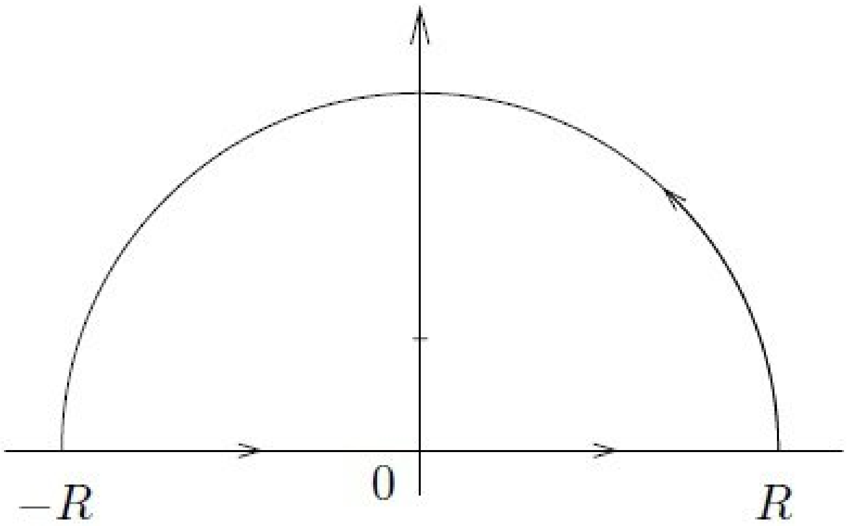
Μιγαδικές Συναρτήσεις

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Υπάρχει η δυνατότητα αναγνώρισης μίας μεμονωμένης ανωμαλίας με τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση αναλυτική για z τέτοια ώστε $0 < |z - z_0| < r$. Τότε

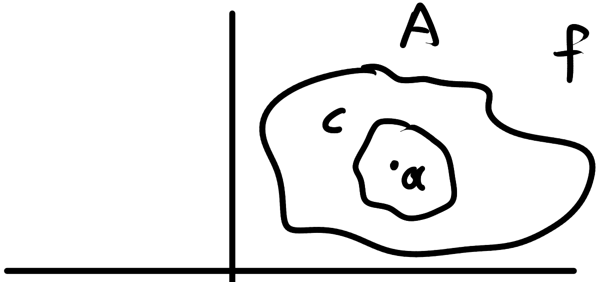
1. Το z_0 είναι **επουσιώδης (απαλείψιμη) ανωμαλία** για την f, αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{z \to z0} f(z)$.

2. Το z_0 είναι **πόλος** για την f, αν και μόνο αν $\lim_{z \to z0} f(z) = \infty$. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη του πόλου είναι το ελάχιστο m για το οποίο $\lim_{z \to z0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$ και πεπερασμένο.

3. Το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** για την f, αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z0} f(z)$ δεν υπάρχει.

$$f : A \to \mathbb{C}, \quad A \subset \mathbb{C}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$



f : αναλ. A

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ μεμονωμένη ανωμαλία

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\,dz \longleftarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz \iff \int_C f(z)\,dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

$\uparrow$

$\mathrm{Res}(f, z_0)$

z_0: απαλείψιμη, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) < \infty$.

z_0: πόλος m τάξης, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, …, $\lim\limits_{z\to \infty} (z-z_0)^m f(z) \neq \infty$

z_0: ουσιώδης ανωμαλία, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και για $0 < |z - z_0| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{\alpha_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_0) + \alpha_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0. Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$,

όπου γ ο κύκλος $|z - z_0| = r$, διαγεγραμμένος κατά τη θετική φορά.

Θέτοντας στον τελευταίο τύπο n = -1, παίρνουμε ότι ο συντελεστής που αντιστοιχεί στον όρο $1/(z - z_0)$ είναι ίσος με

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz.$$

Ο συντελεστής α_{-1}, ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0** και συμβολίζεται **Res(f, z_0)**, δηλαδή

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Ετυμολογία

Ο συντελεστής α_{-1}, ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** γιατί είναι κυριολεκτικά, αυτό που απομένει αν ολοκληρωθεί η σειρά Laurent όρο προς όρο γύρω από το σημείο ανωμαλίας z_0. Πιο συγκεκριμένα, αν το ανάπτυγμα της f γύρω από το z_0 είναι

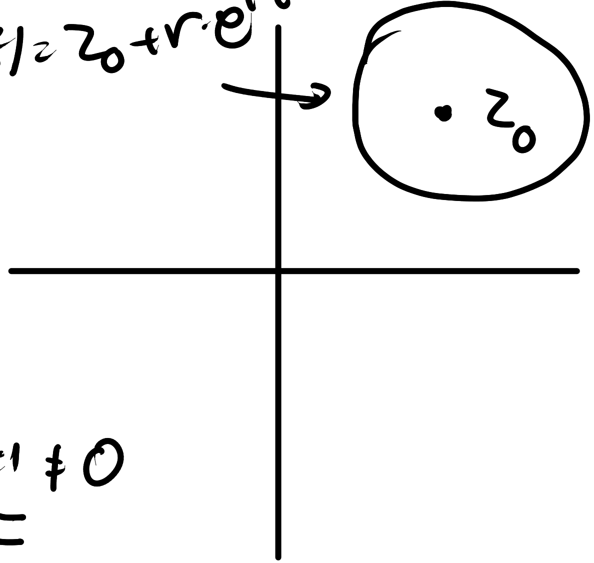
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

και γ είναι κυκλικό μονοπάτι με κέντρο z_0 και εντός του δακτυλίου, $0 < |z - z_0| < r$, τότε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z - z_0)^n dz = \alpha_{-1},$$

καθώς, $\int_\gamma (z - z_0)^n dz = 0$, $n \neq -1$.

$z(t) = z_0 + r\cdot e^{it}$



$$\int_\gamma (z-z_0)^n \, dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot i r e^{it} \, dt$$

$$= i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, dt \overset{n+1 \neq 0}{=}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0} \, dz = 2\pi i$$

$$= \cancel{i} r^{n+1} \frac{1}{\cancel{i} \cdot (n+1)} e^{i(n+1)t} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0$$

$$e^{i(n+1)\cdot 2\pi} = \left(e^{i2\pi}\right)^{n+1} = 1$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Η αναζήτηση ενός ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

ή από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που το ορίζει $\alpha_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz,$

μπορεί να είναι δύσκολη ή/και ασύμφορη. Στις περιπτώσεις των πόλων υπάρχει το εξής θεώρημα που αντικαθιστά τον εντοπισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου με τον υπολογισμό ενός ορίου.

Θεώρημα

α_{-1}

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m, τότε $\operatorname{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$

Απόδειξη: Από το ανάπτυγμα Taylor της αναλυτικής $(z - z_0)^m f(z)$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m, τότε $$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]$$

Ειδικές Περιπτώσεις

$$m = 1: \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$m = 2: \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z - z_0)^2 f(z)\right]$$

$$m = 3: \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z - z_0)^3 f(z)\right]$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παρατήρηση

Για m = 1, είναι $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο όριο είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίζουμε για να αναγνωρίσουμε το σημείο z_0 ως απλό πόλο.

Δηλαδή, στην περίπτωση όπου, $\lim_{z \to z0} f(z) = \infty$ και $\lim_{z \to z0} (z - z_0) f(z) = \lambda \neq 0$, τότε μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι το z_0 είναι απλός πόλος και ότι $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lambda$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 1
Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, στο $z_0 = 0$.

$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1}$

Λύση

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to 0} z f(z) = 1 < \infty$

0: πόλος 1ης τάξης.

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots$$

$\to a_{-1}$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

Εναλλακτικά: $\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = 1.$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 2

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = e^{1/z}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$: Δεν υπάρχει $\Rightarrow z_0 = 0$ ουσιώδης

- $z = x$ $\quad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \begin{cases} \xrightarrow{x\to 0^+} e^{+\infty} = +\infty \\ \xrightarrow{x\to 0^-} e^{-\infty} = 0. \end{cases}$ $\qquad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{\frac{1}{z}} dz$

- $z = iy$

$e^z = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\qquad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\, z^n} = \dots + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{1!\, z} + 1.$

$\frac{1}{1!\, z}$: $1 = a_{-1} = 1$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, στο $z_0 = 1$.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = a_{-1}$$

Λύση

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad \lim_{z\to 1} f(z) = \infty \Rightarrow z_0 = 1 : \text{πόλος}$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1)^3 f(z) = e^2 \neq 0, \infty \Rightarrow 1 : \text{πόλος } 3^{\text{ης}} \text{ τάξης.}$$

$$\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^3 \cdot f(z)\right]'' = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot e^2 = 2e^2$$

$$\left(e^{2z}\right)'' = \left(2e^{2z}\right)' = 4e^{2z}$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,1) = 4\pi i e^2$$

άλυτη

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 4

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ στα σημεία ανωμαλίας.

άλυτη

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 5

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \dfrac{z^{10}}{(z-1)^2(z+2)}$,στα σημεία ανωμαλίας.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση Ι

Έστω f, g δύο μιγαδικές συναρτήσεις. Τότε $\mathrm{Res}(f + g, z_0) = \mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(g, z_0)$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$,

τότε $f(z) + g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + b_n)(z - z_0)^n$.

Συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{Res}(f + g, z_0) = \alpha_{-1} + b_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(g, z_0)$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση ΙΙ

Έστω f συνάρτηση με πόλο 1ης τάξης στο z_0 και g αναλυτική στο $D(z_0, r)$, για κάποιο $r > 0$. τότε $\mathrm{Res}(f\cdot g, z_0) = g(z_0)\cdot \mathrm{Res}(f, z_0)$.

Απόδειξη

Φανερά, το z_0 είναι πόλος 1ης τάξης και για την fg. Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f\cdot g, z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)g(z)\\ &= g(z_0)\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)\\ &= g(z_0)\mathrm{Res}(f, z_0).\end{aligned}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Ορισμός

Ένας αριθμός z_0 ονομάζεται ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση h(z) αν

$$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0, \infty.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση h(z) = 1 – cos(z). : 2.

$$\lim_{z\to 0} h(z) = 0, \quad \lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z} = 0$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Αποδεικνύεται ότι:

Ένας αριθμός z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση h(z) αν

$$h(z_0) = 0,\ h'(z_0) = 0,\ \ldots,\ h^{(m-1)}(z_0) = 0,\ \text{αλλά}\ h^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση $h(z) = z\sin(z)$.

$h(z) = z \cdot \sin z$, $\lim_{z\to 0} h(z) = 0$, $\lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z} = 0$, $\lim_{z\to 0} \frac{h(z)}{z^2} = 1 \neq 0$,

Εναλλακτικά: $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = 2 \neq 0$.

$h'(z) = \sin z + z\cos z$, $h''(z) = \cos z + \cos z - z\sin z$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πρόταση ΙΙΙ

Αν $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0) \neq 0$, και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για την h(z), τότε

το z_0 είναι πόλος τάξης m για την f.

Δηλαδή:

- Αν $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ → z_0 πόλος 1ης τάξης για την f.
- Αν $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h^{(2)}(z_0) \neq 0$ → z_0 πόλος 2ης τάξης για την f.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παράδειγμα
Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f(z) = tan z, στο π/2.

Λύση

Είναι $f(z) = \dfrac{\sin z}{\cos z}$. Παρατηρούμε ότι

Αριθμητής: $\sin \pi/2 = 1 \neq 0$.

Παρονομαστής: $\cos \pi/2 = 0$, $(\cos z)' |_{\pi/2} = (-\sin \pi/2) = -1 \neq 0$.

Το π/2 είναι ρίζα $1^{ης}$ τάξης για τον παρονομαστή, χωρίς να μηδενίζει τον αριθμητή, άρα είναι πόλος $1^{ης}$ τάξης για την tan z. Υπολογίζουμε:

$$\mathrm{Res}(f, \pi/2) = \lim_{z\to\pi/2} (z - \pi/2) \tan z = \lim_{z\to\pi/2} (z - \pi/2) \sin z / \cos z = -1.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 7

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$, στο $z_0=0$.

Σημείωση
Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.
Αξιοποιείστε την Πρόταση III.

Λύση

$$f(z)=\frac{1}{z\cdot\sin z}$$

$z_0=0$: ρίζα πολλαπλότητας 2 για την $h(z)=z\cdot\sin z$.

Άρα, $z_0=0$ πόλος 2ης τάξης για την f.

$$\left(\frac{z}{\sin z}\right)'=\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}=$$

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot f(z)\right]'=\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{\cos z}-\cancel{\cos z}+\sin z\cdot z}{2\sin z\cos z}=0=a_{-1}$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z\cdot\sin z}\,dz=2\pi i\cdot a_{-1}=0.$$

άλυτη

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 8

Να βρεθεί το είδος της ανωμαλίας της $f(z) = \dfrac{1-z^5}{1-\cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση
Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος. Αξιοποιείστε την Πρόταση ΙΙΙ.

Λύση

$$f(z) = \frac{1-z^5}{1-\cos z} = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad g(0) = 1 \neq 0.$$

$$h(0) = 1-\cos 0 = 0, \quad h'(0) = \sin 0 = 0, \quad h''(0) = \cos 0 = 1 \neq 0, \infty.$$

$$h'(z) = \sin z, \quad h''(z) = \cos z$$

0 : πόλος 2ης τάξης για την f.

$$\operatorname{Res}(f,0) = g(0)\cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1-\cos z}, 0\right) = \overset{1}{\cancel{g(0)}}\cdot \lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)' = \dots$$

$$\left(\frac{z^2}{1-\cos z}\right)' = \frac{2z(1-\cos z) + z^2 \sin z}{(1-\cos z)^2}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 9

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3}$, στο σημείο ανωμαλίας.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 10

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \dfrac{z^2}{1-\cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 11

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \dfrac{z}{\sin^2 z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 12

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \dfrac{1+z}{z(2-z)}$, στα σημεία ανωμαλίας.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων από τα αναπτύγματα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι ασύμφορος.

Λύση

άλυτη

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0. Είδαμε ότι,

$$\alpha_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz.$$

όπου γ ο κύκλος $|z - z_0| = r$, διαγεγραμμένος κατά τη θετική φορά. Παρατηρούμε, ότι η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_0).$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Αναδεικνύεται μία νέα μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και γενικεύει ως προς το σκοπό αυτό το Θεώρημα του Cauchy. Πιο συγκεκριμένα, αν πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)dz$, και η f δεν είναι αναλυτική στο εσωτερικό του κλειστού μονοπατιού γ αλλά έχει μία ανωμαλία στο z_0, τότε αρκεί να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f στο z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \ \ 0 < |z - z_0| < r,$$

και να εντοπίσουμε τον όρο α_{-1}. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα είναι

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \alpha_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Ωστόσο, συμβαίνει πολλές φορές η f στο εσωτερικό της γ να έχει περισσότερες από μία ανωμαλίες. Προς αυτήν την κατεύθυνση αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα που προσαρμόζει την παραπάνω παρατήρηση στην περίπτωση αυτή.

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Θεώρημα

Έστω $U \subset C$, ένα ανοιχτό σύνολο, $z_1, z_2, \ldots, z_n \in U$, και $f : U - \{z_1, \ldots, z_n\} \to C$, μια αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα κλειστό θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε:

α) Το εσωτερικό τού γ περιέχεται στο U.

β) Τα $z_1, \ldots, z_n$ περιέχονται στο εσωτερικό του γ.

Τότε:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \ldots + \operatorname{Res}(f, z_n)\right]$$

Παρατήρηση
Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://proofwiki.org/wiki/Residue_Theorem

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Σύνοψη

Έστω f αναλυτική στο $0 < |z - z_0| < r$. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0:

- Είναι ίσο με 0, αν το z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία ($\lim_{z \to z0} f(z) = \lambda \neq \infty$).
- Μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$ αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m.
- Υπολογίζεται από τον ορισμό του, ως ο συντελεστής του όρου $1/(z - z_0)$ στο ανάπτυγμα Laurent της f στον δίσκο $0 < |z - z_0| < r$, αν το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f.
- Ο εντοπισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ολοκληρώματα:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_k)$$

όπου $z_1, z_2, \ldots, z_n$, είναι οι ανωμαλίες της f που βρίσκονται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ.

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Παράδειγμα
Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ όπου γ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2, θετικά προσανατολισμένος.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Αυτή, έχει πόλους τάξης 1 στα σημεία -i, i και αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i}(z-i)f(z) = \frac{1}{2i}, \quad \mathrm{Res}(f, -i) = \lim_{z \to -i}(z+i)f(z) = -\frac{1}{2i}$$

Συμπεραίνουμε, ότι:

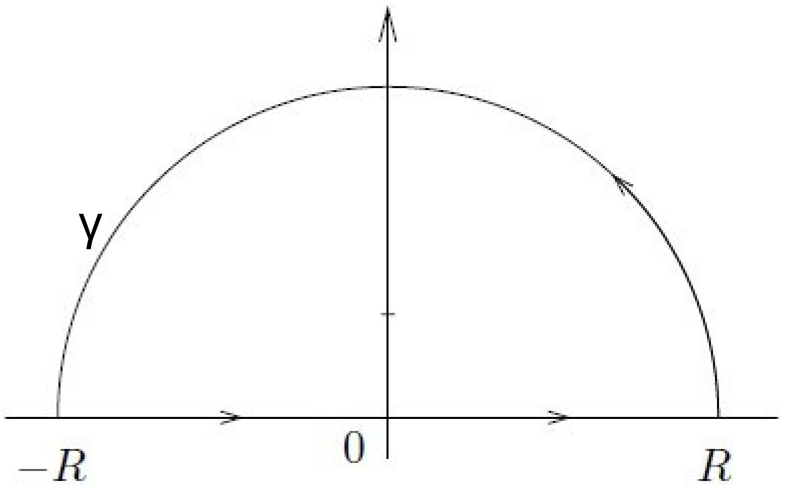
$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, i) + 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, -i) = 2\pi i\left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i}\right) = 0.$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz$ όπου γ το μονοπάτι του σχήματος (R > 1).

Λύση



Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Άσκηση 2
Να υπολογιστεί το $\int_\gamma \frac{e^z}{\cosh z} dz$, όπου γ ο κύκλος $|z| = 2$, θετικά διαγεγραμμένος.

Λύση