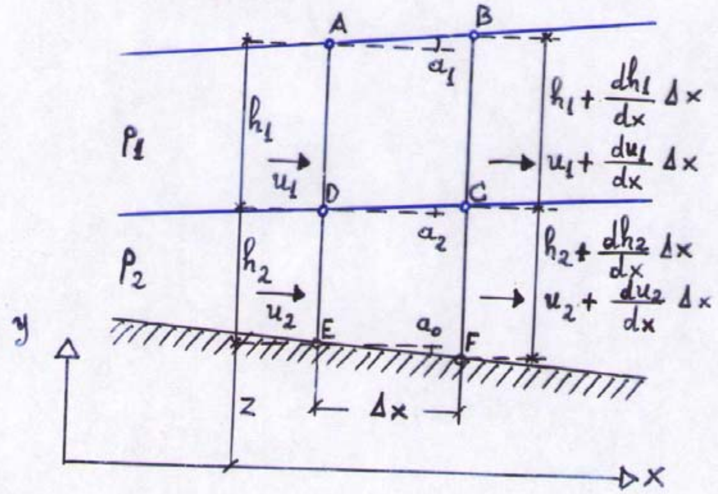
4. ΣΤΡΩΜΑΤΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΡΟΕΣ ΜΕ ΤΡΙΒΕΣ ΣΤΙΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

- Σφήνα αλμυρού νερού,
  στις εκβολές ποταμών στη θάλασσα
- Παρόμοια σφήνα κατά την εισροή ζεστού νερού σε ποταμούς
- Εκβολή ενός ποταμού, που μεταφέρει μεγάλη ποσότητα φερτών υλών ή έχει κρύα νερά, σε τεχνητές ή φυσικές λίμνες

Βασικές εξισώσεις (Schijf και Schönfeld, 1953)



$$J_0 = tg a_0$$

$$tg a_1 = \frac{d(h_1+h_2+z)}{dx} = \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_0$$

$$tg a_2 = \frac{d(h_2+z)}{dx} = \frac{dh_2}{dx} - J_0$$

$$tg a \simeq \sin a \qquad \cos a = 1$$

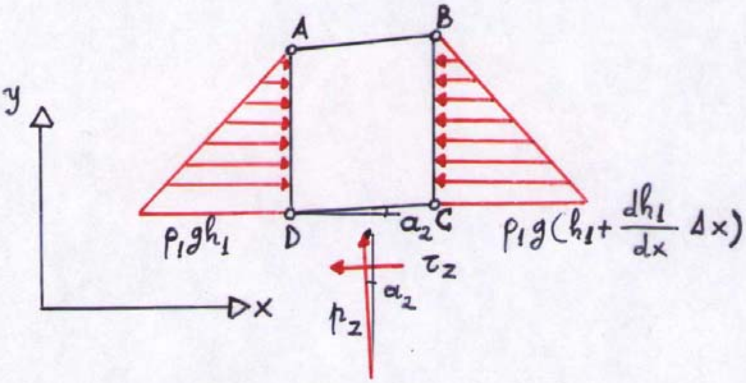
Εξίσωση συνέχειας για τον όγκο ελέγχου ABCD

$$Q_1 = u_1 h_1 = \left(u_1 + \frac{du_1}{dx}\Delta x\right)\left(h_1 + \frac{dh_1}{dx}\Delta x\right)$$

- Παραλείπουμε τον όρο με $(\Delta x)^2$

$$h_1 \frac{du_1}{dx}\Delta x + u_1 \frac{dh_1}{dx}\Delta x = 0 \Rightarrow \frac{du_1}{dx} = -\frac{u_1}{h_1}\frac{dh_1}{dx} \qquad (1)$$

Νόμος διατήρησης της ορμής για τον όγκο ABCD



$$\int \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dF = -\int p\vec{n}dF - \int \tau_z \vec{k}dF$$

$$\int \rho (\vec{v}\cdot\vec{i})(\vec{v}\cdot\vec{n})dF = -\int p\vec{n}\cdot\vec{i}\,dF - \int \tau_z \vec{k}\cdot\vec{i}\,dF$$

$$-\rho_1 Q_1 u_1 + \rho_1 Q_1\left(u_1 + \frac{du_1}{dx}\Delta x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\rho_1 g h_1^2 - \frac{1}{2}\rho_1 g\left(h_1 + \frac{dh_1}{dx}\Delta x\right)^2 - p_z \sin a_2 \Delta x - \tau_z \cos a_2 \Delta x$$

$$p_z = \frac{1}{2}\left[\rho_1 g h_1 + \rho_1 g\left(h_1 + \frac{dh_1}{dx}\Delta x\right)\right] = \rho_1 g h_1 + \frac{1}{2}\rho_1 g \frac{dh_1}{dx}\Delta x$$

- Παραλείπουμε όρους με $(\Delta x)^2$

$$\rho_1 Q_1 \frac{du_1}{dx}\Delta x = -\rho_1 g h_1 \frac{dh_1}{dx}\Delta x - \rho_1 g h_1 \sin a_2 \Delta x - \tau_z \cos a_2 \Delta x$$

- Θέτουμε $Q_1 = u_1 h_1$, $\cos a_2 \simeq 1$, $\sin a_2 = tg\, a_2$
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\rho_1 g h_1 \Delta x$

$$-\frac{\tau_z}{\rho_1 g h_1} = \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_o + \frac{u_1}{g}\frac{du_1}{dx} \qquad (2)$$

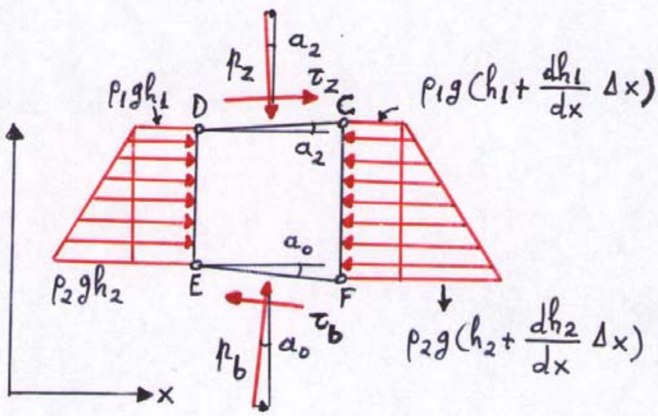
<u>Εξίσωση συνέχειας για τον όγκο DCFE</u>

$$Q_2 = u_2 h_2 = \left(u_2 + \frac{du_2}{dx}\Delta x\right)\left(h_2 + \frac{dh_2}{dx}\Delta x\right)$$

- Παραλείπουμε τον όρο με $(\Delta x)^2$

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{u_2}{h_2}\frac{dh_2}{dx} \qquad (3)$$

<u>Νόμος διατήρησης της ορμής για τον όγκο DCFE</u> (κατά x)



$$-\rho_2 Q_2 u_2 + \rho_2 Q_2\left(u_2 + \frac{du_2}{dx}\Delta x\right) = \frac{1}{2}\left(2\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2\right)h_2 -$$

$$-\frac{1}{2}\left[2\rho_1 g\left(h_1 + \frac{dh_1}{dx}\Delta x\right) + \rho_2 g\left(h_2 + \frac{dh_2}{dx}\Delta x\right)\right]\left(h_2 + \frac{dh_2}{dx}\Delta x\right) +$$

$$+ p_z \sin a_2 \Delta x + \tau_z \cos a_2 \Delta x + p_b \sin a_o \Delta x - \tau_b \cos a_o \Delta x$$

$$p_b = \frac{1}{2}\left[\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 + \rho_1 g \left(h_1 + \frac{dh_1}{dx}\Delta x\right) + \rho_2 g \left(h_2 + \frac{dh_2}{dx}\Delta x\right)\right] =$$

$$= \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \frac{1}{2}\rho_1 g \frac{dh_1}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\rho_2 g \frac{dh_2}{dx}\Delta x$$

- Αντικαθιστούμε τις τιμές των p_z και p_b
- Παραλείπουμε όρους με $(\Delta x)^2$
- Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $\rho_2 g h_2 \Delta x$
- Θέτουμε $Q_2 = u_2 h_2$, $\cos a_2 \simeq 1$, $\cos a_0 \simeq 1$, $\sin a_0 \simeq tg a_0 = J_0$ και $\sin a_2 \simeq tg a_2 = \frac{dh_2}{dx} - J_0$.

$$\frac{\tau_z - \tau_b}{\rho_2 g h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_0 + \frac{u_2}{g}\frac{du_2}{dx} \tag{4}$$

- Εξισ. (1) και (2) καθώς και (3) και (4)

- $\boxed{Fr_1' = \frac{u_1}{\sqrt{\kappa g h_1}}}$ $\boxed{Fr_2' = \frac{u_2}{\sqrt{\kappa g h_2}}}$ $\kappa = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$

πυκνομετρικοί αριθμοί Froude

$$\boxed{\frac{-\tau_z}{\rho_1 g h_1} = (1 - \kappa Fr_1'^2)\frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_0}$$

$$\boxed{\frac{\tau_z - \tau_b}{\rho_2 g h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dx} + (1 - \kappa Fr_2'^2)\frac{dh_2}{dx} - J_0}$$

Διατμητικές τάσεις στις διεπιφάνειες

$$\boxed{\tau_z = \frac{\rho}{8} f_z \, |u_1 - u_2| \, (u_1 - u_2)}$$

$$\boxed{\tau_b = \frac{\rho}{8} f_b \, |u_2| \, u_2}$$

Harleman (1961)

f_z : συντελεστής τριβής στη διεπιφάνεια

f_b : " " στην κοίτη

$$\bar{u} = \frac{1}{n} R^{2/3} J_o^{1/2}$$

$$\tau_b = \rho g R J_o$$

$$\tau_b = \rho g \frac{n^2}{R^{1/3}} \bar{u}^2$$

$$\boxed{f_b = \frac{8 g n^2}{R^{1/3}}}$$

f_z : συνάρτηση του Re_o (Harleman και Stolzenbach, 197

$$Re_o = \frac{4 R_o \, |u_2 - u_1|}{\nu_2}$$

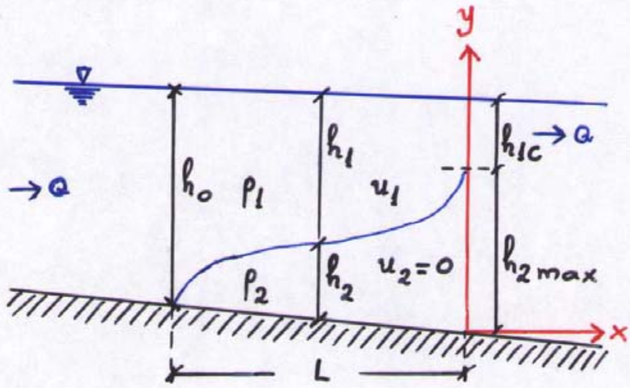
R_o : υδραυλική ακτίνα της συνολικής ροής

ν_2 : κινηματικό ιξώδες του κάτω στρώματος

$\boxed{f_z = 0.3 \, (Re_o)^{-1/4}}$ για τυρβώδη ροή

$\boxed{f_\ell = 96 / Re_o}$ για στρωτή ροή

Γλώσσα αλμυρού νερού στις εκβολές ενός ποταμού



$h_{1c} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{\kappa g}}$ $\qquad Fr_1' = 1 \qquad h_{1c} < h_o$

h_{1c} : κρίσιμο βάθος

$\tau_b = 0$, γιατί $u_2 = 0$

$\tau_z = \frac{\rho}{8} f_z |u_1| u_1$

για $x = -L \qquad h_2 = 0$

για $x = 0 \qquad h_1(0) = 1.21\, h_{1c}$ σε φυσικές ροές

Υπολογισμός της μορφής της γλώσσας

Από τις εξισ. Schijf και Schönfeld για $\tau_b = 0$ και $Fr_2' = 0$, με απάλειψη του τ_z

$$-\left[h_2 + h_1\left(1 - Fr_1'^2 \cdot \kappa\right)\right]\frac{dh_1}{dx} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}h_2 + h_1\right)\left(\frac{dh_2}{dx} - J_o\right) \qquad (1)$$

ή $$-\left[h_2 + h_1\left(1 - Fr_1'^2 \cdot \kappa\right)\right]\frac{dh_1}{dx} = \left(\frac{1}{1-\kappa} \cdot h_2 + h_1\right)\left(\frac{dh_2}{dx} - J_o\right) \qquad (2)$$

$Fr_1' = 1 \qquad \kappa \simeq 0.005$

Εξίσ. (2) $\Rightarrow \quad -(h_2+h_1)\dfrac{dh_1}{dx} = (h_2+h_1)\left(\dfrac{dh_2}{dx} - J_o\right)$

$$-\frac{dh_1}{dx} = \frac{dh_2}{dx} - J_o$$

$J_o = -\dfrac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d(h_1+h_2+z)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1+h_2+z = \text{σταθ.} \Rightarrow$

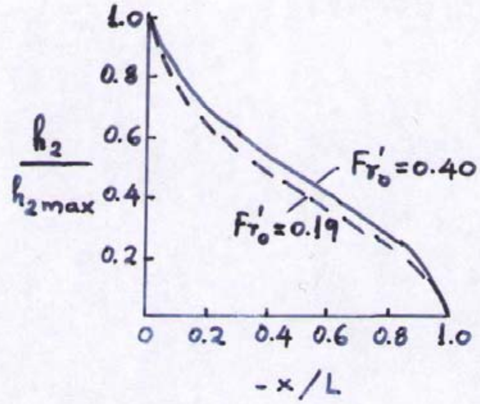
Ελεύθερη επιφάνεια του νερού κατά μήκος της γλώσσας: οριζόντια

Harleman (1961):

$$\boxed{\frac{1}{Fr_o'^{\,2}}\left(\frac{\eta^5}{5} - \frac{\eta^4}{4}\right) - \frac{1}{2}\eta^2 + \eta + 3\,Fr_o'^{\,2/3}\left(\frac{1}{10}Fr_o'^{\,2/3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{f_z(-x)}{8h_o}}$$

$-L \leq x \leq 0 \;, \quad \eta = \dfrac{h_1}{h_o}$

Διάγραμμα Keulegan (πειραματικά αποτελέσματα)



<u>Υπολογισμός του μήκους της γλώσσας</u>

$$\boxed{\frac{L}{h_o} = 1.06\,(Re)^{1/4}(Fr_o')^{-11/4}}$$ Keulegan

L : μήκος της γλώσσας

$$Re = \frac{u_o h_o}{\nu}$$

<u>Παράδειγμα υπολογισμού</u>

Παροχή ενός ποταμού $Q = 2840\ m^3/s$

Πλάτος του ποταμού $b = 458\ m$

Βάθος " " $h_o = 13.7\ m$

$K = 0.02$, $\nu = 1.0064 \times 10^{-6}\ m^2/s$.

Ζητείται η μορφή και το μήκος της γλώσσας αλμυρού νερού.

<u>Λύση</u>

<u>Μορφή της γλώσσας</u>

$$Fr_o' = \frac{u_o}{\sqrt{K g h_o}}$$

$$u_o = \frac{Q}{b h_o} = \frac{2840}{458 \times 13.7} = 0.45\ m/s$$

$$Fr_o' = \frac{0.45}{\sqrt{0.02 \times 9.81 \times 13.7}} = 0.275 \Rightarrow \text{διάγραμμα Keulegan}$$

$$h_{2max} = h_o - h_{1c}$$

$$h_{1c} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{\kappa g}} \qquad q = Q/b = 2840/458 = 6.20 \ m^3/s/m$$

$$h_{1c} = \sqrt[3]{\frac{6.20^2}{0.02 \times 9.81}} = 5.81 \ m \qquad 1.21 \ h_{1c} = 1.21 \times 5.81 = 7.03 \ m$$

$$h_{2max} = 13.7 - 7.03 = 6.67 \ m$$

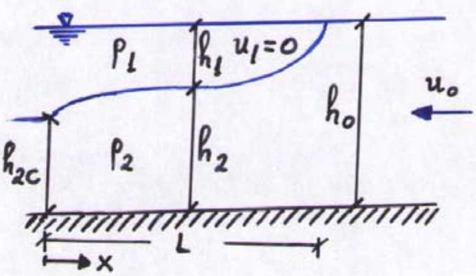
<u>Μήκος της γλώσσας L :</u>

$$\frac{L}{h_o} = 1.06 \, (Re)^{1/4} \, (Fr_o')^{-11/4}$$

$$Re = \frac{u_o h_o}{\nu} = \frac{0.45 \times 13.7}{1.0064 \times 10^{-6}} = 6.12 \times 10^6$$

$$L = 13.7 \times 1.06 \times (6.12 \times 10^6)^{1/4} \times (0.275)^{-11/4} = 25150 \ m = 25.15 \ km$$

Σφήνα ζεστού νερού σ' έναν ποταμό



Μορφή της σφήνας

Εξισ. Schijf - Schönfeld:

$$\frac{-\tau_z}{\rho_1 g h_1} = \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_0 \qquad (1)$$

$$\frac{\tau_z - \tau_b}{\rho_2 g h_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dx} + (1 - \kappa \cdot Fr_2'^{\,2})\frac{dh_2}{dx} - J_0 \qquad (2)$$

$$\tau_z = -\frac{\rho_2}{8} a f_b u_2^2 \qquad f_z = a f_b$$

$$\tau_b = \frac{\rho_2}{8} f_b u_2^2$$

- Τιμές των τ_z και τ_b στις Εξισ. (1) και (2)
- Απάλειψη του f_b

$$\left(\frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} - J_0\right) h_1 (1+a) = -\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{dh_1}{dx} + (1-\kappa Fr_2'^{\,2})\frac{dh_2}{dx} - J_0\right]\frac{\rho_2}{\rho_1} a h_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\rho_2}{\rho_1} = \dfrac{1}{1-\kappa} \\[2ex] \kappa \simeq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \simeq 1$$

$$\frac{dh_1}{dx}\left[h_1(1+a)+ah_2\right] + \frac{dh_2}{dx}\left[h_1(1+a)+ah_2\right] - J_0\left[h_1(1+a)+ah_2\right] = 0$$

ή $\left[h_1(1+a)+ah_2\right]\left(\dfrac{dh_1}{dx}+\dfrac{dh_2}{dx}-J_0\right)=0 \Rightarrow$

$$\frac{dh_1}{dx}+\frac{dh_2}{dx}-J_0 = 0 \Rightarrow \frac{d(h_1+h_2+z)}{dx}=0$$

$$h_1+h_2+z = \text{σταθ.} \Rightarrow$$

Η επιφάνεια του νερού πάνω από τη σφήνα είναι οριζόντια

Bata (1957):

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{f_b x}{h_0} Fr_0'^2 = 2\eta^4 + \frac{8a}{3}\eta^3 + 4a(1+a)\eta^2 + 8\left[a(1+a)^2 - Fr_0'^2\right]\eta + \\ + 8a\left[(1+a)^3 - Fr_0'^2\right]\left[\ln(1+a-\eta)\right] - C\end{aligned}}$$

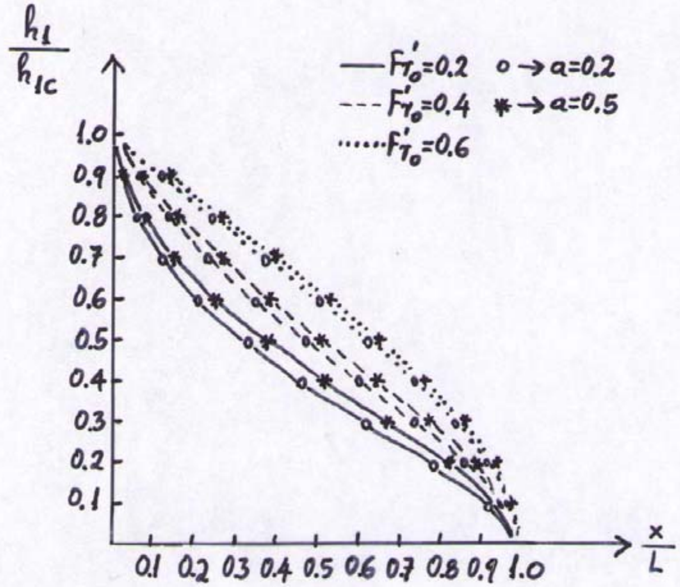
$\eta = h_2/h_0$

Προσδιορισμός του C : για $x=0$, h_2 γνωστό (κρίσιμο βάθος)

$$\boxed{\begin{aligned}C = 2\left(2.16\,Fr_0'^{8/3}\right) + \frac{8a}{3}\left(1.78\,Fr_0'^{6/3}\right) + 4a(1+a)\left(1.47\,Fr_0'^{4/3}\right) + \\ + 8\left[a(1+a)^2 - Fr_0'^2\right]1.21\,Fr_0'^{2/3} + 8a\left[(1+a)^3 - Fr_0'^2\right]\left[\ln\left(1+a-1.21\,Fr_0'^{2/3}\right)\right]\end{aligned}}$$

Γραφική παράσταση : $\frac{h_1}{h_{1c}} = f\left(\frac{x}{L}\right)$

$h_{1c} = h_0 - h_{2c}$



Μήκος της σφήνας

$x = L$ για $\eta = 1$ στην Εξίσ. του Bata

$$\boxed{\frac{f_b \cdot L}{h_0} = \left\{2 + 14.67a + 20a^2 + 8\left[a^3 + a(1+a)^3 \ln a - Fr_0'^2 (1 + a\ln a)\right] - C_1\right\} \cdot Fr_0'^{-2}}$$

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\rho_1' Q_1 + \rho_2 Q_2}{Q_1 + Q_2}}$$

Q_2 : παροχή ποταμού

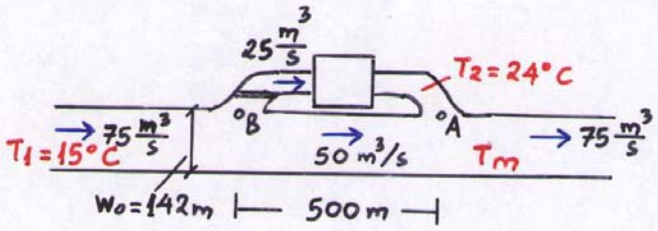
Q_1 : παροχή ζεστού νερού

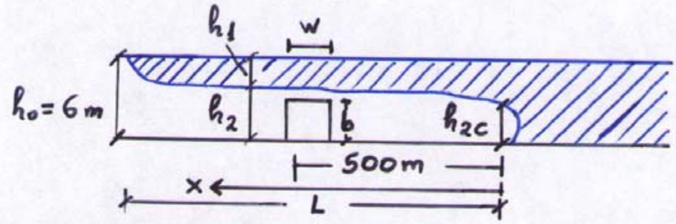
ρ_2 : πυκνότητα κρύου νερού (ποταμού)

ρ_1' : πυκνότητα ζεστού νερού

ρ_1 : πυκνότητα αναμιγμένου νερού

Υπολογιστικό παράδειγμα: Υδροληψία σ' έναν ποταμό





Υπολογισμός μήκους σφήνας:

για $T_1 = 15°C$ $\quad \rho_2 = 0.99885 \ g/cm^3$

για $T_2 = 24°C$ $\quad \rho_1' = 0.99690 \ g/cm^3$

$$\rho_1 = \frac{25 \times 0.99690 + 0.99885 \times 50}{75} = 0.99820 \ g/cm^3$$

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} = \frac{0.99885 - 0.99820}{0.99885} = 0.00065$$

$$u_0 = \frac{50}{6 \times 142} = 0.059 \ m/s$$

$$F_{r_0}' = \frac{u_0}{\sqrt{K g h_0}} = \frac{0.059}{\sqrt{0.00065 \times 9.81 \times 6.0}} = 0.30$$

$f_b = 0.03 \qquad f_z = 0.009 \qquad$ (Polk et al., 1971)

$a = f_z / f_b = 0.009 / 0.03 = 0.3$

$C_1 = 1.17$

$$\frac{f_b \cdot L}{h_o} = 4.88 \Rightarrow L = \frac{4.88 \times 6.0}{0.03} = 976 \text{ m}$$

<u>Υπολογισμός ύψους σφήνας στη ρίζα της</u> (σημείο A)

$h_{2c} = 1.21\, h_{2co}$

$$\left.\begin{array}{l} Fr_o' = \dfrac{Q}{\sqrt{k g h_o^3}} \Rightarrow h_o^3 = \dfrac{Q^2}{k g\, Fr_o'^{\,2}} \\[2ex] \text{Επίσης } h_{2co}^3 = \dfrac{Q^2}{k g} \end{array}\right\} \frac{h_{2co}}{h_o} = Fr_o'^{\,2/3}$$

$h_{2co} = h_o\, Fr_o'^{\,2/3} = 6 \times 0.3^{2/3} = 2.69 \text{ m}$

$h_{2c} = 1.21 \times 2.69 = 3.25 \text{ m}$

$h_{1c} = h_o - h_{2c} = 6.0 - 3.25 = 2.75 \text{ m}$

<u>Μορφή της σφήνας</u>

Διάγραμμα $h_1 / h_{1c} = f\,(x/L)$

$Fr_o' = 0.3, \quad a = 0.3, \quad L = 976 \text{ m}, \quad h_{1c} = 2.75 \text{ m}$

για $x = 500\ m$ $\quad h_1 \simeq 1.20\ m$ (πάχος ζεστού στρώματος)

$h_2 = 6.0 - 1.2 = 4.8\ m$ (πάχος κρύου στρώματος)

- Μέγιστο ύψος ανοίγματος του θυροφράγματος : 4.8 m
- για $h_2 / b = 2$ και $Q_2 / Q_c = 0.8 \Rightarrow$ ανάμιξη ζεστού νερού με κρύο σε ποσοστό 1%

$b = 4.8 / 2 = 2.4\ m$

$Q_c = \sqrt{\kappa g b^3} = 0.297\ m^3/s/m$

$Q_2 = 0.8 \times 0.297 = 0.237\ m^3/s/m$

- Πλάτος θυροφράγματος : $25 / 0.237 = 105\ m$