

# Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)  
Επικοινωνία: [epdiaman@ee.duth.gr](mailto:epdiaman@ee.duth.gr)

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

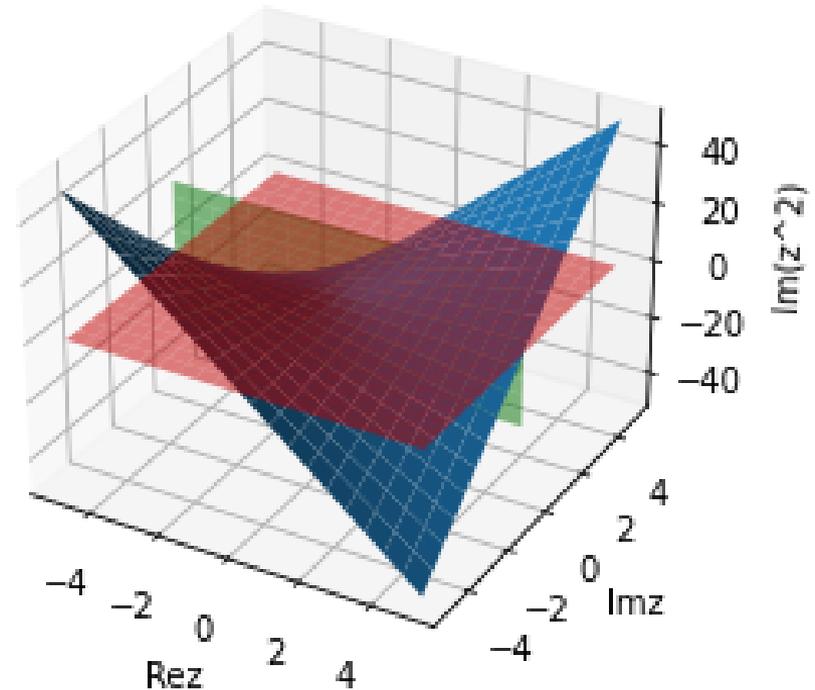
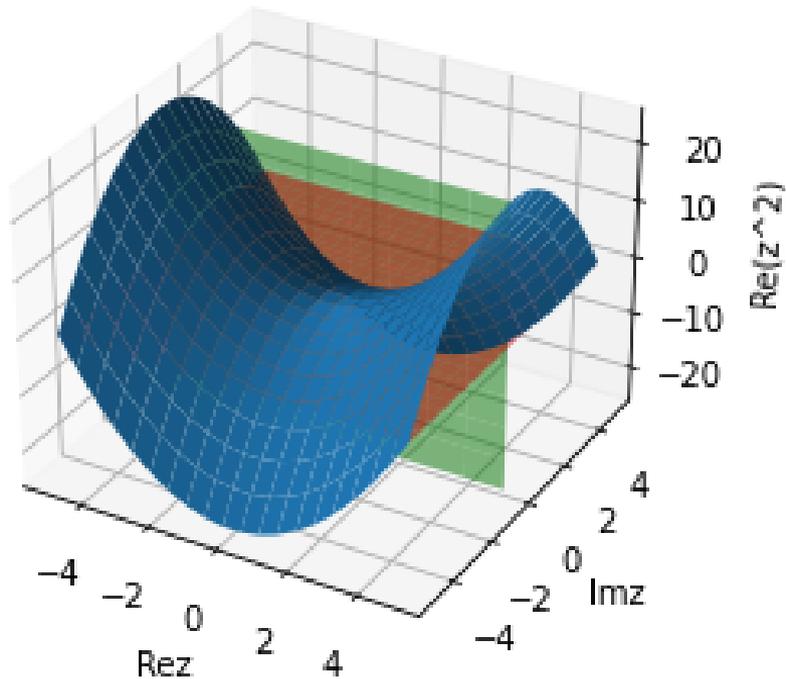




# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία άλλη επιλογή είναι η επιλεκτική αναπαράσταση μόνο του πραγματικού ή του φανταστικού μέρους μίας συνάρτησης.

π.χ. αν  $f(z) = z^2$  και  $z = x + iy$ , τότε  $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$  και τα επιμέρους γραφήματα είναι:



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

**Κώδικας Python που δίνει το διάγραμμα της  $f(z) = z^2$ .**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

A = np.linspace(-5, 5, 20)
B = np.linspace(-5, 5, 20)
A, B = np.meshgrid(A, B)
Y = A**2 - B**2 # ή Y = 2*A*B

C = np.linspace(-5, 5, 10)
D = np.linspace(-25, 25, 10)
C, D = np.meshgrid(C, D)

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(A, B, Y, zorder=2)
ax.plot_surface(A, B, np.zeros_like(A), color='red', alpha=0.5, zorder=1)
ax.plot_surface(C, np.zeros_like(C), D, color='green', alpha=0.5, zorder=1)
ax.set_xlabel('Re(z)')
ax.set_ylabel('Im(z)')
ax.set_zlabel('Re(z^2)') # ή ax.set_zlabel('Im(z^2)')
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

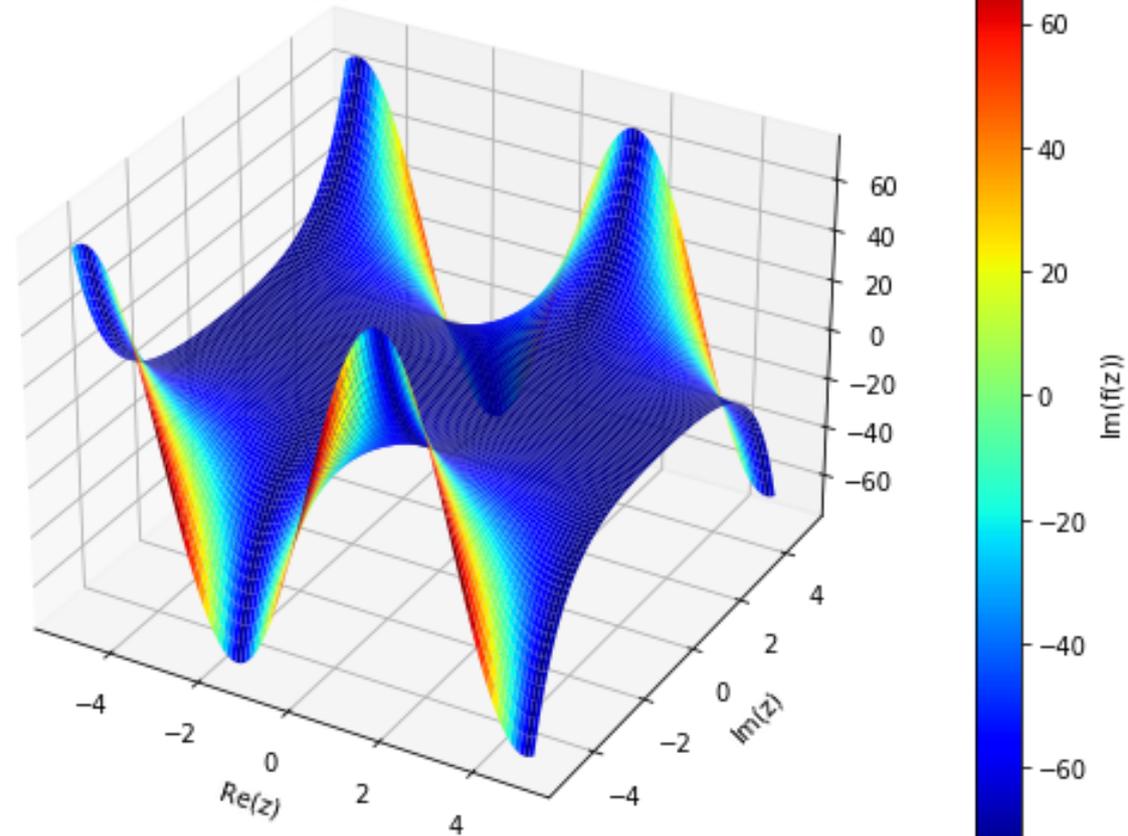
Επιπλέον, υπάρχει και η εκδοχή των τρισδιάστατων γραφημάτων με χρωματικό υπόμνημα.

**Κώδικας Python για το 3d διάγραμμα**  
from mpl\_toolkits.mplot3d import Axes3D  
from matplotlib import cm  
import matplotlib.pyplot as plt  
import numpy as np

```
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
X = np.arange(-5, 5, 0.1)
Y = np.arange(-5, 5, 0.1)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
R=np.sin(X + 1j*Y)
Z=R.real
T=R.imag
N = np.abs(T/T.max()) # normalize 0..1
plt.title('  $\mathrm{f}(z)=\sin(z)$  ')
plt.xlabel('  $\mathrm{Re}(z)$  ')
plt.ylabel('  $\mathrm{Im}(z)$  ')
surf = ax.plot_surface(
    X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,
    facecolors=cm.jet(N),
    linewidth=0, antialiased=True, shade=False)
m = cm.ScalarMappable(cmap=cm.jet, norm=surf.norm)
m.set_array(T)
p=plt.colorbar(m)
p.set_label('  $\mathrm{Im}(f(z))$  ')
fig.set_size_inches(14,7)
plt.show()
```

Πηγή: <https://ask.sagemath.org/question/9843/3d-complex-function-plot/>

$$f(z) = \sin z$$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

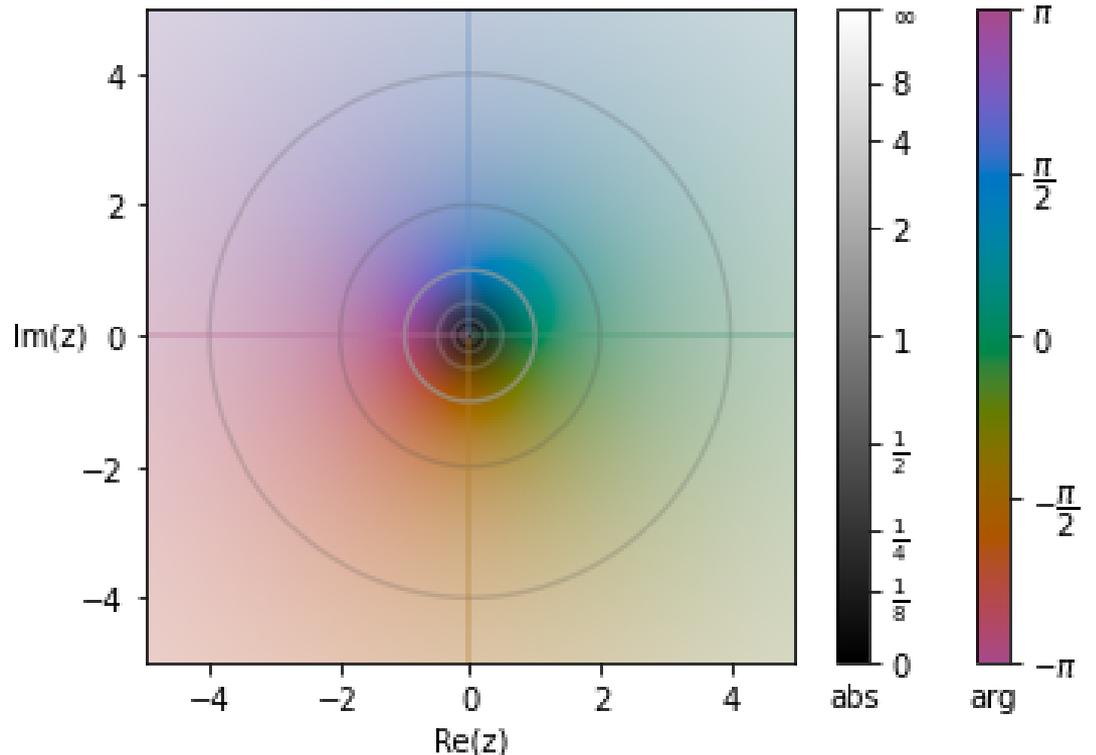
Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg } f(z)$ . Στο διάγραμμα παρουσιάζεται η αναπαράσταση της  $f(z) = z$ .

## Οδηγός ανάγνωσης του διαγράμματος

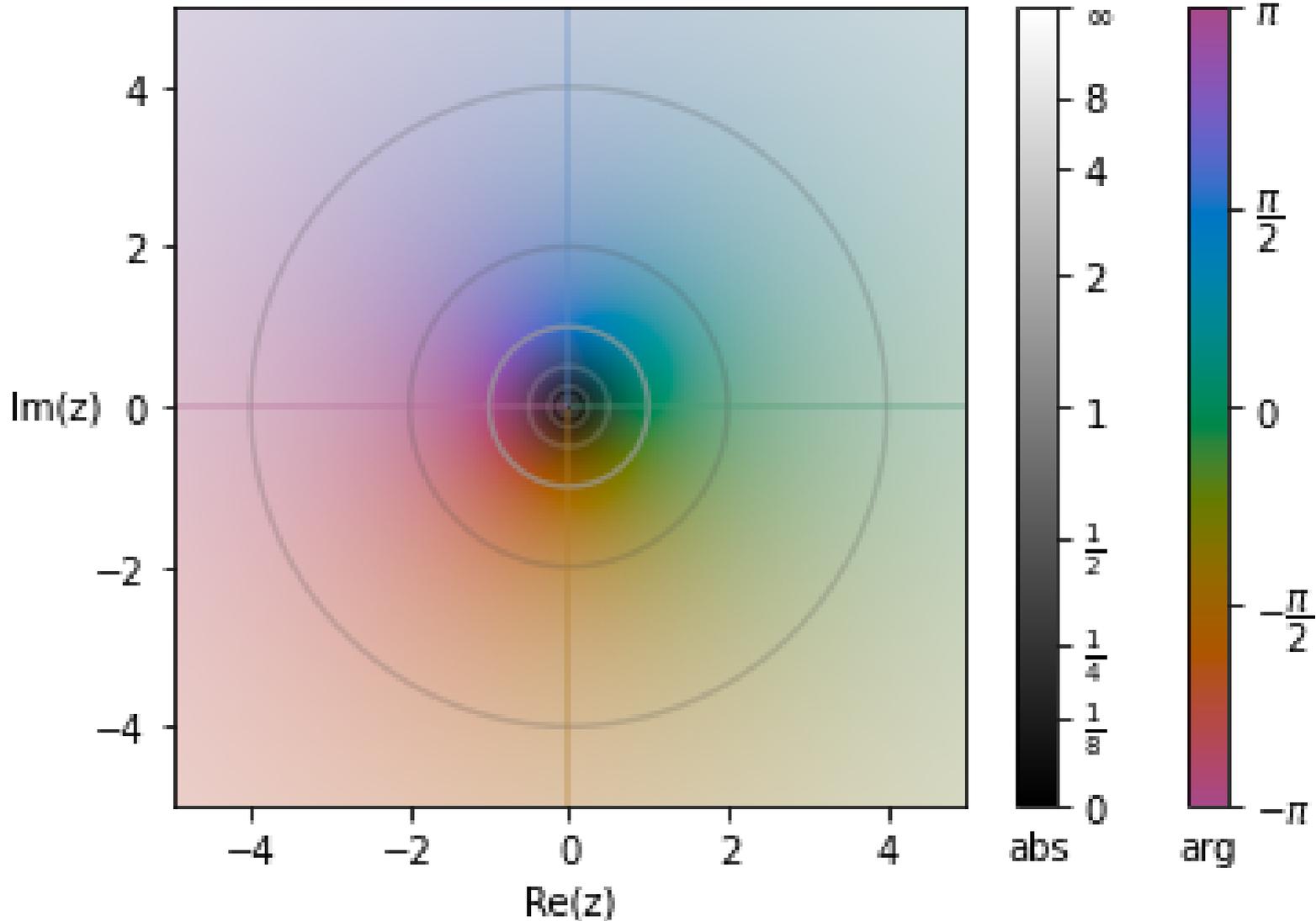
Το όρισμα της αντίστοιχης εικόνας  $f(z)$ , δηλαδή το  $\arg f(z)$ , εκφράζεται με την απόχρωση (hue) κάθε σημείου. Αν η συνάρτηση είναι πλειονότιμη τότε χρωματίζεται η πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος  $\text{Arg } f(z)$ .

Το μέτρο της εικόνας  $f(z)$ , δηλαδή το  $|f(z)|$  εκφράζεται με την φωτεινότητα (brightness) κάθε σημείου.

Οι γραμμές που σημειώνονται (contour lines) αντιστοιχούν σε εικόνες με  $|f(z)| = \dots, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, \dots$



$f(z) = z.$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

$$\text{π.χ. } f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\text{Arg}(z)}$$

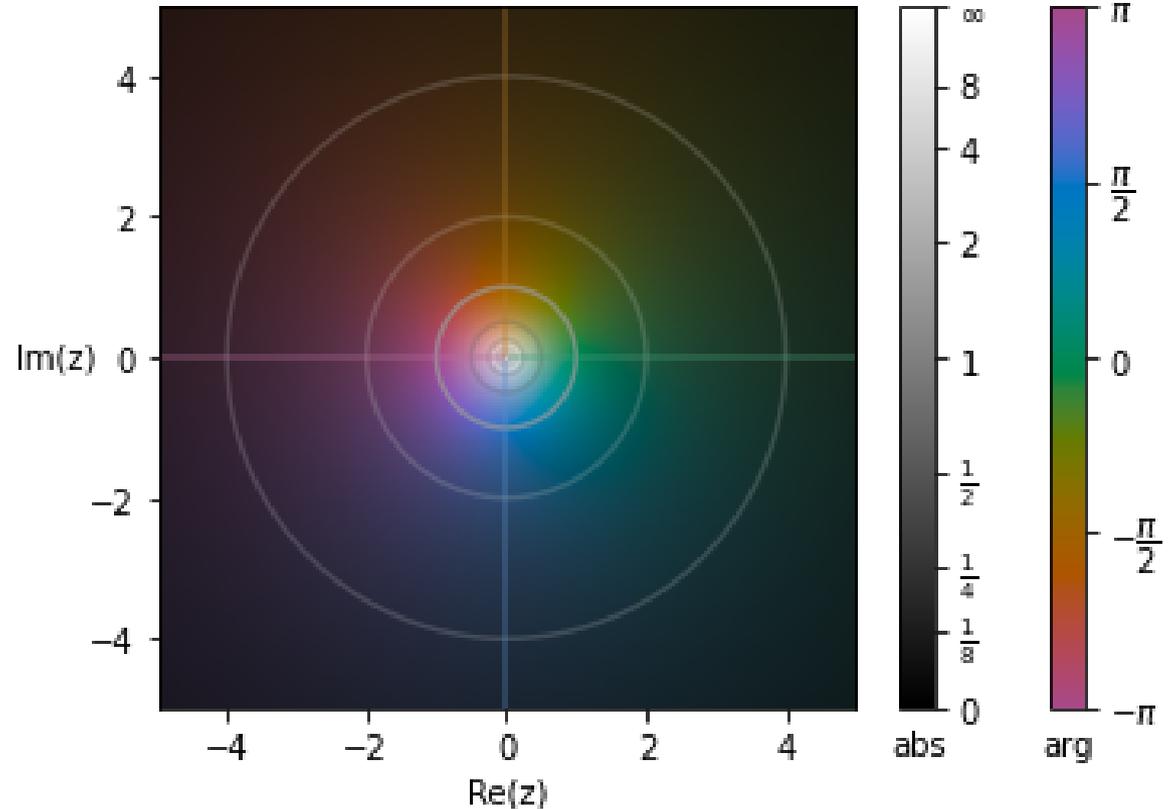
$$(|f(z)| = |z|^{-1} \text{ και } \text{Arg } f(z) = -\text{Arg } z)$$

## Κώδικας Python

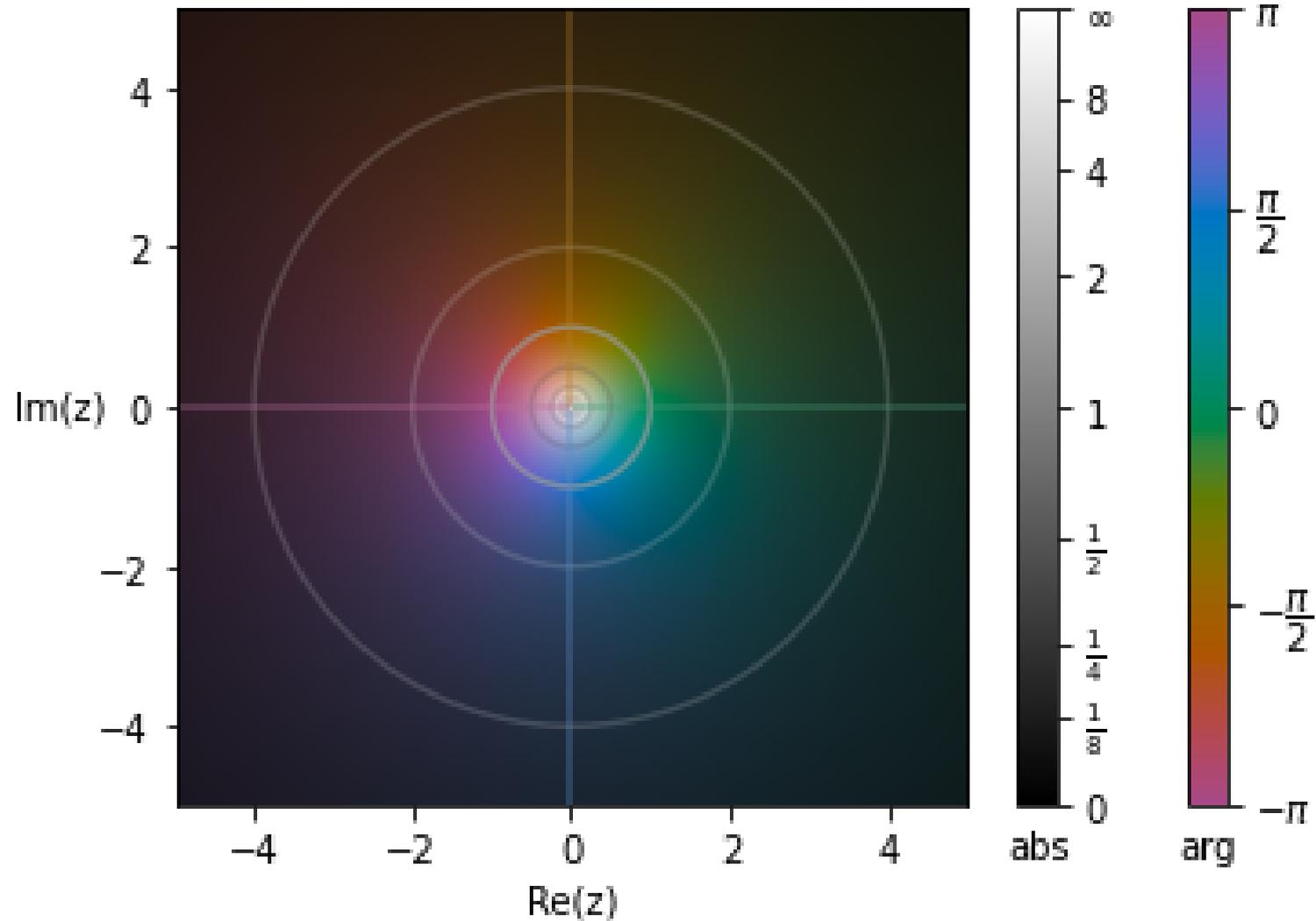
```
import cplot
import numpy as np
```

```
def f(z): return 1 / z
```

```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\text{Arg}(z)}$$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

π.χ.  $f(z) = z^2 = r^2 e^{2i \text{Arg}(z)}$

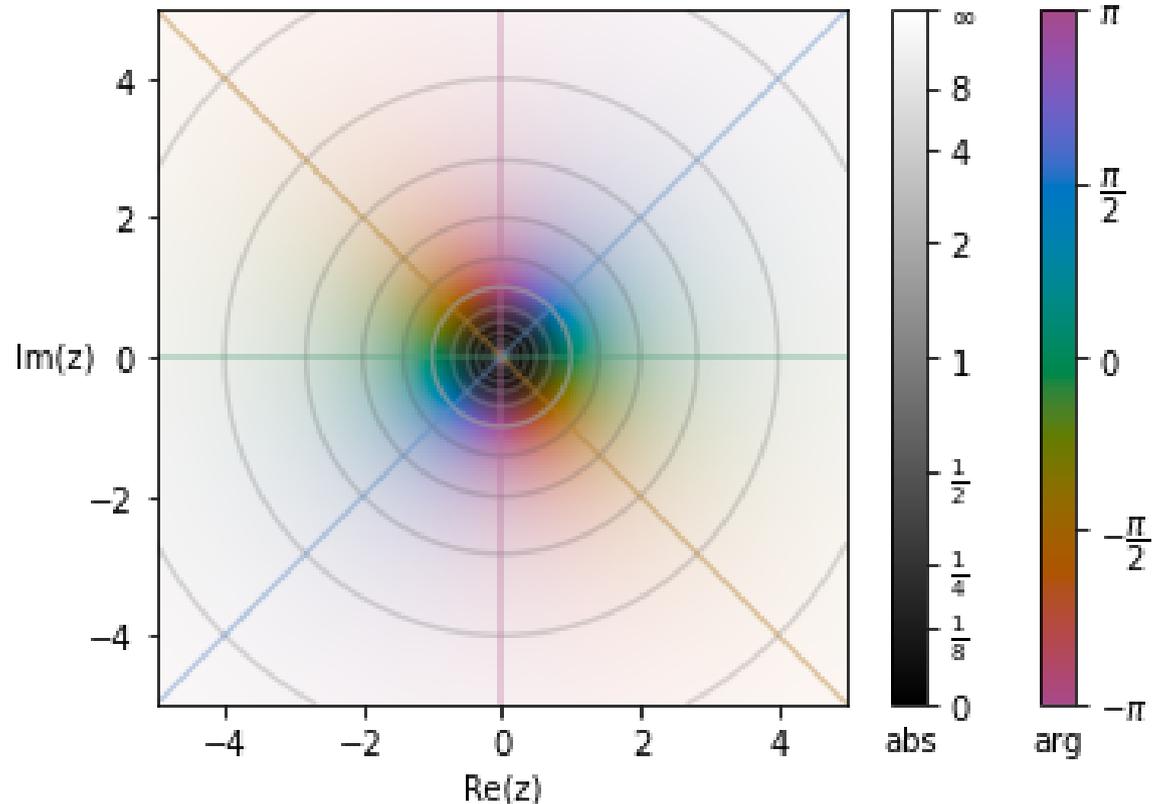
(  $|f(z)| = |z|^2$  και  $\text{Arg} f(z) = 2\text{Arg} z$  )

## Κώδικας Python

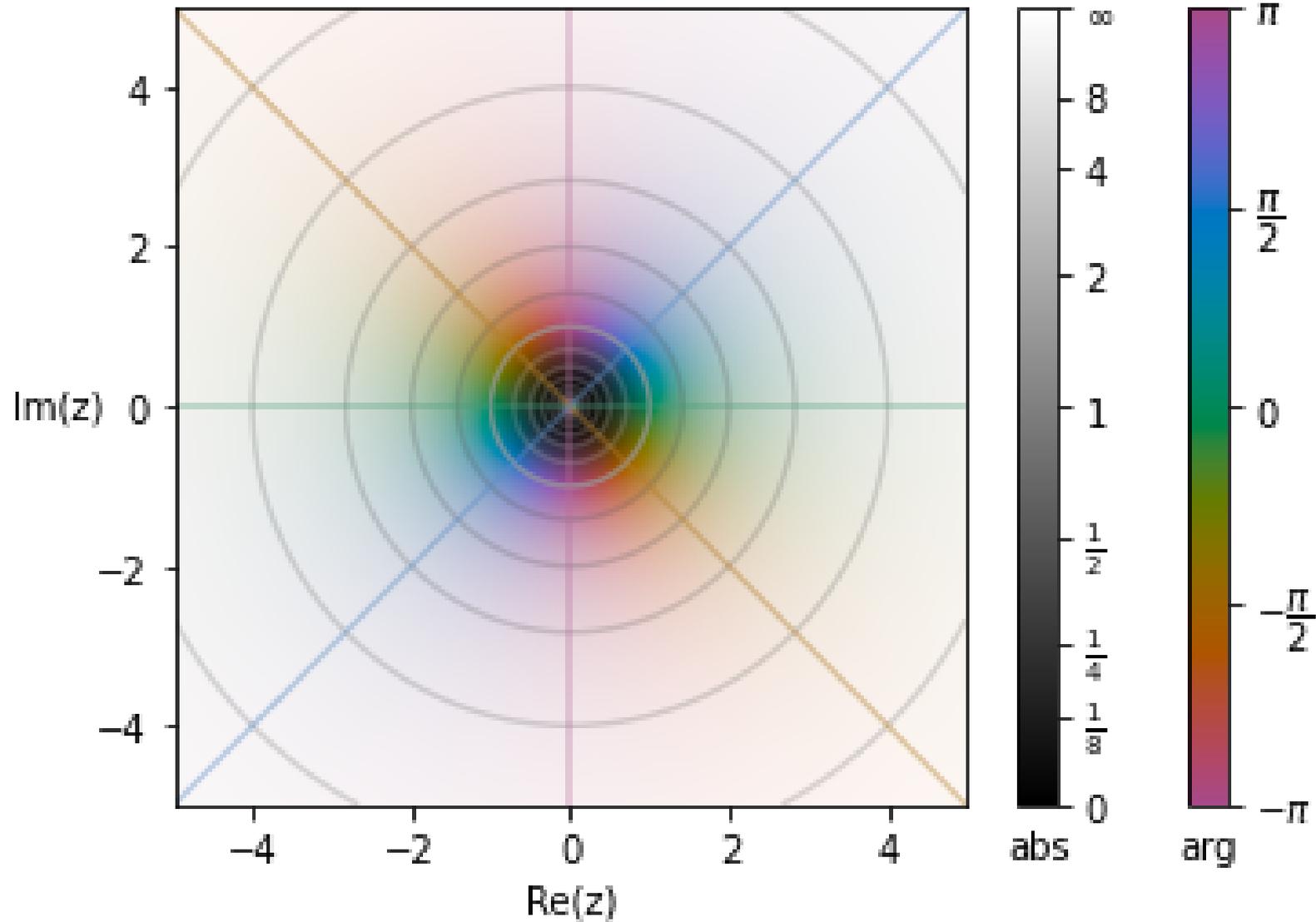
```
import cplot
import numpy as np
```

```
def f(z): return z**2
```

```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



$$f(z) = z^2 = r^2 e^{2i \text{Arg}(z)}$$



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

$$\text{π.χ. } f(z) = z^3 = r^3 e^{3i \text{Arg}(z)}$$

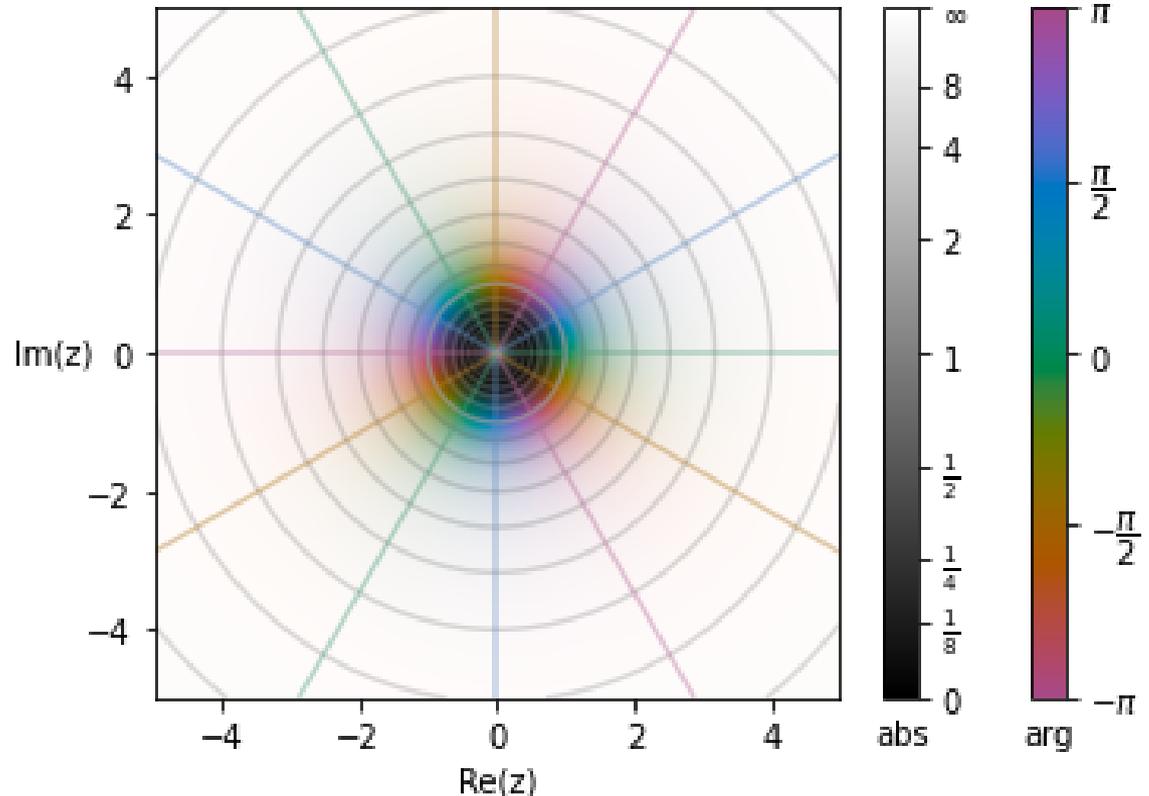
$$(|f(z)| = |z|^3 \text{ και } \text{Arg } f(z) = 3\text{Arg } z)$$

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
```

```
def f(z): return z**3
```

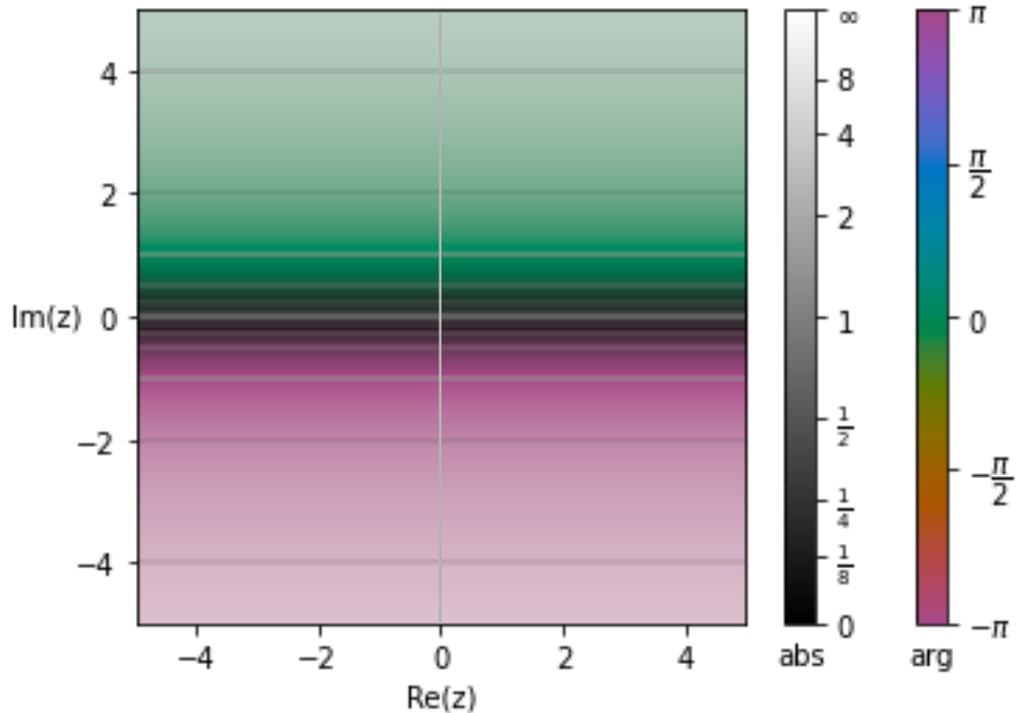
```
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

## Δραστηριότητα

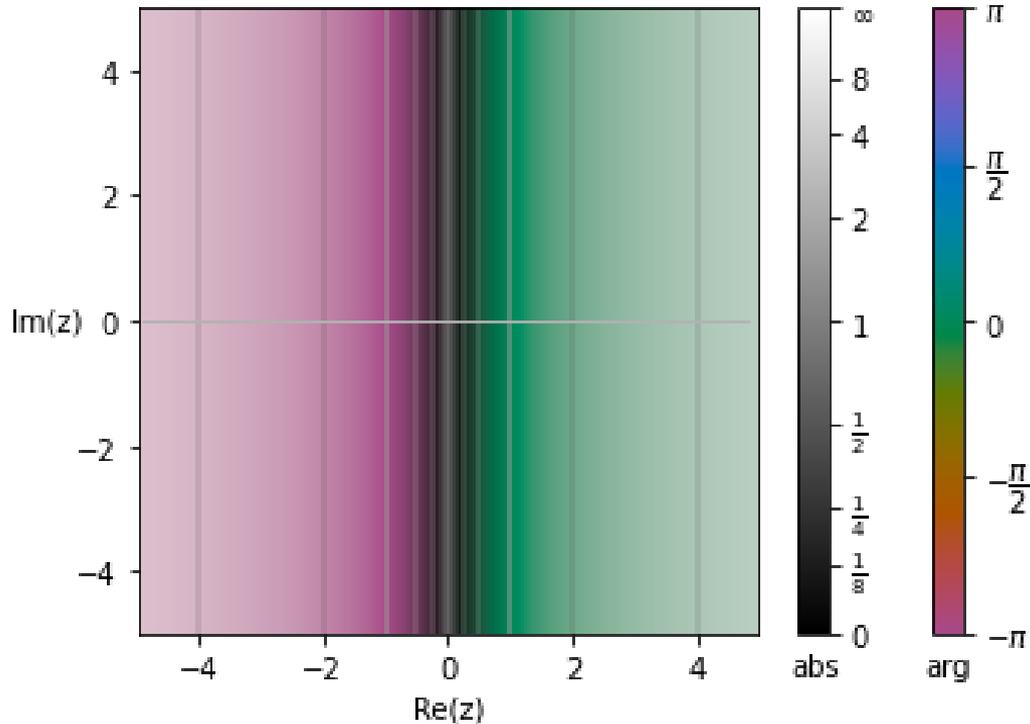
Ποια (μπορεί να) είναι η συνάρτηση που αναπαριστάται στο διάγραμμα;



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

## Δραστηριότητα

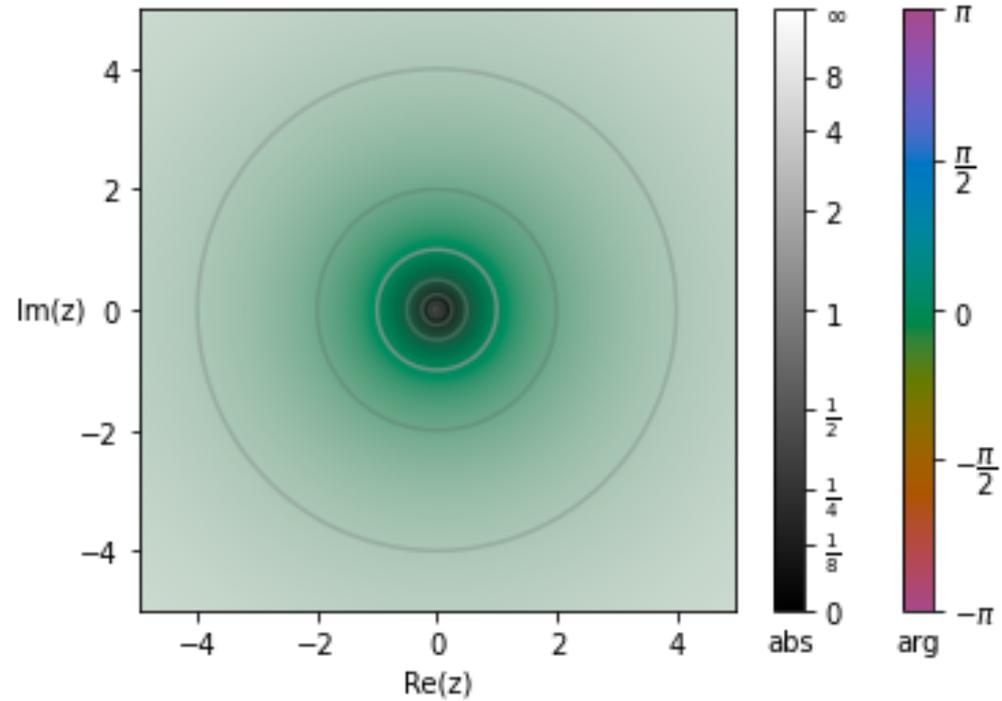
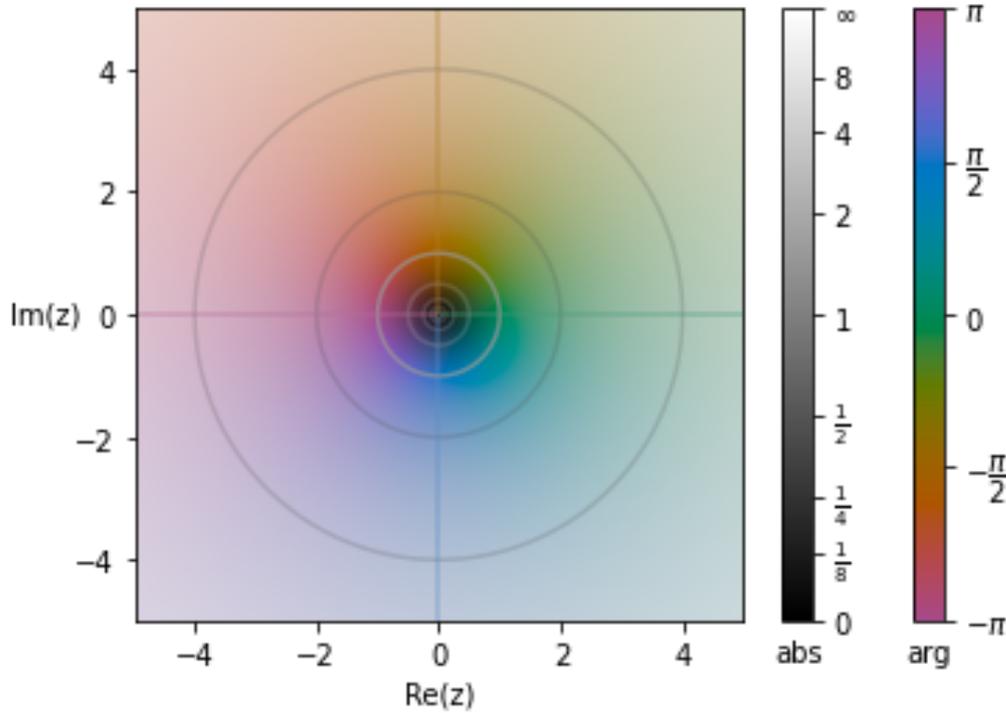
Ποια (μπορεί να) είναι η συνάρτηση που αναπαριστάται στο διάγραμμα;



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

## Δραστηριότητα

Ποιες (μπορεί να) είναι οι συναρτήσεις που αναπαριστώνονται στα διαγράμματα;



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

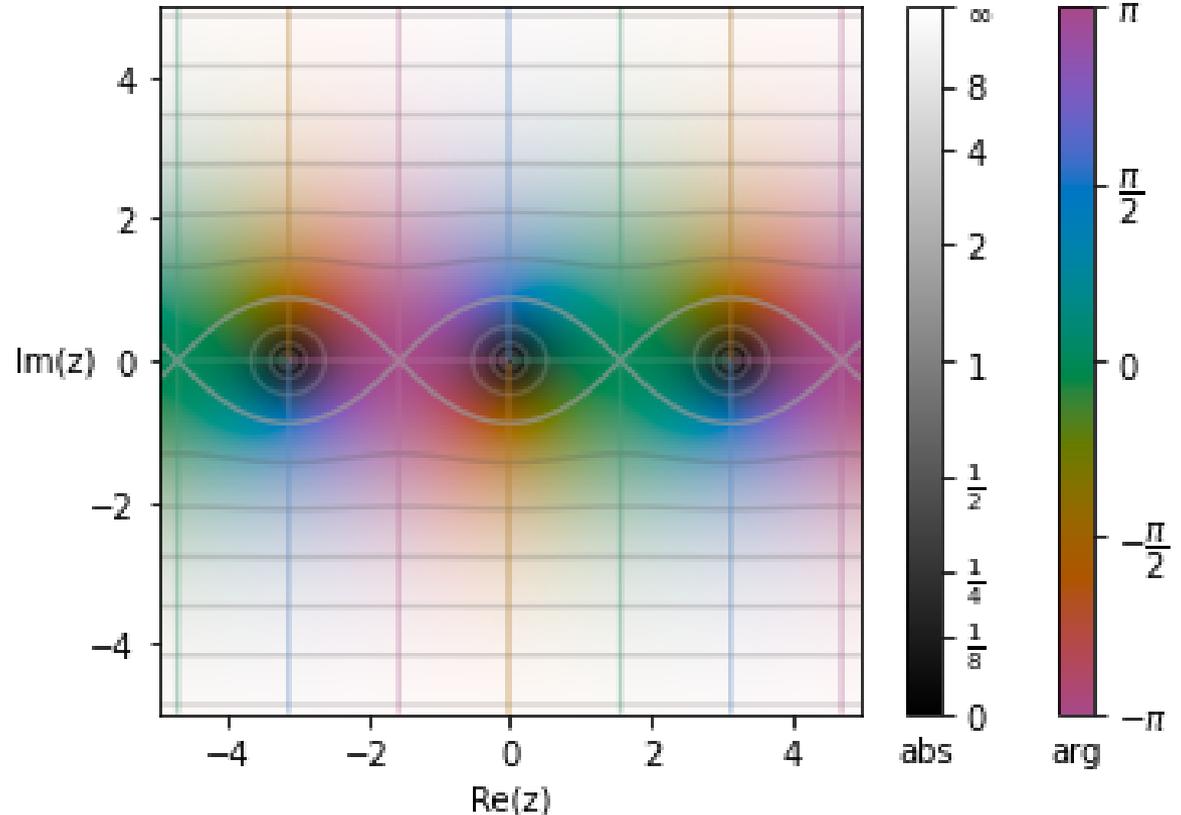
$$\text{π.χ. } f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

- $\sin(z + 2\pi) = \sin z$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\sin z| = +\infty$ .
- $\sin z = 0 \leftrightarrow z = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.sin, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



## Σημείωση

Προσέξτε πως η περιοδικότητα της  $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ , αντανακλάται στις χρωματικές εναλλαγές της  $\text{Im}z = 0$ .

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

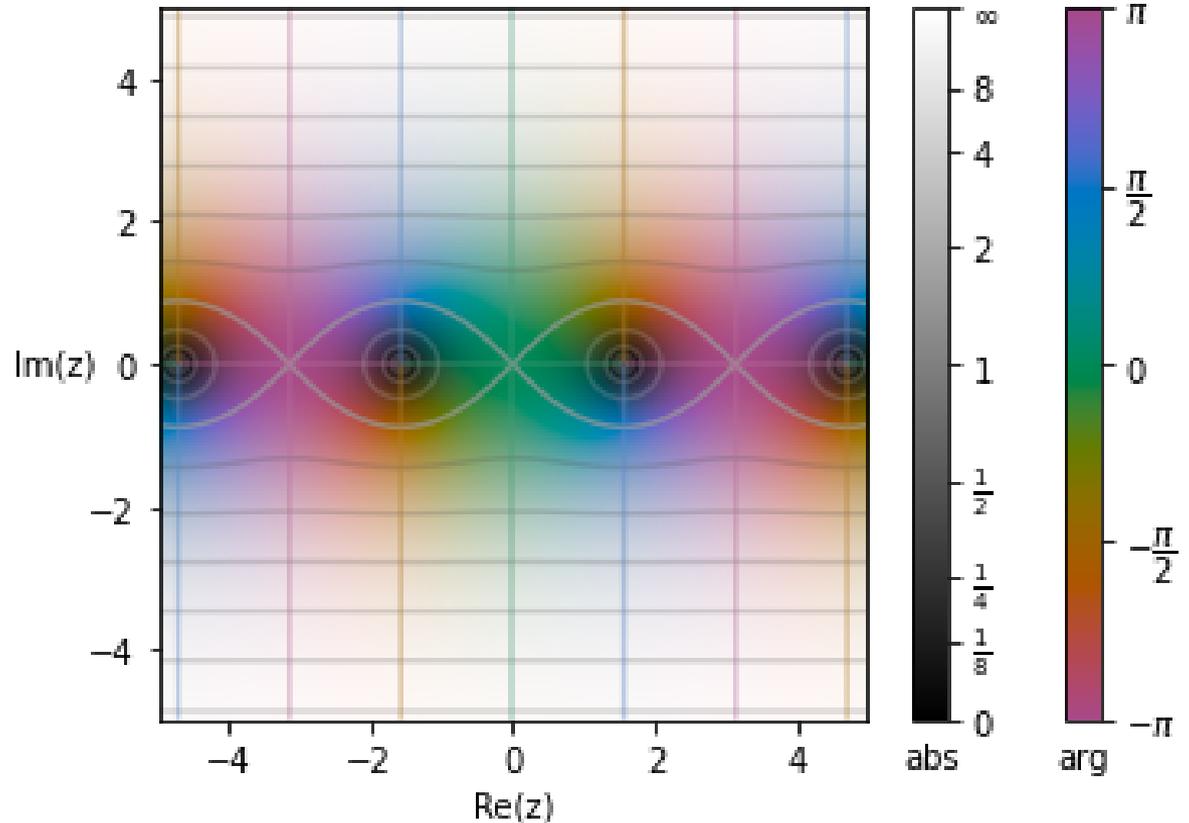
$$\text{π.χ. } f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

- $\cos(z + 2\pi) = \cos z$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} |\cos z| = +\infty$ .
- $\cos z = 0 \leftrightarrow z = \kappa\pi + \pi/2, \kappa \in \mathbb{Z}$ .
- $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$  (συμμετρία ως προς  $x'$ )

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.cos, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



## Σημείωση

Προσέξτε πως η περιοδικότητα της  $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$ , αντανακλάται στις χρωματικές εναλλαγές της  $\text{Im}z = 0$ .

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

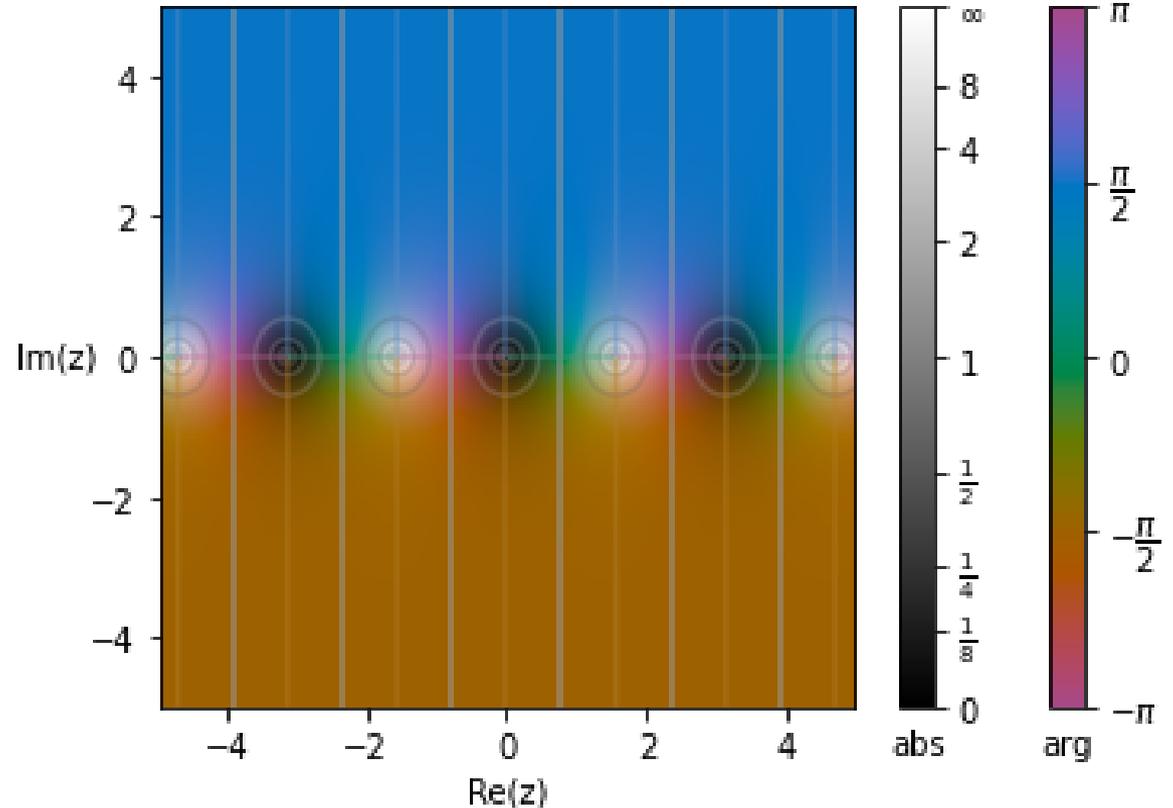
π.χ.  $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

- $\tan(z + \pi) = \tan z$
- $\tan z = 0 \leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} \tan z = i$ .
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan z = -i$ .
- $\overline{\tan z} = \tan \bar{z}$

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
```

```
plt = cplot.plot(np.tan, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

π.χ.  $f(z) = e^z = e^x e^{iy}$

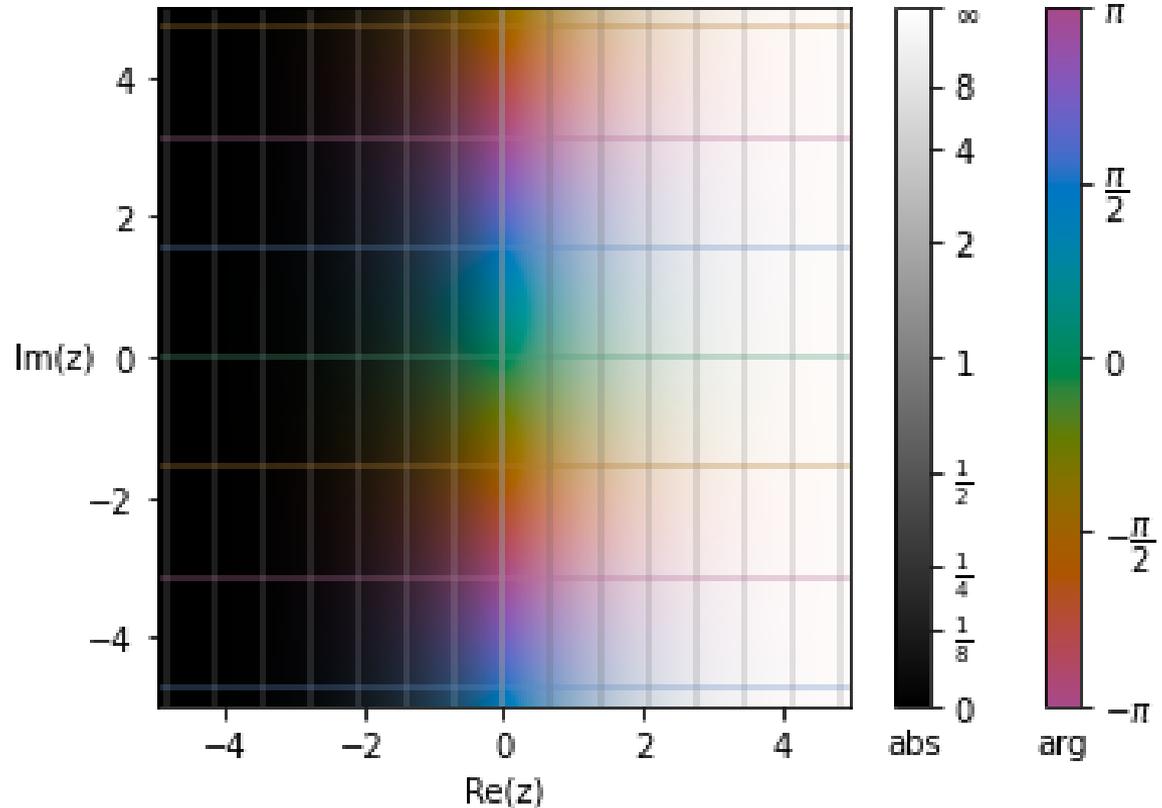
(  $|f(z)| = e^{\text{Re}z}$  και  $\text{Arg} f(z) = \text{Im} z$  )

$f(z + 2\pi i) = f(z)$

## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np

plt = cplot.plot(np.tan, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

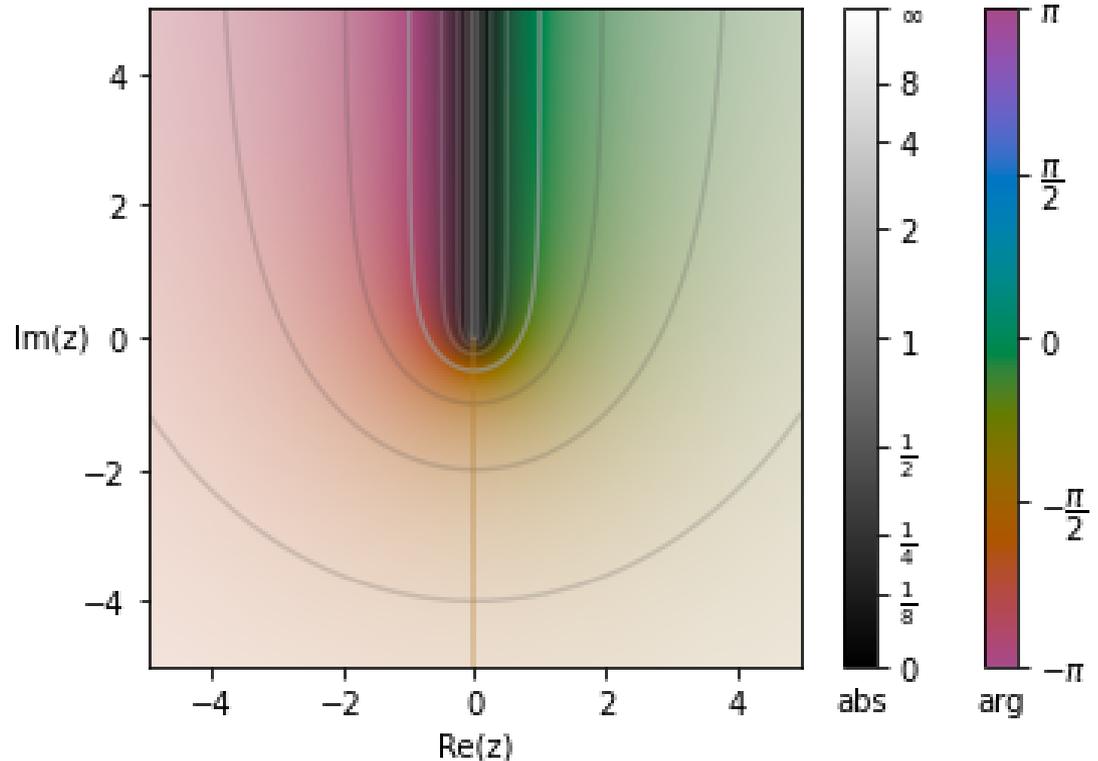
Μία τρίτη επιλογή είναι η σχεδίαση πάνω στο μιγαδικό επίπεδο καμπυλών με σταθερή τιμή στο  $|f(z)|$  και συμπληρωματικό χρωματικό κώδικα για την αναπαράσταση του ορίσματος  $\text{Arg}(f(z))$ .

π.χ.  $f(z) = z - i|z|$

## Κώδικας Python

```
import cplot
def f(z): return z - 1j *abs(z)

plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Η περίπτωση των πλειονότιμων συναρτήσεων είναι πιο ενδιαφέρουσα καθώς δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν με αυτόν τον τρόπο όλοι οι κλάδοι τους.

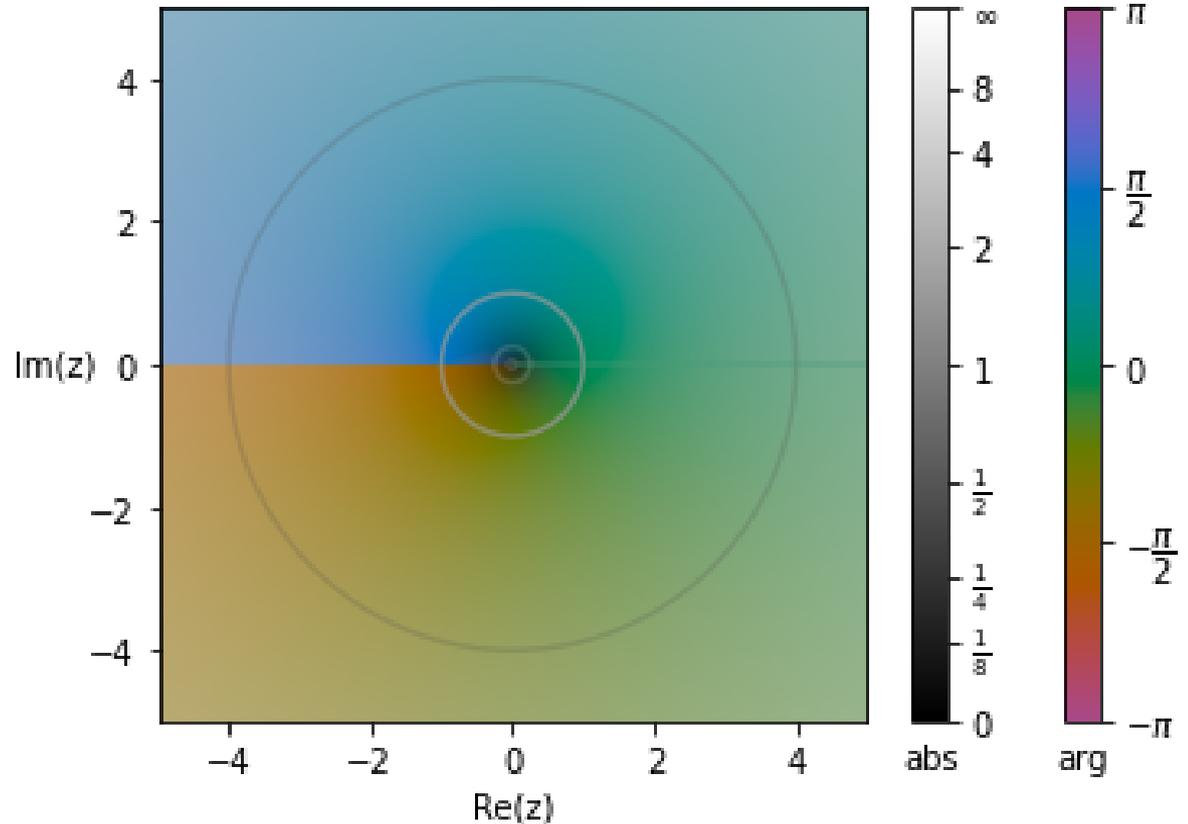
π.χ.  $f(z) = \sqrt{z}$

Η  $f$  έχει δύο εικόνες για κάθε  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ .

Η μία είναι η  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  και η άλλη είναι η  $f(z) = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2} = \sqrt{r}e^{i(\varphi/2 + \pi)}$

Από αυτές, στο σχήμα παρουσιάζεται μόνο η πρωτεύουσα τιμή,  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$  η οποία ορίζεται για  $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .

Όπως περιμέναμε είναι  $-\pi/2 < \text{Arg } f(z) \leq \pi/2$  ( $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$ , άρα  $-\pi/2 < \text{Arg } z / 2 \leq \pi/2$ ). Επίσης, παρουσιάζεται εμφανώς η ασυνέχεια κατά μήκος της ημιευθείας  $x \leq 0$ .



## Κώδικας Python

```
import cplot
def f(z): return z**0.5
plt = cplot.plot(f, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

Η περίπτωση των πλειονότιμων συναρτήσεων είναι πιο ενδιαφέρουσα καθώς δεν είναι δυνατόν να αναπαρασταθούν με αυτόν τον τρόπο όλοι οι κλάδοι τους.

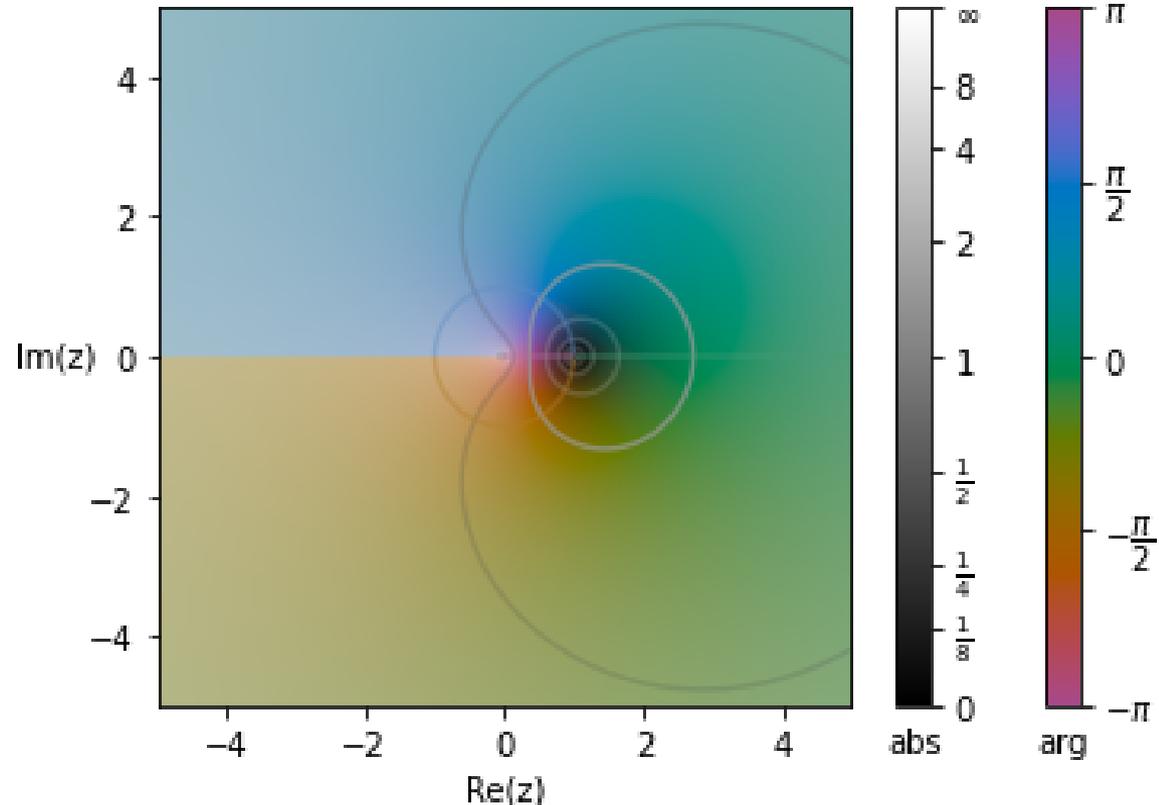
π.χ.  $f(z) = \log z$ .

Η  $f$  έχει άπειρες εικόνες για κάθε  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ :

$$\log z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Και κάθε μία από αυτές έχει όρισμα  $\arg(\log z) = \tan^{-1}[(\varphi + 2k\pi) / \ln|z|]$ .

Από τις εικόνες, στο σχήμα παρουσιάζεται μόνο η πρωτεύουσα τιμή  $\text{Log } z$ , που έχει όρισμα  $\text{Arg } f(z)$  στο  $(-\pi, \pi]$ .

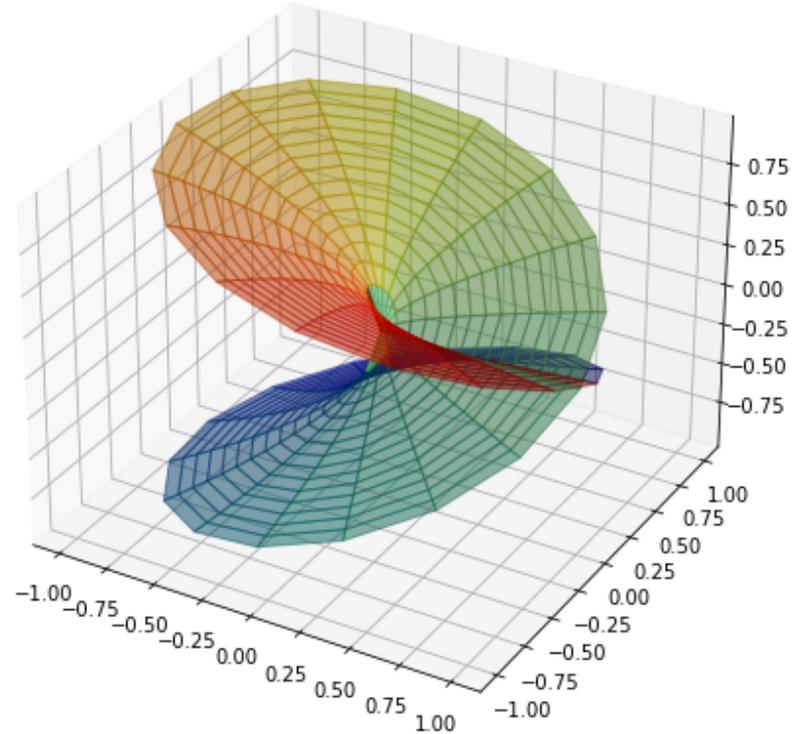
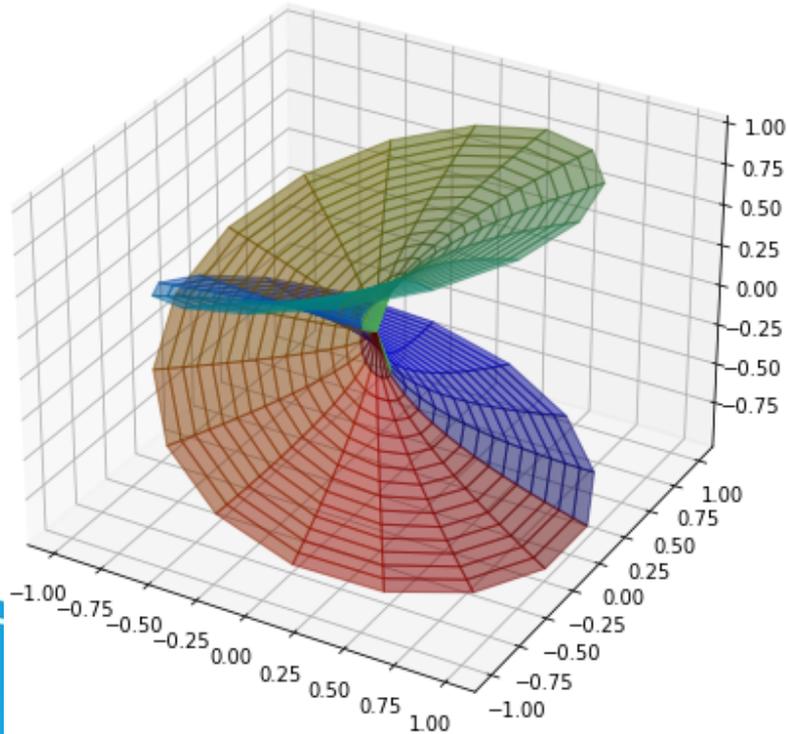


## Κώδικας Python

```
import cplot
import numpy as np
plt = cplot.plot(np.log, (-5.0, +5.0, 400), (-5.0, +5.0, 400))
plt.show()
```

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

Στο σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα του  $\operatorname{Re} f$  και  $\operatorname{Im} f$  της δίτιμης συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z}$ .



# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο C

## Κώδικας Python

```
import numpy
from matplotlib import cm, colors
from matplotlib import pyplot as plt

branching_number = 2

Nr = 16
Ntheta = 32

# compute the theta,R domain
theta = numpy.linspace(0,2*numpy.pi*branching_number, Ntheta)
r = numpy.linspace(0,1,Nr)
Theta, R = numpy.meshgrid(theta,r)

z = R*numpy.exp(1j*Theta)

# compute  $w^2 = z$ . THE KEY IDEA is to pass the exponentiation by 1/2 into
exp().
w = numpy.sqrt(R)*numpy.exp(1j*Theta/2)
```

## Κώδικας Python (συνέχεια)

```
# color by argument
arguments = numpy.angle(w)
norm = colors.Normalize(arguments.min(), arguments.max())
color = cm.jet(norm(arguments))

fig = plt.figure(figsize=(16,8))

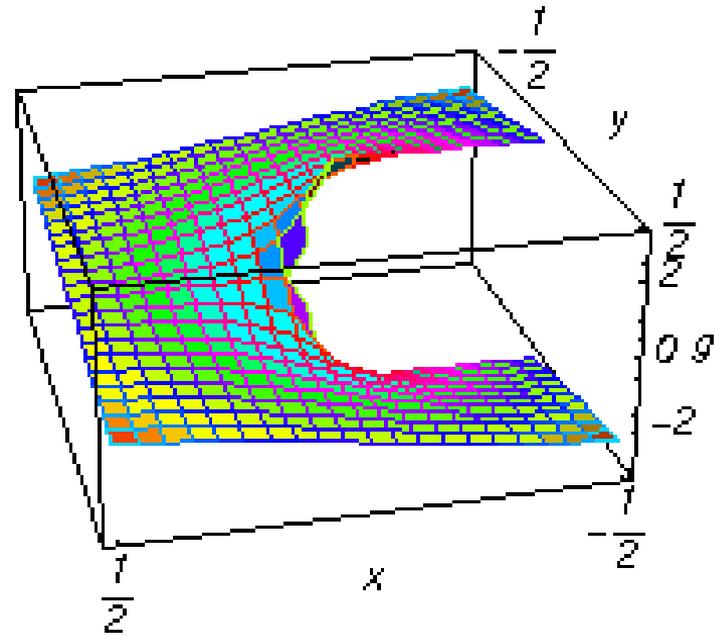
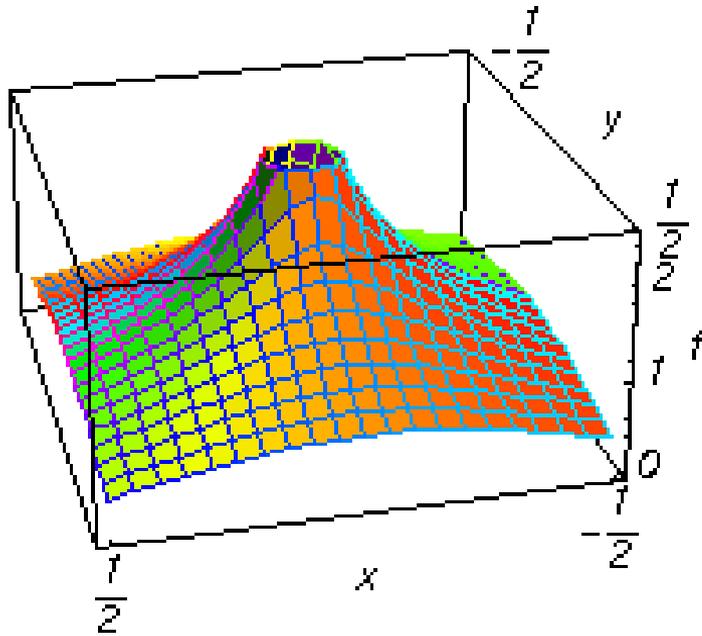
# plot the real part
ax_real = fig.add_subplot(1,2,1,projection='3d')
ax_real.plot_surface(z.real, z.imag, w.real,
                    rstride=1, cstride=1, alpha=0.5, facecolors=color)

# plot the imaginary part
ax_imag = fig.add_subplot(1,2,2,projection='3d')
ax_imag.plot_surface(z.real, z.imag, w.imag,
                    rstride=1, cstride=1, alpha=0.5, facecolors=color)
```

Πηγή: <https://gist.github.com/cswiercz/1fde0a82f8e9e1b0660a>

# Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων στο $\mathbb{C}$

Στο σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα του  $\operatorname{Re}(f)$  και  $\operatorname{Im}(f)$  της συνάρτησης  $f(z) = \operatorname{Log} z$ ,  $z \in \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .



# Όριο και συνέχεια μιγαδικών συναρτήσεων



# Ανοικτά και κλειστά σύνολα στο $\mathbb{C}$

## Χρήσιμοι ορισμοί

Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται **ανοικτό** αν για κάθε  $z \in A$ , υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , τέτοιος ώστε  $D_\varepsilon(z) \subseteq A$ . Υπόδειγμα ανοικτού συνόλου είναι ο ανοικτός δίσκος.

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Ένα σημείο  $z_0 \in \mathbb{C}$  ονομάζεται **συνοριακό σημείο** του  $A$  αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το  $z_0$  περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του  $A$  και τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο  $A$ . Το σύνολο  $\partial A$  των συνοριακών σημείων του  $A$  ονομάζεται **σύνορο του  $A$** .

Ένα υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται **κλειστό** αν περιέχει το σύνορό του  $\partial A$ . Υπόδειγμα κλειστού συνόλου είναι ο κλειστός δίσκος.

## Σημείωση

Οι έννοιες ανοικτό και κλειστό δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Στη μιγαδική ανάλυση, ένα σύνολο που δεν είναι ανοικτό δεν είναι απαραίτητως κλειστό όπως για παράδειγμα ο ημιανοικτός δίσκος. Ιδιαίτερα, μπορεί ένα σύνολο να είναι ταυτόχρονα και ανοικτό και κλειστό, όπως το ίδιο το  $\mathbb{C}$  (που το σύνορό του είναι το κενό σύνολο άρα προφανώς το περιέχει).

# Σημείο συσσώρευσης και μεμονωμένο σημείο χωρίου στο $\mathbb{C}$

## Ορισμός (σημείο συσσώρευσης)

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Ένα σημείο  $z_0$  ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του συνόλου  $A$  όταν κάθε ανοικτός δίσκος  $D_r(z_0)$  περιέχει ένα (τουλάχιστον) σημείο του  $A$  διαφορετικό από το  $z_0$ . Ένα σημείο  $z_0$  του  $A$ , το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης, ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του  $A$ .

Με απλά λόγια: Τα σημεία συσσώρευσης είναι όλα τα σημεία στα οποία υπάρχει δυνατότητα προσέγγισης με ακολουθία σημείων από το εσωτερικό του συνόλου. Αν δεν υπάρχει τέτοια δυνατότητα τότε το σημείο είναι μεμονωμένο.

Επιπλέον: Είναι αξιοσημείωτο ότι ο χαρακτηρισμός του σημείου συσσώρευσης αφορά σημεία του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία δεν ανήκουν απαραίτητα στο ίδιο το σύνολο.

Ιδιαίτερα, προσέχουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό όλα τα σημεία του συνόρου ενός ανοικτού συνόλου είναι επίσης σημεία συσσώρευσης.

# Όριο μιγαδικής συνάρτησης

## Ορισμός (όριο)

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $z_0 \in \mathbb{C}$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ως όριο το μιγαδικό αριθμό  $s$  καθώς το  $z$  τείνει στο  $z_0$  (γράφουμε  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = s$ ), αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , τέτοιο ώστε

$$|f(z) - s| < \varepsilon \text{ για κάθε } |z - z_0| < \delta.$$

Μία ομοιότητα του παραπάνω ορισμού με τον ορισμό του ορίου στο  $\mathbb{R}$ , είναι πως και στις δύο περιπτώσεις, το σημείο στο οποίο ζητείται το όριο δεν είναι απαραίτητα σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Μία αξιοσημείωτη διαφορά είναι πως, ενώ στο  $\mathbb{R}$  οι πιθανές κατευθύνσεις με τις οποίες μπορεί να προσεγγιστεί το σημείο είναι δύο (από αριστερά ή από δεξιά) στην μιγαδική εκδοχή είναι άπειρες (από όλες τις κατευθύνσεις και όχι απαραίτητα κατά μήκος ευθείας).

# Ασκήσεις στον ορισμό του ορίου

1. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} z^2$

**Λύση**

Έστω  $\delta > 0$ , και  $|z - i| < \delta$ . Τότε  $|z - i| |z + i| < \delta |z + i|$  ή  $|z^2 + 1| < \delta |z + i|$

Όμως,  $|z + i| = |z - i + 2i| \leq |z - i| + 2 = (\delta + 2)$ , δηλαδή  $|z^2 + 1| < \delta(\delta + 2)$ .

Παρατηρούμε ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  (η θετική λύση της  $\delta(\delta + 2) = \varepsilon$ ) τέτοιο ώστε

$$|z^2 + 1| < \varepsilon, \text{ για κάθε } |z - i| < \delta.$$

Συμπεραίνουμε ότι  $\lim_{z \rightarrow i} z^2 = -1$ .

# Ασκήσεις στον ορισμό του ορίου

2. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$

## Λύση

Παρατηρούμε ότι αν  $z = x \in \mathbb{R}$ , τότε  $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{x}{x} = 1$  και  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

Ενώ, αν  $z = iy, y \in \mathbb{R}$ , τότε  $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{yi}{-yi} = -1$  και  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$ .

Αν υπήρχε το όριο της συνάρτησης στο 0, τότε θα έπρεπε να παίρνει την ίδια τιμή, είτε το  $z$  προσεγγίζει το 0 από τον πραγματικό άξονα, είτε όταν το προσεγγίζει από το φανταστικό άξονα.

Καθώς, από τα παραπάνω φαίνεται ότι αυτό δεν ισχύει, το όριο δεν υπάρχει.

# Ασκήσεις στον ορισμό του ορίου

## Δραστηριότητα

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ .

## Υπόδειξη

Ελέγξτε τις τιμές της συνάρτησης όταν το  $z$  προσεγγίζει το 0 από τη διχοτόμο του  $1^{\text{ου}} - 3^{\text{ου}}$  και τη διχοτόμο του  $2^{\text{ου}} - 4^{\text{ου}}$  τεταρτημορίου.

## Παρατήρηση

Είναι φανερό πως ο υπολογισμός ορίων με τον ορισμό δεν είναι απλή υπόθεση. Για την ακρίβεια, αναδεικνύεται η ανάγκη της αντικατάστασης της τιμής στη συνάρτηση που θα οδηγούσε στον άμεσο υπολογισμό.

Όπως ακριβώς και στην πραγματική ανάλυση, θα δούμε ότι αυτό είναι δυνατό για τις *συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις*.

# Αλγεβρικές ιδιότητες ορίων

## Πρόταση

Έστω  $A \subseteq \mathbb{C}$  και  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  δύο μιγαδικές συναρτήσεις και  $z_0$  ένα σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Αν υπάρχουν τα όρια των  $f(z)$  και  $g(z)$ , στο  $z_0$ , τότε, θα υπάρχουν επίσης τα όρια των  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\lambda f$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $f/g$  και ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \lambda f(z) = \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}, \text{ αν } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0.$$

# Συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις

## Ορισμός

Μία μιγαδική συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , ονομάζεται **συνεχής σε ένα σημείο  $z_0 \in A$**  όταν υπάρχει το όριο της  $f$  στο  $z_0$  και ισχύει  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Η συνάρτηση  $f$  ονομάζεται **συνεχής στο  $A$**  όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $z_0 \in A$ .

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

## Πρόταση

Μία μιγαδική συνάρτηση  $f = u + iv : A \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$  αν και μόνο αν οι πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  είναι συνεχείς στο σημείο  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

# Συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις

Αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

1.  $f(z) = \operatorname{Re} z$  (συνεχής στο  $\mathbb{C}$ )
2.  $f(z) = \operatorname{Im} z$  (συνεχής στο  $\mathbb{C}$ )
3.  $f(z) = |z|$  (συνεχής στο  $\mathbb{C}$ )
4. Κάθε πολυωνυμική  $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . (συνεχής στο  $\mathbb{C}$ )
5. Κάθε ρητή συνάρτηση  $f(z) = P(z) / Q(z)$  (συνεχής στο  $\mathbb{C} - \{\text{ρίζες } Q(z)\}$ )
6. Η συνάρτηση  $f(z) = e^z$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{C}$ .
7. Ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου ( $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg}(z)$ ) είναι συνεχής στο  $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .
8. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\tan z$ ,  $\cot z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$ ,  $\tanh z$ ,  $\coth z$  είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

# Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

Όπως και στην πραγματική ανάλυση, έτσι και στη μιγαδική, ισχύουν οι εξής προτάσεις:

## Πρόταση 1

Έστω  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$  δύο μιγαδικές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{C}$ , οι οποίες είναι συνεχείς σε ένα σημείο  $z_0 \in A$ . Τότε οι συναρτήσεις  $f + g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\lambda f$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  και  $f/g$  είναι ομοίως συνεχείς στο  $z_0$ .

## Πρόταση 2

Έστω δύο μιγαδικές συναρτήσεις  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $g: B \rightarrow \mathbb{C}$  με τις ιδιότητες:  $f(A) \subseteq B$ , η  $f$  είναι συνεχής σε ένα σημείο  $z_0 \in A$  και η  $g$  είναι συνεχής στο σημείο  $f(z_0) \in B$ . Τότε, η σύνθεση  $(g \circ f)(z) = g(f(z)): A \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο  $z_0$ .

# Ασκήσεις στο όριο

1. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z - i}$

**Λύση**

# Ασκήσεις στο όριο

1. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z - i}$

**Λύση**

$$\text{Είναι } \frac{z^4 - 1}{z - i} = \frac{(z^2 - 1)(z^2 + 1)}{z - i} = \frac{(z^2 - 1)(z + i)(z - i)}{z - i} = (z^2 - 1)(z + i).$$

$$\text{Συνεπώς, } \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 - 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} (z^2 - 1)(z + i) = (i^2 - 1)(i + i) = -4i.$$

Σημείωση

Στην τελευταία αντικατάσταση χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια των πολυωνυμικών συναρτήσεων.

# Ασκήσεις στο όριο

2. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$

**Λύση**

# Ασκήσεις στο όριο

2. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$

## Λύση

Παρατηρούμε ότι  $\lim_{z \rightarrow i} (z + i) = 2i \neq 0$ , συνεπώς  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i} = \frac{i^4 - 1}{i + i} = \frac{1 - 1}{2i} = 0$ .

# Ασκήσεις στο όριο

3. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i}$

**Λύση**

# Ασκήσεις στο όριο

3. Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i}$

## Λύση

Παρατηρούμε ότι  $iz^3 - 1 = -[(iz)^3 + 1] = -(iz + 1)((iz)^2 - iz + 1) = -i(z - i)(-z^2 - iz - 1)$ .

Συνεπώς,  $\frac{iz^3 - 1}{z - i} = -i(-z^2 - iz - 1)$  και  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = -i$ .

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

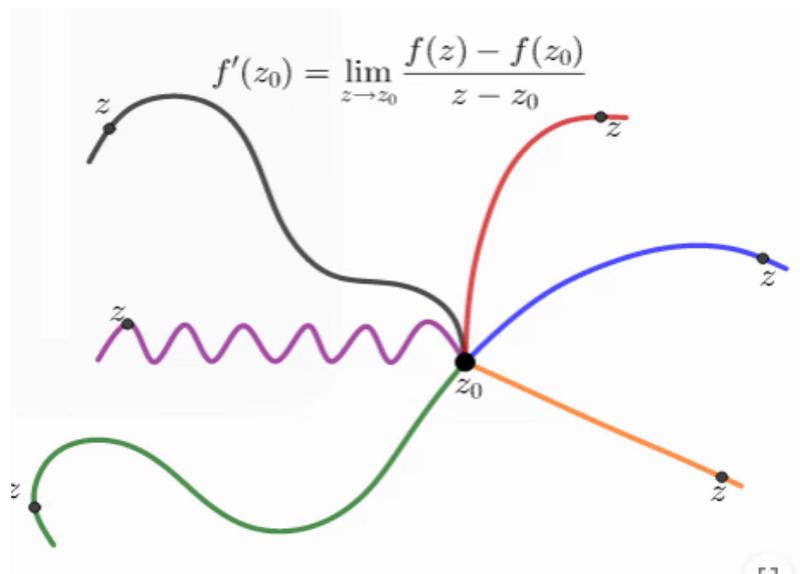
# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Έστω  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  και  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Η παράγωγος της  $f$  στο  $z_0$ , ορίζεται να είναι το όριο:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Ο ορισμός είναι αυτούσιος με αυτόν της πραγματικής ανάλυσης, με τη διαφορά πως τα ποσά που εμπλέκονται είναι μιγαδικοί αριθμοί. Ιδιαίτερα, το όριο πρέπει να γίνει αντιληπτό ως όριο στο  $\mathbb{C}$ , δηλαδή καθώς το  $z$  πλησιάζει στο  $z_0$  από κάθε διεύθυνση και με κάθε πιθανό τρόπο.

Όπως και στην πραγματική ανάλυση, η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια της μιγαδικής συνάρτησης.



# Γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι μια πραγματική παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η παράγωγος στο  $x_0 \in A$ ,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ερμηνεύεται γεωμετρικά ως η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ , στο  $(x_0, f(x_0)) \in C_f$ .

Στην περίπτωση ωστόσο, όπου  $A \subseteq \mathbb{C}$  και  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ , αναλυτική συνάρτηση στο  $A$ , τότε η παράγωγος,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

δεν έχει ανάλογη γεωμετρική σημασία καθώς δεν υπάρχει κατανοητή γραφική αναπαράσταση του  $A$  και του  $f(A)$  στο ίδιο σύστημα αξόνων. Παρόλα αυτά, εξακολουθούμε να μπορούμε για  $z$  “κοντά” στο  $z_0$ , να προσεγγίσουμε γραμμικά την  $f$  γράφοντας  $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$  ή ισοδύναμα

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

## Παράδειγμα 1

Αν  $f(z) = z$ , και για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$ , είναι:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} 1 = 1.$$

## Παράδειγμα 2

Αν  $f(z) = z^n$ , και για κάθε  $z_0 \in \mathbb{C}$ , είναι:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι **οι συναρτήσεις  $f(z) = z$  και  $f(z) = z^n$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{C}$ .**

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

## Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση  $f(z) = \bar{z}$  δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο  $z_0$  του  $\mathbb{C}$ , καθώς το όριο

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$  δεν υπάρχει. Πράγματι, αν  $z - z_0 = \lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $\bar{z} - \bar{z}_0 = \overline{z - z_0} = \lambda$ , και

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda} = 1,$$

ενώ αν  $z - z_0 = \lambda i$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $\bar{z} - \bar{z}_0 = \overline{z - z_0} = \overline{\lambda i} = -\lambda i$ , και  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\lambda i}{\lambda} = -i$ .

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Με χρήση του ορισμού, αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες αν και είναι συνεχείς:

1.  $f(z) = \operatorname{Re} z$
2.  $f(z) = \operatorname{Im} z$
3.  $f(z) = |z|$

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Περαιτέρω, αποδεικνύεται ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες:

1. Κάθε κλάδος της συνάρτησης  $f(z) = z^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , είναι παραγωγίσιμος και

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Σημείωση

Μπορούμε να γράψουμε  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$  με την επιπλέον διευκρίνηση πως λαμβάνονται οι ίδιοι κλάδοι των συναρτήσεων  $z^\alpha$  και  $z^{\alpha-1}$ .

2. Η συνάρτηση  $f(z) = e^z$  είναι ολόμορφη με  $(e^z)' = e^z$ .

3. Κάθε κλάδος του λογαρίθμου  $\log z = \ln|z| + i \arg z$  είναι παραγωγίσιμος στο  $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$

και

$$(\log z)' = 1/z$$

# Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

5. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\tan z$ ,  $\cot z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$ ,  $\tanh z$ ,  $\coth z$  είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και ισχύουν οι γνώριμοι τύποι από την πραγματική ανάλυση.

Ενδεικτικά:  $(\sin z)' = \cos z$

$$(\tan z)' = 1/\cos^2 z = 1 + \tan^2 z$$

$$(\sin^{-1} z)' = (1 - z^2)^{-1/2}$$

$$(\tan^{-1} z)' = 1/(1 + z^2)$$

$$(\sinh z)' = \cosh z$$

$$(\tanh z)' = 1/\cosh^2 z = 1 - \tanh^2 z$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\cot z)' = 1/\sin^2 z = -1 - \cot^2 z$$

$$(\cos^{-1} z)' = -(1 - z^2)^{-1/2}$$

$$(\cot^{-1} z)' = 1/(-1 - z^2)$$

$$(\cosh z)' = \sinh z$$

$$(\coth z)' = -1/\sinh^2 z = 1 - \coth^2 z$$

# Κανόνες παραγώγισης

Για την παραγώγιση του αθροίσματος, του γινομένου, του λόγου και της σύνθεσης συναρτήσεων, ισχύουν οι γνωστοί κανόνες από την πραγματική ανάλυση.

## Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(z) = e^{z^2}$

**Λύση:** Τόσο η  $z^2$  όσο και η  $e^z$  είναι παραγωγίσιμες σε όλο το  $\mathbb{C}$ , άρα το ίδιο θα συμβαίνει και για τη σύνθεσή τους. Υπολογίζουμε:

$$f'(z) = (e^{z^2})' = e^{z^2} (z^2)' = 2ze^{z^2}$$

# Κανόνες παραγώγισης

## Άσκηση 1

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$

# Κανόνες παραγώγισης

## Άσκηση 2

Να βρεθεί η παράγωγος της  $f(z) = e^z \cos z$

# Κανόνες παραγώγισης

Για τα μιγαδικά όρια, ισχύει ο κανόνας De L' Hospital ακριβώς όπως και στην πραγματική ανάλυση.

## Άσκηση 3

Να βρεθεί το όριο  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$

## Λύση

# Η παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες

Ο E. Wigner, έλαβε το 1963 βραβείο Νόμπελ Φυσικής, για τη συμβολή του στη θεωρία του ατομικού πυρήνα και των στοιχειωδών σωματιδίων, ειδικότερα μέσω της ανακάλυψης και εφαρμογής θεμελιωδών αρχών συμμετρίας. Σε ένα άρθρο του, με τίτλο

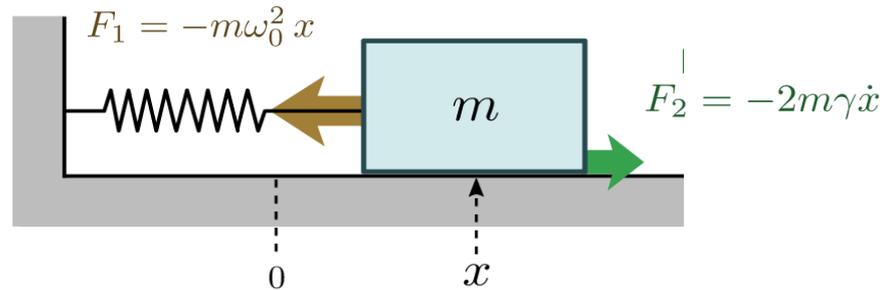
**“Η παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες”,**

καταλήγει στο συμπέρασμα ότι “η τεράστια χρησιμότητα των μαθηματικών στις φυσικές επιστήμες είναι κάτι που συνορεύει με το μυστηριώδες και δεν υπάρχει κάποια λογική εξήγηση για αυτήν”.

Η αφορμή για αυτήν την αναζήτηση είναι προφανής: Η φυσική επιστήμη εκφράζεται και αναπτύσσεται με μαθηματικά που είτε προϋπήρχαν και βρήκαν την εφαρμογή τους (όπως οι πολλαπλότητες Calabi-Yau στη θεωρία των χορδών) είτε αναπτύχθηκαν για αυτόν ακριβώς το σκοπό (μερικές δ.ε., σχετικότητα κλπ).

Κάποια ακόμα παραδείγματα για αυτήν την “παράλογη” αποτελεσματικότητα προσφέρονται από τη μιγαδική ανάλυση.

# Παράδειγμα 1: Φθίνουσα ταλάντωση 1/2

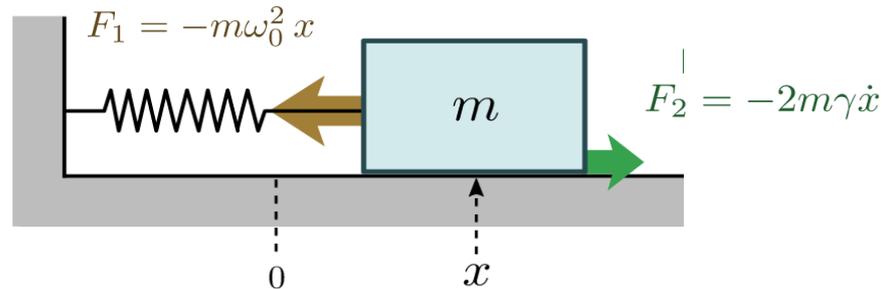


Από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, είναι:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t) = -2m\gamma \frac{dx}{dt} - m\omega_0^2 x(t)$ .

Η εξίσωση, αυτή γράφεται  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$ .

Το σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση με πλάτος που μειώνεται με το χρόνο, άρα αναζητούμε λύσεις της μορφής  $\alpha(t)\sin(\omega t)$  ή  $\alpha(t)\cos(\omega t)$ . Η αντικατάσταση  $x(t) = \alpha(t)\sin(\omega t)$  ή  $x(t) = \alpha(t)\cos(\omega t)$ , θα οδηγούσε σε μία εξίσωση που θα περιείχε και το  $\sin(\omega t)$  και το  $\cos(\omega t)$  και η οποία θα λυνόταν σχετικά δύσκολα.

# Παράδειγμα 1: Φθίνουσα ταλάντωση 2/2



Αντίθετα, με την αντικατάσταση  $x(t) = e^{-i\omega t}$  έχουμε ότι  $x'(t) = -i\omega e^{-i\omega t}$  και  $x''(t) = -\omega^2 e^{-i\omega t}$ , και η λύση βρίσκεται εύκολα:

$$z_{\pm} = e^{-i\omega_{\pm} t}, \quad \omega_{\pm} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

**Η μιγαδική λύση  $z_{\pm}(t)$  δεν έχει φυσική σημασία αλλά κάθε μία μιγαδική λύση αποδίδει ένα ζεύγος πραγματικών λύσεων ( $\text{Re } z_{\pm}(t)$ ,  $\text{Im } z_{\pm}(t)$ ) που έχουν φυσική σημασία.**

Πράγματι, αν  $f(t)$  είναι λύση μίας δ.ε. της μορφής  $x'' + bx' + cx = 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ , τότε λύση θα αποτελεί και η συζυγής συνάρτηση  $f^*(t)$  (καθώς  $b, c \in \mathbb{R}$ ), αλλά και κάθε γραμμικός συνδυασμός, άρα λύσεις θα αποτελούν και οι  $\text{Re } f(t) = (f(t) + f^*(t)) / 2$ ,  $\text{Im } f(t) = (f(t) - f^*(t)) / 2i$ .

# Παράδειγμα 2: Εξίσωση του Schrödinger

Στην εξίσωση του Schrödinger, η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι της μορφής  $\Psi = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ , η οποία αποτελεί το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης  $\Psi = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ . Η τελευταία δεν έχει φυσική σημασία αλλά το πραγματικό της μέρος έχει.

$\Psi$  = wavefunction for electron

$\Psi = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right)$

Using the deBroglie relationship  
 $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = k$   $p$  = electron momentum

Using the Planck relationship  
 $\omega = \frac{h\omega}{h} = \frac{E}{h}$   $E$  = electron energy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik\Psi = \frac{ip}{\hbar} \Psi$$

The momentum connection

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega\Psi = \frac{-iE}{\hbar} \Psi$$

The energy connection

$$P_{operator} \Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p\Psi$$

$$E_{operator} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

$$P_{operator} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$E_{operator} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \leftarrow \text{particle} \quad E \quad \rightarrow \text{wave} \quad hv = \hbar\omega$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Schrodinger equation for free particle in one dimension.

# Ολόμορφη συνάρτηση



# Ολόμορφη συνάρτηση

## Ορισμός

Μια μιγαδική συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  λέγεται **ολόμορφη (ή αναλυτική)** στο  $z_0 \in A$ , αν υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , έτσι ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη για όλα τα σημεία που ανήκουν στον ανοικτό  $D(z_0, \varepsilon)$ .

Η  $f$  ονομάζεται ολόμορφη:

- στο ανοικτό σύνολο  $U$  αν είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο του  $U$ .
- στο κλειστό σύνολο  $U$  αν είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό υπερσύνολο του  $U$ .

Πρακτικά, αν η  $f$  είναι ολόμορφη στο  $U$ , τότε για κάθε  $z_0 \in U$ , υπάρχει η παράγωγος  $f'$

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Θεώρημα (Εξισώσεις Cauchy – Riemann)

Αν μια μιγαδική συνάρτηση  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι ολόμορφη στο  $U$ , τότε το  $u$  και το  $v$  έχουν πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τα  $x$  και  $y$ , και

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

Ισοδύναμα, οι εξισώσεις CR γράφονται

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Θεώρημα (Εξισώσεις Cauchy – Riemann)

Αν μια μιγαδική συνάρτηση  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι ολόμορφη στο  $U$ , τότε το  $u$  και το  $v$  έχουν πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τα  $x$  και  $y$ , και

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

(ισοδύναμα, οι εξισώσεις CR γράφονται  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ ).

## Απόδειξη

Αν η  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι ολόμορφη, τότε για κάθε  $z_0 \in U$ , υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \text{ Αν } h = x + iy, \text{ τότε}$$

$$f'(z_0) = \lim_{x + iy \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + x, y_0 + y) - u(x_0, y_0)}{x + iy} + \lim_{x + iy \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + x, y_0 + y) - v(x_0, y_0)}{x + iy}$$

Επιλέγοντας  $h = x \rightarrow 0$ , παίρνουμε  $f'(z_0) = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$  (I)

Επιλέγοντας  $h = iy \rightarrow 0$ , παίρνουμε  $f'(z_0) = (u_y(z_0) + i v_y(z_0))/i = -iu_y(z_0) + v_y(z_0)$  (II)

Από τις (I), (II) προκύπτει το ζητούμενο.

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

**Αντίστροφα**, αν οι συναρτήσεις  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  είναι παραγωγίσιμες ως πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών, έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και ισχύει ότι  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ , τότε η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη και

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -i(u_y(x, y) + iv_y(x, y)).$$

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ:

<https://personal.math.ubc.ca/%7Efeldman/m300/cauchyRiemann.pdf> (Theorem 3)

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

Μία ισοδύναμη έκφραση των εξισώσεων C – R

Έστω  $f = u + iv$ . Οι εξισώσεις Cauchy – Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  μπορούν να διατυπωθούν ως

$$i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Πράγματι,

$$i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow i \frac{\partial (u + iv)}{\partial x} = \frac{\partial (u + iv)}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Παράδειγμα 1

Έστω  $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ . Να δείξετε ότι  $(e^z)' = e^z$ .

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Παράδειγμα 1

Έστω  $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ . Είναι  $u(x, y) = e^x \cos y$  και  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  είναι παραγωγίσιμες ως πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών και ισχύει ότι

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x,$$

Συμπεραίνουμε ότι, η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = e^z$  είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη και  $(e^z)' = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$ , δηλαδή

$$(e^z)' = e^z.$$

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση του λογαρίθμου  $\text{Log}z = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ , όπου  $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}(y/x) \in (-\pi, \pi]$ .

Να δείξετε ότι  $(\text{Log } z)' = 1/z$ .

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Παράδειγμα 2

Έστω η συνάρτηση του λογαρίθμου  $\text{Log} z = \ln|z| + i\text{Arg}(z)$ , όπου  $\text{Arg}(z) = \tan^{-1}(y/x) \in (-\pi, \pi]$ .

Τότε  $(\mathbf{Log} z)' = \mathbf{1/z}$ . Πράγματι, αν  $z = x + iy$ , τότε  $\text{Log} z = u(x, y) + iv(x, y)$ , με

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \quad \text{και} \quad v(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$$

Οι συναρτήσεις  $u$  και  $v$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Καθώς οι εξισώσεις Cauchy – Riemann επαληθεύονται, συνάγουμε ότι η συνάρτηση  $\text{Log} z$  είναι παραγωγίσιμη και πώς

$$(\mathbf{Log} z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + iy} = \frac{1}{z}.$$

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Πρόταση

Αν η  $f(z)$  είναι αναλυτική σε ένα χωρίο  $U$  και επιπλέον  $f'(z) = 0$  για κάθε  $z \in U$ , τότε η  $f(z)$  είναι σταθερή.

## Απόδειξη

Η  $f$  είναι αναλυτική και  $f'(z) = 0$  άρα  $0 = u_x(z) + iv_x(z) = -i(u_y(z) + iv_y(z))$ ,  $z \in U$  ή

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) = u_y(x, y) = v_x(x, y) = 0.$$

Από την πραγματική ανάλυση γνωρίζουμε πως αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών έχει μηδενικές μερικές παραγώγους τότε είναι σταθερή. Συμπεραίνουμε ότι:

$$u(x, y) = c_1 \text{ και } v(x, y) = c_2$$

ή ισοδύναμα, ότι  $f(z) = c_1 + ic_2 = \text{σταθερή}$ .

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(z) = z^3$ . Να βρείτε το  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$  και να επαληθεύσετε ότι ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy – Riemann.

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Ασκήσεις

2. Επαληθεύστε ότι οι εξισώσεις Cauchy – Riemann ισχύουν για τις συναρτήσεις  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ,  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ . Δείξτε ότι  $u, v$  είναι τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη μιας αναλυτικής συνάρτησης  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Ασκήσεις

3. Για την αναλυτική συνάρτηση  $f$ , γνωρίζουμε ότι  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$ . Να βρείτε έναν πιθανό τύπο για την συνάρτηση  $f$ .

# Εξισώσεις Cauchy – Riemann

## Ασκήσεις

4. Για την αναλυτική συνάρτηση  $f$ , γνωρίζουμε ότι  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + 12xy - 12x$ . Να βρείτε έναν πιθανό τύπο για την συνάρτηση  $f$ .

