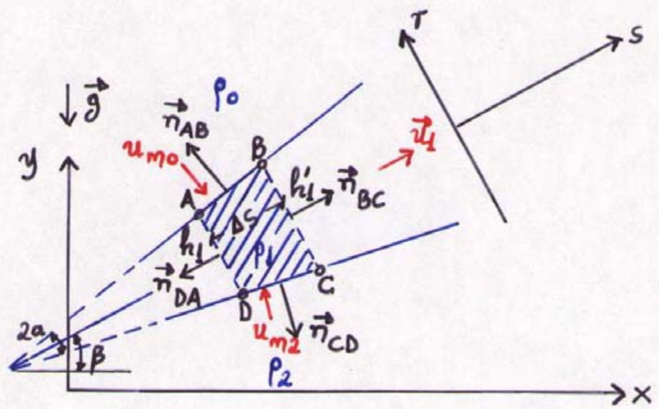
6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΡΟΩΝ ΜΕ ΑΝΑΜΙΞΗ



Νόμος διατήρησης της μάζας

- Όγκος ελέγχου ABCD (KV)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{KV} \rho_1 \, dV + \int_{KF} \rho_1 \vec{u}\,\vec{n}\, dF = 0 \qquad (KF: \text{περιβάλλουσα επιφάνεια})$$

- Μόνιμη ροή: $\int_{BC} \rho_1 u_1 \, d\tau - \int_{DA} \rho_1 u_1 \, d\tau - (u_{m0}\rho_0 + u_{m2}\rho_2)\Delta s = 0$

- Απειροστό Δs: $\int_{BC} \rho_1 u_1 \, d\tau = \int_{DA} \rho_1 u_1 \, d\tau + \left(\frac{\partial}{\partial s}\int_{h} \rho_1 u_1 \, d\tau\right)\Delta s$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\int_{-h_1/2}^{h_1/2} \rho_1 u_1 \, d\tau = u_{m0}\rho_0 + u_{m2}\rho_2}$$

Νόμος διατήρησης του όγκου:

$$\int_{KF} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dF = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{-h_1/2}^{h_1/2} u_1\, dr = u_{mo} + u_{m2}$$

Συνδυασμός των δύο νόμων:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\int_{-h_1/2}^{h_1/2} c_1 u_1\, dr = u_{mo} c_o} \qquad c_i = \frac{\rho_i - \rho_2}{\rho_2}$$

Νόμος διατήρησης της ορμής

$$\int_{KF} \rho\vec{u}\,(\vec{u}\cdot\vec{n})\, dF = -\int_{KF} p\vec{n}\, dF + \vec{K}$$

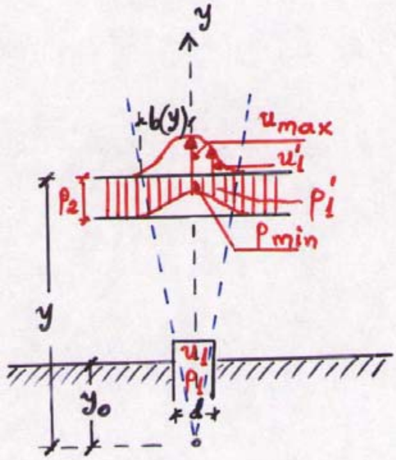
- Η τριβή ανάμεσα στα τρία στρώματα αμελείται

I_1 : ορμή μέσω των επιφανειών DA και BC ανά μονάδα χρόνου
I_2 : " " " " AB " DC " " "

$$I_1 = \left(\frac{\partial}{\partial s}\int_{-h_1/2}^{h_1/2} \rho_1 u_1^2\, dr\right)\vec{n}_{BC}\,\Delta s \qquad (\vec{n}_{DA} = -\vec{n}_{BC})$$

$$I_2 = -\Delta s\,(\rho_o u_{mo}\vec{u}_o + \rho_2 u_{m2}\vec{u}_2)$$

Κατακόρυφη φλέβα



$\rho_2 > \rho_1$

- $\rho_o = \rho_2$, $u_{mo} = u_{m2} = u_m$, άξονας s ⇒ άξονας y
- Όγκος ελέγχου: $2b(y) \times dy \times 1$ (σε απόσταση y)

Νόμος διατήρησης της μάζας:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{+b} \rho_1' u_1' \, dr = 2 u_m \rho_2$$

Εξίσωση συγκέντρωσης:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{+b} c_1' u_1' \, dr = 0} \qquad c_1' = \frac{\rho_2 - \rho_1'}{\rho_2}$$

Νόμος διατήρησης της ορμής

- Κατά την κατακόρυφη διεύθυνση y ($\vec{j}$: μοναδιαίο διάνυσμα)

- $\vec{u}_2 \cdot \vec{j} = 0 \qquad \vec{u}_0 \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow I_2 = 0$

- $\vec{n}_{BC} \cdot \vec{j} = 1$

$$I_1 = \vec{j} \int_{KF} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dF = \left(\frac{\partial}{\partial y} \int \rho_1' u_1'^2 d\tau \right) dy$$

- $$\vec{j} \int_{KF} p \vec{n} dF = \int_{-b}^{+b} p_0 d\tau - \int_{-b}^{+b} (p_0 + \rho_2 g dy) d\tau = - \left(\int_{-b}^{+b} \rho_2 g d\tau \right) dy$$

p_0: υδροστατική πίεση στο ύψος y

- $$\vec{j} \cdot \vec{K} = - \left(\int_{-b}^{+b} \rho_1' g d\tau \right) dy$$

- $$\frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{+b} \rho_1' u_1'^2 d\tau = \int_{-b}^{+b} (\rho_2 - \rho_1') g d\tau$$

- Παραδοχή: $\rho_1' \simeq \rho_2$

- $$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{+b} u_1'^2 d\tau = \int_{-b}^{+b} c_1' g d\tau}$$

Νόμος διατήρησης της μάζας

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{+b} u_1' d\tau = 2 u_m}$$

<u>Παραδοχές ομοιότητας</u>

- Όμοια "προφίλ" ταχύτητας και πυκνότητας για διάφορα ύψη y
- Για οποιοδήποτε ύψος y:

$$\frac{\rho_2-\rho_1'}{\rho_2-\rho_{min}} = \frac{c_1'}{c_{max}} = g\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$\frac{u_1'}{u_{max}} = f\left(\frac{r}{b}\right)$$

b: ήμισυ του πλάτους της θεωρούμενης διατομής

- $$f\left(\frac{r}{b}\right) = g\left(\frac{r}{b}\right) \qquad \text{(Παραδοχή)}$$

- $$\int_{-b}^{+b} c_1' u_1' \, dr = u_{max} \cdot c_{max} \cdot b \cdot a$$

$$\int_{-b}^{+b} u_1' \, dr = u_{max} \cdot b \cdot a'$$

$$\int_{-b}^{+b} c_1' \, dr = c_{max} \cdot b \cdot a'$$

$$\int_{-b}^{+b} u_1'^2 \, dr = u_{max}^2 \cdot b \cdot a$$

$$a = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{r}{b}\right) \cdot g\left(\frac{r}{b}\right) \cdot d\left(\frac{r}{b}\right) = \int_{-1}^{+1} f^2\left(\frac{r}{b}\right) d\left(\frac{r}{b}\right)$$

$$a' = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{r}{b}\right) d\left(\frac{r}{b}\right) = \int_{-1}^{+1} g\left(\frac{r}{b}\right) d\left(\frac{r}{b}\right)$$

Παραδοχή: $f\left(\frac{r}{b}\right) = g\left(\frac{r}{b}\right) = \begin{cases} 1 & \text{για } \left|\frac{r}{b}\right| \le 1 \\ 0 & \text{για } \left|\frac{r}{b}\right| > 1 \end{cases}$

$a = a' = 2$

- Διατήρηση της μάζας (συνέχεια):

$$\frac{d}{dy}\left(u_{max} \cdot b \cdot a'\right) = 2u_m$$

- Διατήρηση της μάζας και του όγκου (συγκέντρωση):

$$\frac{d}{dy}\left(u_{max} \cdot c_{max} \cdot b \cdot a\right) = 0$$

- Διατήρηση της ορμής:

$$\frac{d}{dy}\left(u_{max}^2 \cdot b \cdot a\right) = g \cdot c_{max} \cdot b \cdot a'$$

- Σύστημα τριών κανονικών διαφορικών εξισώσεων
- 4 άγνωστοι: u_{max}, c_{max}, b, u_m
- 4η εξίσωση: $u_m = \beta \cdot u_{max}$ (θεωρία οριακής στοιβάδας)

Ειδικές περιπτώσεις (επιδεχόμενες λύση)

- Από την εξίσωση συνέχειας :

$$u_{max} \cdot b \cdot a' = 2 \int_{y_o}^{y} u_m \, dy + Q_o$$

ή $$u_{max} \cdot b \cdot a' = 2\beta \int_{y_o}^{y} u_{max} \, dy + Q_o$$

Q_o : παροχή του ρευστού !

- Περίπτωση Α (περιοχή κοντά στο στόμιο - κυριαρχεί το Q_o)

$$u_{max} \cdot b \cdot a' \simeq Q_o \ , \quad \text{όταν} \quad \frac{2\beta}{Q_o} \int_{y_o}^{y} u_{max} \, dy \ll 1$$

- Περίπτωση Β (απομακρυσμένη από το στόμιο περιοχή - σχετικά μικρό Q_o)

$$u_{max} \cdot b \cdot a' \simeq 2\beta \int_{y_o}^{y} u_{max} \, dy \ , \quad \text{όταν} \quad \frac{2\beta}{Q_o} \int_{y_o}^{y} u_{max} \, dy \gg 1$$

- Από την εξίσωση της συγκέντρωσης :

$$u_{max} \cdot c_{max} \cdot b \cdot a = u_1 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \cdot d = \text{σταθ.}$$

- Από την εξίσωση της ορμής :

$$u_{max}^2 \cdot b \cdot a = \int_{y_o}^{y} g \cdot c_{max} \cdot b \cdot a' \cdot dy + \frac{M_o}{\rho_2}$$

M_o : αρχική ορμή

- Περίπτωση C (κυριαρχεί το M_o - αμελητέα άνωση)

$$u_{max}^2 \cdot b \cdot a \simeq \frac{M_o}{\rho_2}, \quad \text{όταν } \frac{\rho_2 g}{M_o} \int_{y_o}^{y} c_{max} \cdot b \cdot a' \cdot dy \ll 1$$

- Περίπτωση D (κυριαρχεί η άνωση - σχετικά μικρό M_o)

$$u_{max}^2 \cdot b \cdot a = g \int_{y_o}^{y} c_{max} \cdot b \cdot a' \cdot dy,$$

$$\text{όταν } \frac{\rho_2 g}{M_o} \int_{y_o}^{y} c_{max} \cdot b \cdot a' \cdot dy \gg 1$$

- Περιπτώσεις A και C μαζί:
  - δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους u_{max} και b,
  - στην αρχική περιοχή διείσδυσης της φλέβας σε άλλο ρευστό (μεγαλύτερης πυκνότητας)

- Περίπτωση C:
  - όταν $\rho_1 = \rho_2$ (δεν υπάρχει άνωση)
  - περιοχή κοντά στο στόμιο

- Περιπτώσεις B και C μαζί:
  - όταν $\rho_1 = \rho_2$ (δεν υπάρχει άνωση)
  - περιοχή απομακρυσμένη από το στόμιο

- Περιπτώσεις B και D μαζί:
  - κυριαρχεί η άνωση
  - περιοχή απομακρυσμένη από το στόμιο

Επίλυση με μεταβλητές υψωμένες σε δύναμη

Εξίσωση περίπτωσης B (1)

Εξίσωση περίπτωσης D (2)

Εξίσωση συγκέντρωσης (3)

$$b = a_1 y^m$$

$$u_{max} = a_2 y^n$$

$$c_{max} = a_3 y^p$$

a_1, a_2, a_3 : σταθεροί συντελεστές

m, n, p : σταθεροί εκθέτες

Εξισ. (1) $\Rightarrow \; a' a_1 a_2 y^{m+n} = 2\beta \dfrac{a_2}{n+1} y^{n+1}$

Εξισ. (3) $\Rightarrow \; a a_1 a_2 a_3 y^{m+n+p} = c_1 u_1 d$

Εξισ. (2) $\Rightarrow \; a a_1 a_2^2 y^{2n+m} = g a_1 a_3 \dfrac{1}{m+p+1} y^{m+p+1}$

$$\left.\begin{aligned} m+n &= n+1 \\ m+n+p &= 0 \\ 2n+m &= m+p+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m = 1 \quad n = 0 \quad p = -1$$

$$\left.\begin{aligned} a' a_1 &= 2\beta \\ a a_1 a_2 a_3 &= c_1 u_1 d \\ a a_2^2 &= g a_3 \end{aligned}\right\}$$

4 άγνωστοι : a_1, a_2, a_3, β

- Ένας άγνωστος πρέπει να προσδιοριστεί πειραματικά, έστω ο συντελεστής a_1
- Επίλυση του συστήματος:

$$\beta = \frac{1}{2} a' a_1$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt[3]{a_1 a_2^2}} \cdot {Fr_1'}^{1/3} \cdot c_1^{1/2} \cdot d^{1/2}$$

$$a_3 = (a_1^2 a)^{-1/3} \cdot {Fr_1'}^{2/3} \cdot c_1 \cdot d$$