

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \mathcal{L}(f)(s) e^{sx} ds$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός

Εστω μία πραγματική συνάρτηση $F: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $L[f(x)](s) = F(s)$, τότε η f καλείται **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** της F . Γράφουμε,

$$f = L^{-1}(F).$$

Παρατηρήσεις

(α) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν ορίζεται πάντα (π.χ. δεν ορίζεται για τις συναρτήσεις με $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$.)

(β) Τύπος του Mellin: Αν η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, έχει μετασχηματισμό Laplace την $F(s) = L(f)(s)$, τότε

$$L^{-1}(F)(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{sx} ds$$

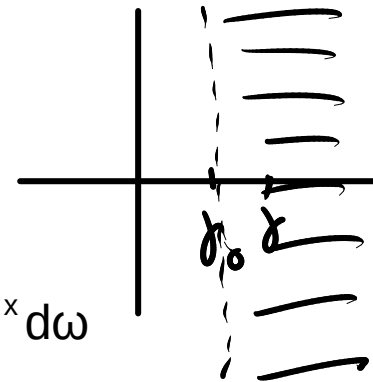
όπου $\gamma \in \mathbb{R}$, οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που εκλέγεται έτσι ώστε η κατακόρυφος $\text{Re } s = \gamma$, να περιέχει όλες τις ανωμαλίες της $F(s)$ στο αριστερό της μέρος.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Αν $s = \gamma + i\omega$, $L(f)(s) = F(s)$, και $g(x) = H(x)f(x)e^{-\gamma x}$, τότε g συνεχής για $x \neq 0$ και

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x)f(x)e^{-\gamma x}] e^{-i\omega x} dx = \hat{g}(\omega)$$

Άρα, για $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{i\omega x} d\omega \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + i\omega) e^{(\gamma + i\omega)x} d\omega$



Θέτουμε $\gamma + i\omega = s \Rightarrow ds = i d\omega$ και βρίσκουμε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{sx} ds, \quad x > 0.$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Η εφαρμογή του τύπου $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} L(f)(s) e^{sx} ds$,

δεν είναι εύκολο να γίνει.

Ενδεικτικά: <https://www.youtube.com/watch?v=i2LoInAnpaM> ή https://www.youtube.com/watch?v=_yY39Xz70Lo

Ωστόσο, αποδεικνύεται το:

Θεώρημα (Lerch's Theorem)

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις και $L(f) = L(g)$, τότε είναι $f = g$.

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <https://math.stackexchange.com/questions/1090201/equality-of-laplace-transform>

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συνάρτησεις με μετασχηματισμό Laplace $g(s) = 1/s^2, s > 0$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t$, τότε $L(f)(s) = 1/s^2, s > 0$.

Άρα πρέπει να είναι $L^{-1}(g)(t) = t$. Γιατί, αν υπήρχε και άλλη συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω. $L(g)(s) = 1/s^2, s > 0$, τότε θα ήταν $L(g) = L(f)$ και από το Θεώρημα Lerch θα ήταν $g = f$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις με μετασχηματισμό Laplace $g(s) = 1/(s - \alpha)$, $s > \alpha$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = e^{\alpha t}$, τότε $L(f)(s) = 1/(s - \alpha)$, $s > \alpha$

Άρα, $L^{-1}(g)(t) = e^{\alpha t}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις με μετασχηματισμό Laplace $g(s) = s/(s^2 + \alpha^2)$, $s > 0$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = \cos(\alpha t)$, τότε $L(f)(s) = s/(s^2 + \alpha^2)$, $s > 0$.

Άρα, $L^{-1}(g)(t) = \cos(\alpha t)$.

Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

Ιδιότητες

Έστω F, G είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(α) Γραμμικότητα

$$L^{-1}(\alpha \cdot F + \beta \cdot G) = L^{-1}(\alpha \cdot F) + L^{-1}(\beta \cdot G), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(β) Μετάθεση στο πεδίο συχνοτήτων

$$L^{-1}(F(s - \lambda))(t) = f(t) e^{\lambda t}, t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \text{ [αντ. } L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda)].$$

(γ) Μετάθεση στο πεδίο χρόνου:

$$L^{-1}(e^{-\lambda s} F(s))(t) = f(t - \lambda), t \geq 0, \lambda > 0 \text{ [αντ. } g(t) = f(t - \lambda), t \geq \lambda, L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s)].$$

Ιδιότητες αντίστροφου μετασχηματισμού

Ιδιότητες

Έστω F, G είναι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(δ) Διαστολή

$$L^{-1}(F(\lambda s))(t) = 1/\lambda f(t/\lambda), t \geq 0, \lambda > 0 \text{ [αντ. } g(t) = f(\lambda t), L(g)(s) = 1/\lambda \cdot F(s/\lambda), s \in (c\lambda, +\infty).]$$

(ε) Γινόμενο $t^n f(t)$.

$$L^{-1}((-1)^n F^{(n)})(t) = t^n f(t), t \geq 0 \text{ [αντ. } g(t) = t^n \cdot f(t), n \in \mathbb{N}, L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s), s \in (c, +\infty)].$$

(στ) Συνέλιξη:

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s))(t) = f * g(t).$$

Συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$	Μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
1	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$
t	$\frac{1}{s^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}, \operatorname{Re}(s) > \alpha$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}, \operatorname{Re}(s) > \alpha$
$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{\lambda t} \sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s - \lambda)^2 + \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > \lambda$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$e^{\lambda t} \cos(\alpha t)$	$\frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > \lambda$
$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > \alpha $

$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \operatorname{Re}(s) > \alpha $
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{\lambda t} f(t)$	$F(s - \lambda)$
$f(\lambda t)$	$\mathcal{L}[f(\lambda t)](s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \lambda > 0, s > c\lambda$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$
$f^{(k)}(t)$	$s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - \dots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
$f * g(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du$	$F(s) \cdot G(s)$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$, $s > 2$.

Λύση

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{(A+B)s - 2A - B}{(s-1)(s-2)}$$

$$(A+B)s - 2A - B = 1 \begin{cases} \rightarrow A+B=0 \Rightarrow B=-A=1 \\ \rightarrow -2A-B=1 \Rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s-1}\right)(x) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = -e^x + e^{2x}.$$

Ασκήσεις

2. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9}, s > 3$.

Λύση

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την ιδιότητα $L^{-1}(F(s - c))(t) = e^{ct}f(t)$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 6s + 9} = \frac{1}{(s-3)^2} \Rightarrow f(x) = te^{3t}$$

Ασκήσεις

3. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5}$, $s \in \mathbb{R}$.

Λύση

Υπόδειξη: Αξιοποιήστε την ιδιότητα $L^{-1}(F(s - c))(t) = e^{ct}f(t)$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{1}{s^2 - 2s + 1 + 4} = \frac{1}{(s-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} e^t \sin(2t)$$

$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$e^{\lambda t} \sin(at)$	$\frac{a}{(s-\lambda)^2 + a^2}$
$e^{\lambda t} f(t)$	$F(s-\lambda)$

Ασκήσεις

4. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}$, $s > 1$.

Λύση

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad \mathcal{L}^{-1}(F)(x) = t e^t$$

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$

$$\underline{e^{\lambda t} f(t)} \leftrightarrow F(s-\lambda)$$

Ασκήσεις

5. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, $s \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(t + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Ασκήσεις

6. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 3}, s > 3.$

Λύση

Ασκήσεις

7. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{s}{(s+1)^3}$, $s > -1$.

Λύση

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)^3} = \frac{s+1-1}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} \Rightarrow$$

$$t \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow f(t) = t e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 e^{-t} = t e^{-t} \left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

$$e^{\lambda t} f(t) \Leftrightarrow F(s-\lambda)$$

$$t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{2} \frac{2!}{(s+1)^3}$$

\rightarrow $\left(\frac{2!}{s^3}\right)$ όπου $s \rightarrow s+1$
 t^2 , $\rightarrow e^{-t} t^2$

Ασκήσεις

8. Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $F(s) = \frac{2s - 1}{s(s - 1)^2}$, $s > 1$.

Λύση

Ασκήσεις

9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4y = 0, \quad \underbrace{y'(0) = 1}, \quad \underbrace{y(0) = -1}.$$

Λύση

Υπόδειξη: $L(f'')(s) = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$

$$y'' + 4y = 0 \implies \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2\mathcal{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 4)\mathcal{L}(y) = -s + 1 \Leftrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1-s}{s^2+4}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} \implies y(t) = \frac{1}{2}\sin(2t) - \cos(2t).$$

Ασκήσεις

10. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + y = (t^2 - 1)e^t, y'(0) = 2, y(0) = 1.$$

είναι

$$L(y)(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \left(s + 4 + \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{s-1} \right)$$

(β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση

Υπόδειξη: Είναι $L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$ και $L(f'')(s) = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$

Ασκήσεις

11. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της εξίσωσης $y(t) = 1 + \int_0^t y(\omega) \cos(t - \omega) d\omega$,

είναι $L(y)(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 - s + 1)}$. (β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση: $F(s) = L(y)(s)$

$$y(t) = 1 + y * \cos(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + F(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(s) \left[1 - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = \frac{1}{s} \Rightarrow F(s) = \frac{s^2 + 1}{s \cdot (s^2 - s + 1)}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - s + 1} + \frac{1}{s \cdot (s^2 - s + 1)}$$

Ασκήσεις

12. (α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης της εξίσωσης $te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t-\omega)d\omega$.

είναι $L(y)(s) = \pm \frac{1}{s-a}, s > a$. (β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση

$$te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t-\omega)d\omega \Leftrightarrow te^{at} = y * y(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(te^{at})(s) = L(y)(s)^2 \Leftrightarrow L(y)(s) = \frac{1}{(s-a)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L(y)(s) = \pm \frac{1}{s-a} \Rightarrow y(t) = \pm e^{at}.$$

Ασκήσεις

13. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' - 2y = 1$, όπου $y = y(t)$, $t \geq 0$, και $y(0) = 1$.

Λύση

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 \mathcal{L}(y) - s y(0) - y'(0) = s^2 \mathcal{L}(y) - s - 1$$

Ασκήσεις

14. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y'' + y = \sin(2x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Λύση

$$y'' + y = \sin(2x) \Leftrightarrow s^2 F(s) - s - 1 + F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$y = y(x)$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow F(s) (s^2 + 1) = \frac{2}{s^2 + 4} + s + 1 \Leftrightarrow F(s) = \frac{2 + (s+1)(s^2+4)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$F(s) = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{\Gamma s + \Delta}{s^2 + 4} = A \frac{s}{s^2 + 1} + B \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + \Gamma \frac{s}{s^2 + 4} + \Delta \frac{1}{s^2 + 4}$$

Ασκήσεις

15. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Λύση

Ασκήσεις

16. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + z' = t$, $y'' - z = e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $z(0) = 0$.

Λύση

$$\mathcal{L}(y')(s) = s \mathcal{L}(y) - y(0)$$

Ασκήσεις

17. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = 2y + z$, $z' = -y + 2z$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$.

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = -1$$

Λύση

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2y + z \\ z' = -y + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} s \cdot F(s) - 1 = 2F(s) + G(s) \\ s \cdot G(s) + 1 = -F(s) + 2G(s) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (2-s)F + G = -1 \\ -F + (2-s)G = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}(y) = F \\ \mathcal{L}(z) = G \end{array} \left| \begin{array}{l} (1) : G = -1 - (2-s)F \\ (2) : -F - (2-s) - (2-s)^2 F = 1 \Leftrightarrow [1 + (2-s)^2] F(s) = 3-s \\ \Leftrightarrow F(s) = \frac{3-s}{(2-s)^2 + 1} = \frac{3}{(2-s)^2 + 1} - \frac{s}{(2-s)^2 + 1} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow y(t) = 3 \sin(t-\pi) - \cos(t-\pi) \quad \rightarrow 6-5s+5s^2$$

Αντίστροφα: $G(s) = -1 - (2-s) \cdot F(s) = \frac{-(2-s)^2 - 1 - (2-s) \cdot (3-s)}{(2-s)^2 + 1} =$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-10)$$

81 ± 80

$$= \frac{-2s^2 + 9s - 10}{(2-s)^2 + 1} = \frac{-2(s-2)(s-\frac{5}{2})}{(2-s)^2 + 1}$$

$$s_{1,2} = \frac{-9 \pm 1}{-4} \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{5}{2} \end{array} \right|$$

Ανο: $y' = 2y + z \Rightarrow z = y' - 2y \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = 3 \cos(t-\pi) + \sin(t-\pi) - 6 \sin(t-\pi) + 2 \cos(t-\pi)$$

$$\Rightarrow z(t) = 5 \cos(t-\pi) - 5 \sin(t-\pi)$$

Ασκήσεις

18. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + x = t$, $x' - y = 1$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

Λύση

Ασκήσεις

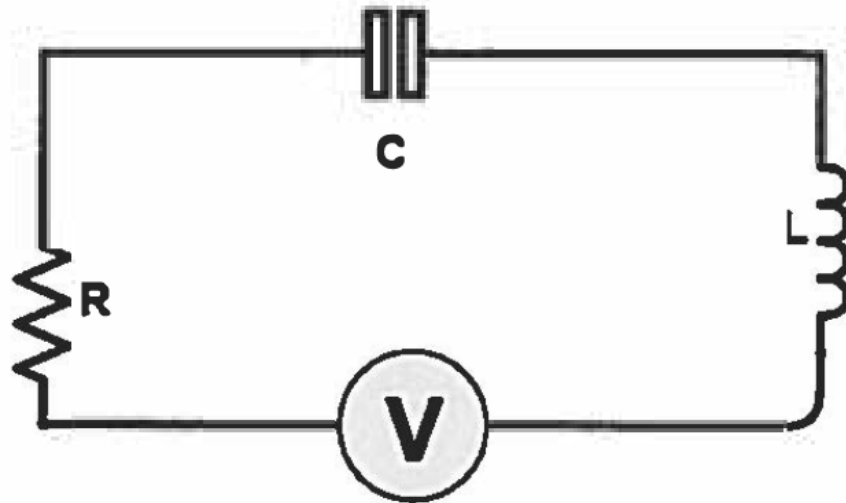
19. Να λυθεί η ολοκληροδιαφορική εξίσωση $y'(t) = e^{-t} + 2 \int_0^t y(\omega) e^{t-\omega} d\omega$, $t \geq 0$, $y(0) = 1$.

Λύση

Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

Ο μετασχηματισμός Laplace έγινε ιδιαίτερα δημοφιλής μέσα από τη χρήση του στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων από τον ηλεκτρολόγο μηχανικό Oliver Heaviside.

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace μπορούμε να αναλύσουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα για να βρούμε την ένταση του ρεύματος και τη μέγιστη χωρητικότητά του.



Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

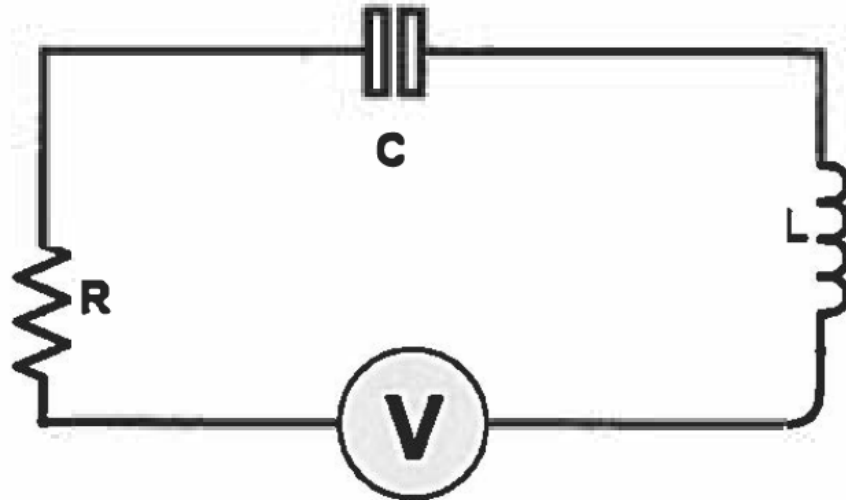
R σημαίνει αντίσταση που μετριέται σε Ohms.

L σημαίνει πηνίο που έχει επαγωγή μετρημένη σε Henrys.

C είναι ο πυκνωτής που έχει χωρητικότητα μετρημένη σε Farads.

V σημαίνει γεννήτρια ή μπαταρία και μετριέται σε Volt.

Q συμβολίζει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο του κυκλώματος και μετριέται σε Coulomb.



Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

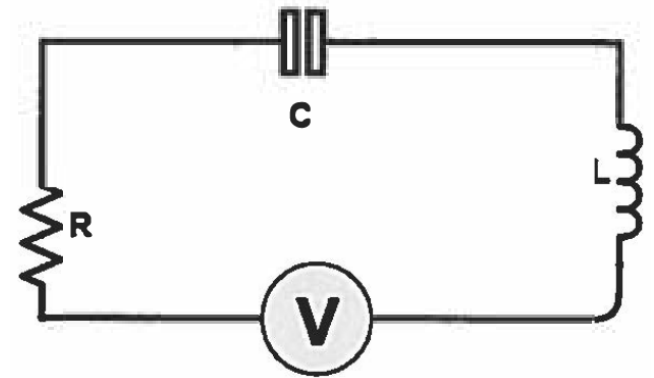
Θα βρούμε τη συνάρτηση που αποδίδει τα φορτία των πυκνωτών $Q(t)$ και την ένταση του ρεύματος $I(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου t .

Από το δεύτερο νόμο του Kirchhoff, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα όλων των διαφορών δυναμικού στους επιμέρους κλάδους ενός βρόχου ισούται με μηδέν. Ισοδύναμα:

$$V(t) = V_R(t) + V_C(t) + V_L(t).$$

Είναι

- $V_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot Q'(t)$,
- $V_C(t) = Q(t) / C$,
- $V_L(t) = L \cdot I'(t) = L \cdot Q''(t)$.



Προκύπτει η εξίσωση $LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t)$, όπου $Q(0) = 0$, και $Q'(0) = 0$.

Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t).$$

Για τα δεδομένα του κυκλώματος γράφουμε

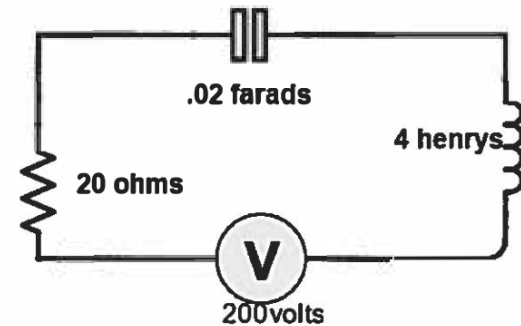
$$4Q''(t) + 20Q'(t) + \frac{1}{0,02}Q(t) = 200 \Leftrightarrow Q''(t) + 5Q'(t) + \frac{25}{2}Q(t) = 50.$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη και μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$L(Q)(s) = \frac{50}{s(s^2 + 5s + 25/2)}$$

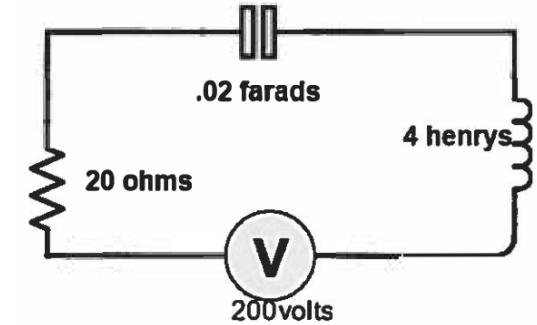
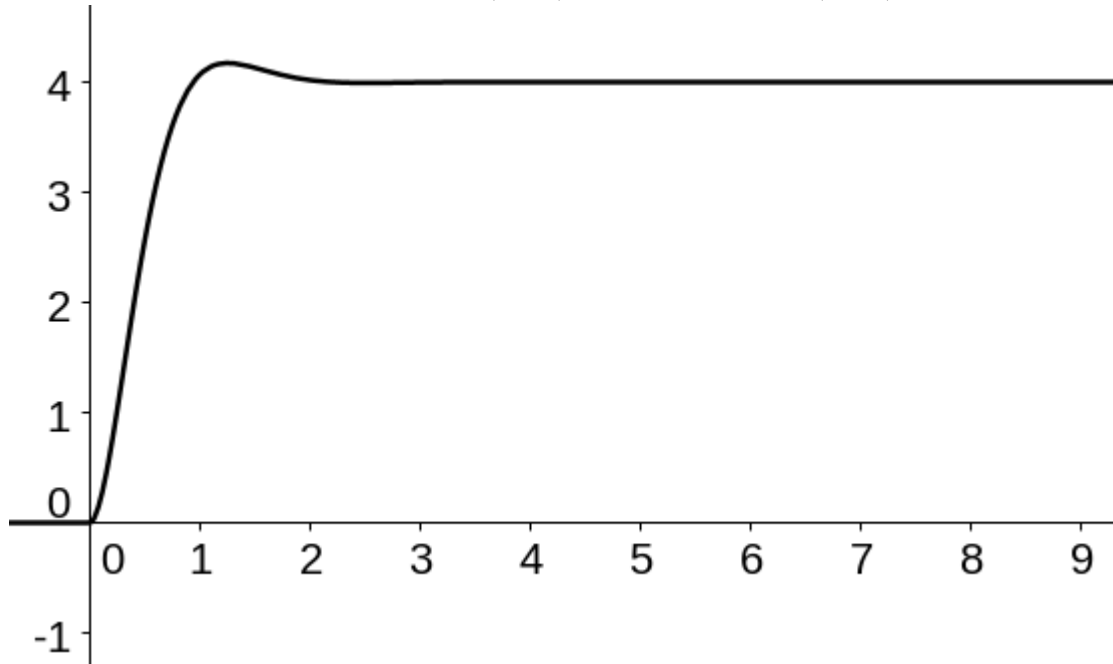
Και υπολογίζοντας τον αντίστροφο Laplace του δεξιού μέλους καταλήγουμε:

$$Q(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{5}{2}t\right) - 4e^{-\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$$



Εφαρμογή σε κύκλωμα RLC

$$Q(t) = 4 - 4e^{-\frac{5}{2}t} \cos\left(\frac{5}{2}t\right) - 4e^{-\frac{5}{2}t} \sin\left(\frac{5}{2}t\right)$$



Εντολή Geogebra για το διάγραμμα: $\text{An}[x \geq 0, 4 - 4e^{-(5x/2)} \cos(5x/2) - 4e^{-(5x/2)} \sin(5x/2)]$

Εφαρμογή στην ραδιενεργή διάσπαση

Όταν ένας πυρήνας διασπάται σε θυγατρικό πυρήνα, ο θυγατρικός πυρήνας μπορεί να είναι ραδιενεργός, και αποσυντίθεται σε έναν τρίτο πυρήνα, διαδικασία που συνεχίζεται μέχρι να φτάσει τελικά σε έναν σταθερό ισότοπο που δεν διασπάται. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως διαδοχική ραδιενεργή διάσπαση.

Για παράδειγμα, ο πυρήνας του Ραδίου (Ra) 226 με χρόνο ημιζωής 1.601 έτη, αποσυντίθεται σε Ραδόνιο (Rn) 222 και το τελευταίο, με χρόνο ημιζωής 3,82 ημέρες, διασπάται σε έναν πυρήνα πολώνιο (Po) 218, ο οποίος είναι επίσης ραδιενεργός, με χρόνο ημιζωής 3,05 λεπτά, και έτσι η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσει τελικά στον σταθερό πυρήνα μολύβδου (Pb) 208

Στόχος της μελέτης της διαδοχικής διάσπασης είναι ο εντοπισμός του πλήθους των ατόμων ή των πυρήνων κάθε στοιχείου τη χρονική στιγμή $t \geq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία της ραδιενεργής διάσπασης ολοκληρώνεται ύστερα από 3 μετατροπές. Συμβολίζουμε με $N_1(t)$, τον αριθμό των ατόμων των μητρικών στοιχείων σε χρόνο t που διασπώνται με ρυθμό λ_1 , με $N_2(t)$, το πλήθος των ενεργών θυγατρικών πυρήνων που με τη σειρά τους διασπώνται με ρυθμό λ_2 και με $N_3(t)$, το πλήθος των πυρήνων 3ης γενιάς.

Εφαρμογή στην ραδιενεργή διάσπαση

Είναι $N_1(t) = N_1(0) > 0$, $N_2(t) = 0$, $N_3(t) = 0$. Οι εξισώσεις που προσδιορίζουν την εξέλιξη της διαδικασίας είναι:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t), \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t), \quad \frac{dN_3(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t).^{(1)}$$

Η πρώτη διαφορική εξίσωση λύνεται εύκολα και δίνει: $N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t}$. Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στη δεύτερη και στην τρίτη βρίσκουμε:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1(0) [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

$$N_3(t) = N_1(0) \left[1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right]$$

Σημειώσεις;

(1) Η γενική περίπτωση περιγράφεται από τις εξισώσεις του Bateman (https://en.wikipedia.org/wiki/Radioactive_decay#Chain_of_any_number_of_decays)

(2) Μία γενικότερη περίπτωση όπου η διαδικασία διάσπασης ακολουθεί η βήματα μπορεί να βρεθεί στην δημοσίευση:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0009254184901888>

