίας για προβλήματα διαχείρισης υδατικών πόρων.
- Μαθηματικά μοντέλα: πρωτεύουσας σημασίας
  - μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων
  - ταχεία επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων με τη βοήθεια του Η/Υ
  - μέθοδοι παραγωγής τεχνητών δεδομένων βάσει ήδη διαθέσιμων (τεχνικές Monte-Carlo).

- Εφαρμογή των μεθόδων προσομοίωσης:
  - ανάλυση του συστήματος (σημαντικές παράμετροι και διαδικασίες για τον τεθέντα σκοπό)
  - ανάπτυξη του μοντέλου προσομοίωσης (ενσωμάτωση στο μοντέλο των καθοριστικών παραμέτρων και των διαδικασιών, εύρεση και επεξεργασία των δεδομένων εισόδου)
  - διαδικασία επίλυσης (εύρεση των τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού και λειτουργίας)

- Επανειλημμένη εφαρμογή του μοντέλου προσομοίωσης (διαπίστωση εάν οι παράμετροι του συστήματος και οι κανόνες λειτουργίας ικανοποιούν τον τεθέντα σκοπό)

Ταμιευτήρας υδροδότησης με τεχνητώς παραγόμενα δεδομένα εισόδου

Δίδονται:

- το υδρογράφημα εισροής (μηνιαίες τιμές) για 45 έτη
- ο κανόνας λειτουργίας του ταμιευτήρα:
  σταθερή εκροή $A = MQ = 22.6\ m^3/s$
- κριτήριο διαστασιολόγησης:
  ο ταμιευτήρας δεν πρέπει ποτέ να παραμείνει κενός σε μια χρονική περίοδο 100 ετών.

Ζητείται η αναγκαία χωρητικότητα του ταμιευτήρα (K)

K = range = άθροισμα μέγιστου περισσεύματος και μέγιστου ελλείμματος νερού

$K = 785 \cdot 10^6\ m^3$ για ένα υδρογράφημα εισροής διάρκειας 20 ετών
$K = 1715 \cdot 10^6\ m^3$ " " " " " 45 "

- Εύρεση μιας μέσης τιμής του K για πολλά υδρογραφήματα εισροής διάρκειας 100 ετών

- Δημιουργία τεχνητών υδρογραφημάτων διάρκειας 100 ετών

Μοντέλο Fiering

- Τεχνητή παραγωγή ετησίων εισροών σ' έναν ταμιευτήρα

$$\boxed{I_i = \bar{I} + \varepsilon_i}$$

I_i : ετήσια εισροή (παροχή) του έτους i

$\bar{I}$: μέση ετήσια εισροή (από μετρήσεις)

ε_i : τυχαίος όρος (ακολουθεί κάποια κατανομή πιθανοτήτων)

$$\boxed{I_i = \bar{I} + r_1 (I_{i-1} - \bar{I}) + \varepsilon_i} \Rightarrow \text{διαδικασία Markoff } 1^{ης} \text{ τάξης}$$

r_1 : πρώτος συντελεστής αυτοσυσχέτισης

$r_1 (I_{i-1} - \bar{I})$: συσχετισμένη συνιστώσα

ε_i : καθαρώς τυχαία συνιστώσα ($\bar{\varepsilon} = 0$, διασπορά s_ε^2)

$$t_i = \frac{\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}}{s_\varepsilon}$$

t_i : ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1

$$\varepsilon_i = t_i s_\varepsilon$$

$$s^2 = r_1^2 s^2 + s_\varepsilon^2 \Rightarrow s_\varepsilon = s\sqrt{1 - r_1^2}$$

s^2 : διασπορά των I_i

$$\varepsilon_i = t_i s\sqrt{1-r_1^2}$$

$$\boxed{I_i = \bar{I} + r_1 (I_{i-1} - \bar{I}) + t_i s\sqrt{1-r_1^2}}$$

- Τεχνητή παραγωγή μηνιαίων τιμών εισροής σ' έναν ταμιευτήρα

$$I_{i,j} = \bar{I}_j + r_{j,j-1}(I_{i,j-1} - \bar{I}_{j-1}) + t_{i,j}\, s_j\sqrt{1-r_{j,j-1}^2}$$

$I_{i,j}$: παροχή εισροής το μήνα j του έτους i

$\bar{I}_j$: μέση τιμή για το μήνα j

$t_{i,j}$: τυχαίος αριθμός (οδηγεί στη δημιουργία του $I_{i,j}$)

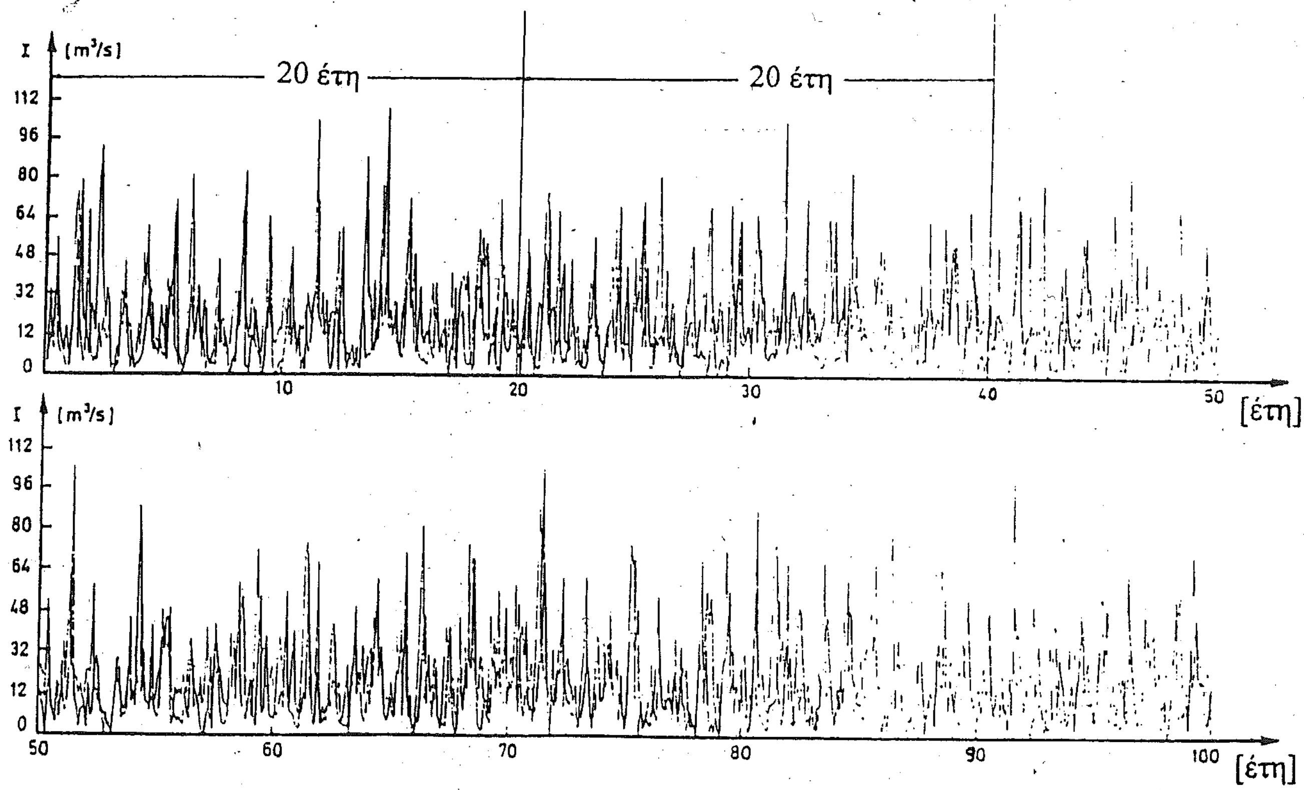
s_j : τυπική απόκλιση για το μήνα j

$r_{j,j-1}$: πρώτος συντελεστής αυτοσυσχέτισης

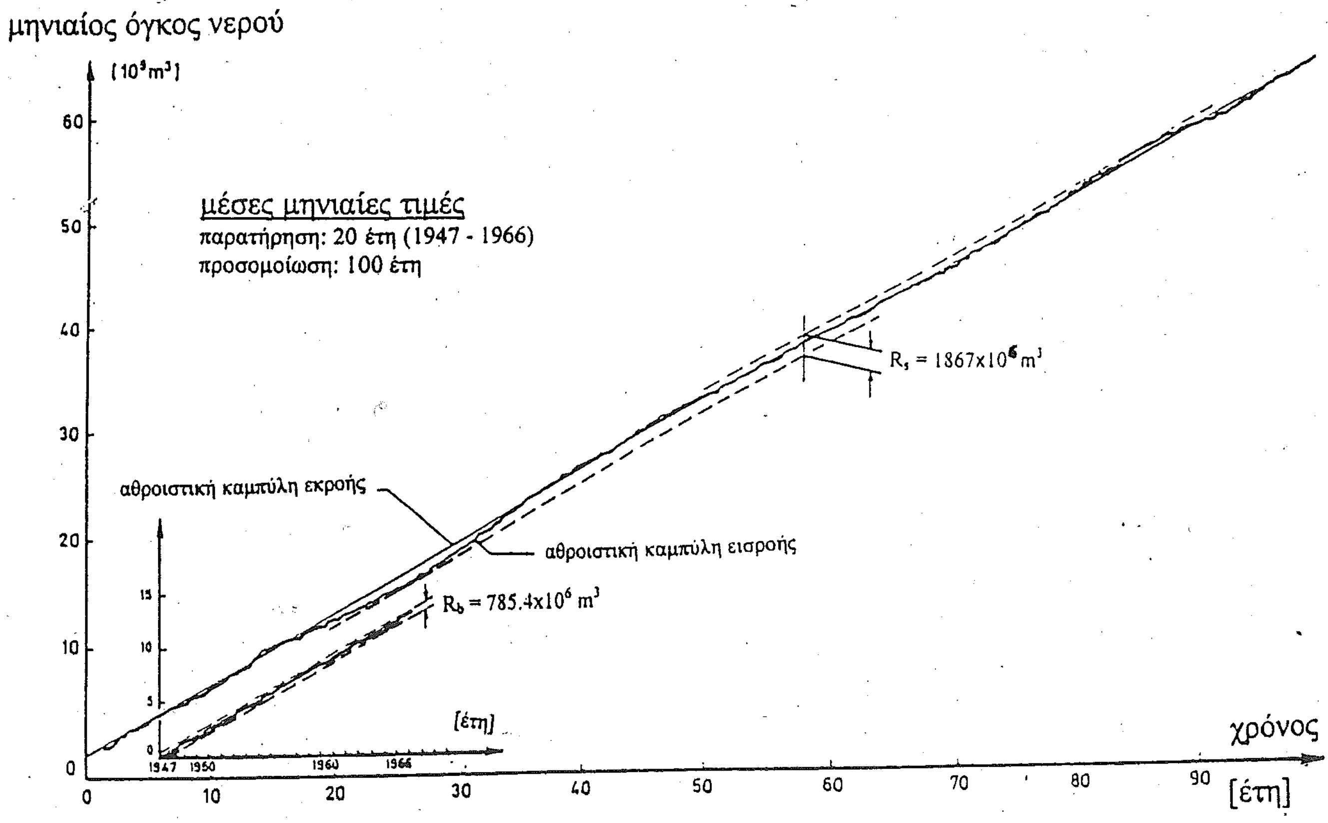
$$\boxed{I_{i,j} = \bar{I}_j + r_{j,j-1}(I_{i,j-1} - \bar{I}_{j-1})\frac{s_j}{s_{j-1}} + t_{i,j}\, s_j\sqrt{1-r_{j,j-1}^2}}$$

- Εύρεση των $t_{i,j}$ από τα υπάρχοντα δεδομένα μέτρησης
- Εύρεση της κατανομής πιθανοτήτων που προσεγγίζει επαρκώς τις τιμές $t_{i,j}$
- Προσομοίωση των τιμών $t_{i,j}$ με τη μέθοδο Monte Carlo

Υδρογράφημα εισροής διάρκειας 100 ετών (μηνιαίες τιμές) που παράχθηκε τεχνητά από μετρηθέν υδρογράφημα 20 ετών



Αθροιστική καμπύλη εισροής για τεχνητό υδρογράφημα εισροής διάρκειας 100 ετών - Αθροιστική καμπύλη εκροής



Χωρητικότητα ταμιευτήρα βάσει μετρηθέντων και προσομοιωθέντων υδρογραφημάτων

α/α	Διάρκεια μετρηθ. υδρογραφ. [έτη]	Χωρητικότητα βάσει μετρηθ. υδρογραφημάτων R_b [$10^9 m^3$]	Μέση χωρητικ. βάσει προσομοιωθ. υδρογραφημάτων 100 ετών R_s [$10^9 m^3$]	Τυπική απόκλιση χωρητικ. s [$10^9 m^3$]
1	20	0.785	2.02	0.47
2	45	1.715	2.11	0.45