

Μετασχηματισμός Laplace

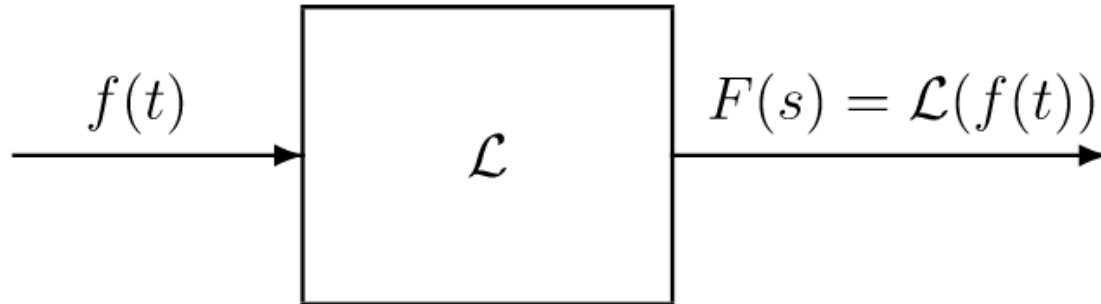
$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad s = \gamma + i\omega \in \mathbb{C}.$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας τελεστής που μετατρέπει μια συνάρτηση του χρόνου, $f(t)$, σε μια νέα συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής, $F(s)$, $s = \sigma + i\omega$.



Ο μετασχηματισμός Laplace είναι πολύ χρήσιμος στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και ως εκ τούτου στην ανάλυση ηλεκτρονικών κυκλωμάτων.

Μετασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{L}(f)(s)$$

Ορισμός

Ο μετασχηματισμός Laplace $\underline{F(s)} = \mathcal{L}(f)(s)$, μιας συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται ως:

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad s = \gamma + i\omega \in \mathbb{C}.$$

Στον ορισμό αυτό, το μη γνήσιο ολοκλήρωμα γίνεται αντιληπτό ως όριο

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(x) e^{-sx} dx$$

Ο μετασχηματισμός ορίζεται και για μιγαδικές συναρτήσεις $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, ως εξής:

$$\mathcal{L}(f)(t) = \mathcal{L}(\operatorname{Re} f)(t) + \mathcal{L}(\operatorname{Im} f)(t).$$

Laplace vs Fourier

Αν $s = \gamma + i\omega$, είναι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-(\gamma + i\omega)x} dx = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\gamma x} e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [H(x) f(x) e^{-\gamma x}] e^{-i\omega x} dx = \hat{g}(\omega), \text{ όπου } g(x) = H(x) f(x) e^{-\gamma x}\end{aligned}$$

Δηλαδή:

Ο μετασχηματισμός Laplace της f είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $H \cdot f \cdot e^{-\gamma x}$, όπου H η συνάρτηση Heaviside.

Είναι φανερό πως ο παράγοντας $e^{-\gamma x}$ επιτρέπει στο ολοκλήρωμα Laplace να υπάρχει για συναρτήσεις που δεν είναι ολοκληρώσιμες και για τις οποίες το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Fourier δεν υπάρχει.

Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός

Λέμε ότι η πραγματική συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εκθετικής τάξης, αν υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $M > 0$, τέτοια ώστε:

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{\lambda x}, \quad x \in [c, +\infty).$$

Παραδείγματα συναρτήσεων εκθετικής τάξης

- Κάθε φραγμένη συνάρτηση.
- $f(x) = ce^{\lambda x}$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $h(x) = \ln x$, γιατί $\ln x \leq x - 1 \leq e^x$.
- Κάθε θετική συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f(x) / e^{\lambda x} \rightarrow M < +\infty$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ (π.χ. $f(x) = x^4 e^{6x}$).
- Κάθε γινόμενο φραγμένης με εκθετική.
- $g(x) = \alpha \cdot \beta^x$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.
- $k(x) = x \cdot \ln x$, γιατί $|x \cdot \ln x| \leq x^2 = e^{2 \ln x} < e^{2x}$.

Παραδείγματα συναρτήσεων μη εκθετικής τάξης

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \cot x.$$

$$h(x) = e^{x \cdot x}, \quad \text{γιατί το όριο } e^{x \cdot x} / e^{\lambda x} \rightarrow +\infty, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$k(x) = 2x \cdot e^{x \cdot x} \cos(e^{x \cdot x}), \quad \text{γιατί τότε θα έπρεπε να είναι και η } e^{x \cdot x}, \text{ κάτι που δεν ισχύει (χρήση της ανισότητας } \cos x > 1 - x^2/2).$$

Μετασχηματισμός Laplace

Κριτήριο ύπαρξης

Έστω ότι για τη συνάρτηση $f(x)$ γνωρίζουμε ότι

(α) είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή, $|f(x)| \leq M \cdot e^{\alpha x}$, για κάθε $x \in [c, +\infty)$ για $M > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) είναι τμηματικά συνεχής με πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες.

Τότε, ο μετασχηματισμός Laplace $L(f)(s)$ ορίζεται καλώς για $s \in (\alpha, +\infty)$ και $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Απόδειξη

$$|\mathcal{L}(f)(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) e^{-sx}| dx = \int_0^c |f(x) e^{-sx}| dx + \int_c^{+\infty} |f(x) e^{-sx}| dx$$

$$\leq A + M \int_c^{+\infty} e^{(\alpha-s)x} dx = A + M \frac{e^{(\alpha-s)x}}{s-\alpha}, s > \alpha.$$

$$|f(x) e^{-sx}| = |f(x)| e^{-sx} \leq M e^{(\alpha-s)x}$$

Μετασχηματισμός Laplace

Το κριτήριο ύπαρξης διασφαλίζει ότι μία τμηματικά συνεχής εκθετικής τάξης συνάρτηση έχει μετασχηματισμό Laplace. Ωστόσο, υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν είναι εκθετικής τάξης αλλά έχουν μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα: Έστω $f(t) = 2te^{t^2} \cos(e^{t^2})$ Παρατηρούμε ότι $f(t) = \frac{d}{dt} \sin(e^{t^2})$ και

$$\begin{aligned} (Lf)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \frac{d}{d\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \\ &= e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \\ &= -\sin 1 - \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau &\leq \left| \int_0^{\infty} (-s)e^{-s\tau} \sin(e^{\tau^2}) d\tau \right| \\ &= \int_0^{\infty} se^{-s\tau} |\sin(e^{\tau^2})| d\tau \\ &\leq \int_0^{\infty} se^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

Πηγή:
<https://math.stackexchange.com/questions/1270635/are-there-functions-that-are-not-of-exponential-order-for-which-you-can-define-a>

Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = 1$.

Λύση

Έστω $s = \gamma + i\omega$. Είναι $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \Rightarrow \mathcal{L}(1)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt$

Όταν $\gamma = \operatorname{Re}(s) \leq 0$, το ολοκλήρωμα αποκλίνει. *ή δεν υπάρχει.*

Όταν $\gamma = \operatorname{Re}(s) > 0$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει και

$$\mathcal{L}(f)(s) = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}.$$

$$\int e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} + C$$

Συμπεραίνουμε, ότι $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}$, $\operatorname{Re}(s) > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \cos(\omega t) dt - i \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) dt$$

Μετασχηματισμός Laplace

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι $s \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 1

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int x e^{-sx} dx = -\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-sx} dx = \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] + \frac{1}{s^2}.$$

Αν $s < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] = -\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

Αν $s > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{sx + 1}{s^2} e^{-sx} \right] = 0$ και $L(f)(s) = \frac{1}{s^2}$.

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 2

(α) Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^2$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{2}{s^3}$, $s > 0$.

(β) Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^n$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int t^2 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s^3}(s^2 t^2 + 2st + 2) + c$.

(α) $f(t) = t^2$, $L(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$

$s < 0$ → Δεν υπάρχει
 $s > 0$ → Κατά παραγωγή

Για $s > 0$: $L(f)(s) = -\frac{e^{-st}}{s^3}(s^2 t^2 + 2st + 2) \Big|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{2}{s^3}$, $s > 0$.

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 3

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = \sin(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int \sin(\alpha x) e^{-sx} dx = -\frac{s \sin(\alpha x) + \alpha \cos(\alpha x)}{\alpha^2 + s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

$$\begin{aligned} F(t) = \sin(\alpha t), \quad L(f)(s) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \sin(\alpha t) e^{-st} dt \\ &= -\frac{s \sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t)}{\alpha^2 + s^2} e^{-st} \Bigg|_{t=0}^{t \rightarrow \infty} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Laplace

Άσκηση 4

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = \cos(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$, $s > 0$.

Υπόδειξη: $\int \cos(\alpha x) e^{-sx} dx = \frac{\alpha \sin(\alpha x) - s \cos(\alpha x)}{\alpha^2 + s^2} e^{-sx} + c$

Λύση

Μετασχηματισμός Laplace

Παράδειγμα

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{s - \alpha}$, $s > \alpha$.

Λύση

$$L(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-s)t} dt = \frac{1}{\alpha - s} [e^{(\alpha-s)t}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\alpha - s} [\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} - 1].$$

Αν $s = \alpha$, τότε $L(f)(s) = \int_0^{+\infty} dt = +\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

Αν $s < \alpha$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} = +\infty$ και ο μετασχηματισμός δεν υπάρχει.

Αν $s > \alpha$, τότε $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-s)t} = 0$ και $L(f)(s) = \frac{1}{s - \alpha}$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace



Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - I

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχει ο $L(f)$, τότε

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(f)(s) = 0. \quad \checkmark$$

$$L(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- Αν $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχουν οι $L(f), L(g)$, τότε για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s), \quad s \in \{\text{τομή πεδίων ορισμού } L(f), L(g)\} \quad \checkmark$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $F(s) = L(f)(s), s > c$, τότε

$$L(f(t)e^{\lambda t})(s) = F(s - \lambda), \quad s - \lambda > c \text{ ή } s > c + \lambda.$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(s) = L(f)(s)$, και $g(t) = \begin{cases} 0 & , t < \lambda \\ f(t - \lambda) & , t \geq \lambda \end{cases}$

$$L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s), \quad s \in (c, +\infty).$$

$$\bullet L(f(t)e^{\lambda t})(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-\lambda)t} dt = L(f)(s-\lambda) = F(s-\lambda).$$

$$\bullet \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t < \lambda \\ f(t-\lambda), & t \geq \lambda \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_{\lambda}^{\infty} f(t-\lambda) e^{-st} dt \quad \begin{array}{l} t-\lambda = w \\ dt = dw \end{array}$$

$$= \int_0^{\infty} f(w) e^{-s(w+\lambda)} dw$$

$$= e^{-s\lambda} \int_0^{\infty} f(w) e^{-sw} dw$$

$$= e^{-s\lambda} \mathcal{L}(f)(s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L(f)(s) = 0.$$

Δραστηριότητα

Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ΔΕΝ μπορεί να είναι μετασχηματισμοί Laplace κάποιων άλλων συναρτήσεων.

$$(\alpha) F(s) = \frac{s}{s+1} \quad (\beta) F(s) = \frac{s^2}{s+1} \quad (\gamma) F(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad (\delta) F(s) = s^2+1$$

$$(\beta) \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s+1} = \infty \Rightarrow F: \text{αδύνατο να είναι Laplace.}$$

Όμοια, η (δ) και η (α).

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s)$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = 1 + 2t, t \geq 0$.

Λύση

$$\mathcal{L}[1+2t](s) = \mathcal{L}(1)(s) + 2\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s+2}{s^2}, s > 0.$$

F(s)

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s)$$

Άσκηση 6

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sinh(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$f(t) = \sinh(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \Rightarrow L(f)(s) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{L(e^{\alpha t})(s)}_{s > \alpha} - \underbrace{L(e^{-\alpha t})(s)}_{s > -\alpha} \right)$$

$$\text{Αν } g(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow L(g)(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha.$$

$$\text{Άρα, } L(f)(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s + \alpha} \right) = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}, \quad s > |\alpha|.$$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s)$$

Άσκηση 7

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \cosh(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$\cosh(\alpha t) = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}$$

$$L(f)(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |\alpha|.$$

$$L(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(s) = \alpha \cdot L(f)(s) + \beta \cdot L(g)(s)$$

Άσκηση 8

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = \sin^2(\alpha t)$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Αξιοποιείστε την ταυτότητα $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} f(t) = \sin^2(\alpha t) \quad , \quad L(f)(s) &= \frac{1}{2} \left[L(1)(s) - L(\cos(2\alpha t))(s) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4} \right] = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \quad , s > 0 \end{aligned}$$

$$L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), \quad s > c + \lambda$$

Παραδείγματα

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow F(s - a)$$

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s-a)}, \quad s > a$$

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$$

$$te^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a$$

$$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

$$e^{\lambda t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$$

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

$$e^{\lambda t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), \quad s > c + \lambda$$

Άσκηση 9

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sinh(t)$, $t \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sinh(t), \quad t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(\sinh(t))(s - \lambda) = \frac{1}{(s - \lambda)^2 - 1}, \quad s > \lambda + 1.$$

$$\mathcal{L}(\sinh(t)) = \frac{1}{s^2 - 1}, \quad s > 1$$

$$L(f(t)e^{\lambda t}) = F(s - \lambda), \quad s > c + \lambda$$

Άσκηση 10

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sin^2(t)$, $t \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = e^{\lambda t} \cdot \sin^2 t, \quad t \geq 0.$$

$$L(\sin^2 t)(s) = \frac{2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0$$

$$L(f)(s) = \frac{2}{(s - \lambda)[(s - \lambda)^2 + 4]}, \quad \begin{array}{l} s - \lambda > 0 \\ s > \lambda. \end{array}$$

$$g(t) = f(t - \lambda) \rightarrow L(g)(s) = e^{-\lambda s} \cdot F(s), \quad s \in (c, +\infty)$$

Άσκηση 11

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης $g(t) = \sin(t - \pi), t \geq \pi$.

Υπόδειξη: Αν $f(x) = \sin(\alpha x)$, τότε $L(f)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, s > 0$.

$$g(t) = \sin(t - \pi), \quad t \geq \pi.$$

$$L(g)(s) = e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 0.$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - II

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει ο $L(f)(s)$, για $s > c$, και $g(t) = f(\lambda t)$, $\lambda > 0$, τότε:

$$L(g)(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), s \in (c\lambda, +\infty)$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει ο $L(f)$, για $s > c$, και $g(t) = t^n \cdot f(t)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s), s \in (c, +\infty).$$

- Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, n -φορές παραγωγίσιμη με εκθετικής τάξης παραγώγους, τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός των $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, και είναι:

$$L(f^{(k)})(s) = s^k L(f)(s) - s^{k-1}f(0) - \dots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0), s > \alpha.$$

Ειδικότερα:

$$\text{Για } k = 1: L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0).$$

$$\text{Για } k = 2: L(f'')(s) = s^2 L(f)(s) - sf(0) - f'(0).$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace - II

Απόδειξη για $k = 1$: $L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$.

$$L(f')(s) = \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx} dx = [f(x)e^{-sx}]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}(-sx)' dx = -f(0) + sL(f)(s).$$

Η παραπάνω σχέση έχει νόημα για $s > \alpha$ που εξασφαλίζει ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-sx} = 0$.

Για $k = 2$: $L(f'')(s) = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0)$.

$$\begin{aligned} L(f'')(s) &= \int_0^{+\infty} f''(x)e^{-sx} dx = [f'(x)e^{-sx}]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} f'(x)e^{-sx}(-sx)' dx = -f'(0) + sL(f')(s) \\ &= -f'(0) + s[sL(f)(s) - f(0)] = s^2L(f)(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση έχει νόημα για $s > \alpha$ που εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)e^{-sx} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)e^{-sx} = 0.$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 12

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = te^{2t}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$, $s > 2$.

Λύση

$f(t) = t \cdot e^{2t}$, Γνωρίζουμε ότι $g(t) = e^{2t} \sim L(g)(s) = \frac{1}{s-2}$,
 $s > 2$.

$L(f)(s) = (-1)^1 \cdot F'(s)$, οπου $F(s) = \frac{1}{s-2}$

$$= - \left(\frac{1}{s-2} \right)' = \frac{1}{(s-2)^2}, s > 2.$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 13

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t \cdot \cos(\alpha t)$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$, $s > 0$.

Λύση

$$f(t) = t \cdot \cos(\alpha t), \quad g(t) = \cos(\alpha t) \rightarrow L(g)(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}, s > 0.$$

$$L(f)(s) = (-1)^1 \cdot \left(\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \right)' = - \frac{s^2 + \alpha^2 - s \cdot (2s)}{(s^2 + \alpha^2)^2} = \frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}, s > 0.$$

$$\text{Αν όμως } f(t) = t^2 \cdot \cos(\alpha t), \quad L(f)(s) = (-1)^2 \cdot \left(\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \right)''$$

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 14

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t^2 \cdot e^{\alpha t}$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $L(f)(s) = \frac{2}{(s-\alpha)^3}$, $s > \alpha$.

Λύση

$$f(t) = t^2 e^{\alpha t}, t \geq 0. \quad \text{Αν } g(t) = e^{\alpha t} \Rightarrow \mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s-\alpha}, s > \alpha.$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = (-1)^2 \left(\frac{1}{s-\alpha} \right)'' = \left(-\frac{1}{(s-\alpha)^2} \right)' = \frac{2}{(s-\alpha)^3}, s > \alpha.$$

Εναλλακτικά: αν $g(t) = t^2 \Rightarrow \mathcal{L}(g)(s) = \frac{2}{s^3}$, $s > 0$.

Επίσης, $\mathcal{L}(e^{\lambda t} f(t))(s) = F(s-\lambda)$. Άρα, $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cdot t^2) = \frac{2}{(s-\alpha)^3}$, $s > \alpha$.

$$g(t) = t^n \cdot f(t) \rightarrow L(g)(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Άσκηση 15

Αν $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos(t)$, $t \geq 0$, να βρεθεί η $L(f)$.

Λύση

$$\text{Αν } g(t) = \cos t \Rightarrow L(g)(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$f(t) = t \cdot e^t \cdot \cos t$$

$$\text{Άρα, αν } g(t) = e^t \cdot \cos t \Rightarrow L(g)(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

$$\text{και αν } f(t) = t \cdot g(t) \Rightarrow L(f)(s) = (-1)^1 \cdot \left(\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(f)(s) = - \frac{(s-1)^2 + 1 - (s-1) \cdot 2(s-1)}{[(s-1)^2 + 1]^2} = \frac{(s-1)^2 - 1}{[(s-1)^2 + 1]^2}, \quad s > 1.$$

$$L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0)$$

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad \underline{s > a}$$

Άσκηση 16

Έστω συνάρτηση $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την $y' + 2y = e^{-3t}$, $y(0) = 1$.

Δείξτε ότι $L(y)(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}$, $s > -3$.

Λύση

$$\underline{y'(t) + 2y(t) = e^{-3t}} \implies L(y')(s) + 2L(y)(s) = L(e^{-3t})(s)$$

$$\implies \underbrace{s \cdot L(y)(s) - \overset{1}{y(0)}} + 2L(y)(s) = \frac{1}{s+3} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow L(y)(s)(s+2) = \frac{1}{s+3} + 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad L(y)(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+3)}, \quad s > -3.$$

$$\mathcal{L}(f')(s) = s \mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$$

Άσκηση 17

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $y'' + 2y' - 3y = 1$, με $y(0) = 2$ και $y'(0) = 1$. Δείξτε ότι

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s(s-1)(s+3)}, \quad s > 1.$$

Λύση

$$y'' + 2y' - 3y = 1 \implies \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') - 3\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

$$\implies s^2 \mathcal{L}(y) - 2s - 1 + 2(s \mathcal{L}(y) - 2) - 3\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s}$$

$$\implies (s^2 + 2s - 3) \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} + 2s + 1 + 4 \implies \mathcal{L}(y)(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s(s-1)(s+3)}, \quad s > 1.$$

Συνέλιξη συναρτήσεων

Η συνέλιξη (convolution) των $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ορίζεται να είναι:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Αν $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τότε:

$$y \geq 0, \quad x-y \geq 0 \\ y \leq x$$

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

Ιδιότητες της συνέλιξης $f * g$.

(α) Αντιμεταθετική: $f * g = g * f$

(β) Προσεταιριστική: $f * (g * h) = (f * g) * h$

(β) Επιμεριστική: $f * (g + h) = f * g + f * h$

Μετασχηματισμός συνέλιξης συναρτήσεων

Ισχύει το εξής:

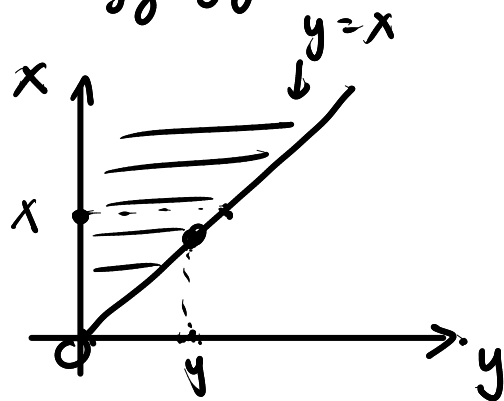
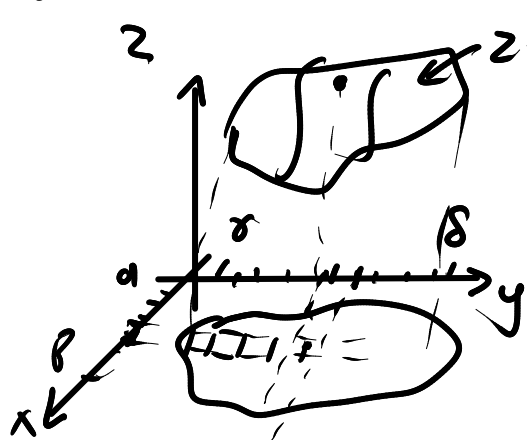
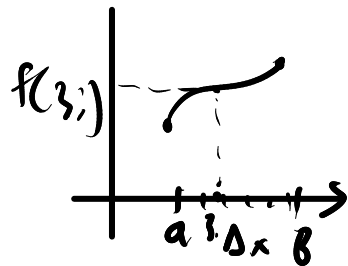
Θεώρημα

Έστω $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τμηματικά συνεχείς, εκθετικής τάξης συναρτήσεις και έστω $L(f), L(g)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των f, g . Τότε, ορίζεται ο $L(f * g)$ και είναι

$$L(f * g)(s) = L(f)(s) L(g)(s)$$

$$g, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f * g(x) = \int_0^x f(x-y)g(y) dy$$

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x-y)g(y) dy e^{-sx} dx = \int_0^{\infty} \int_0^x f(x-y)g(y) e^{-sx} dy dx \quad (*)$$



$$\int_a^B f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x$$

$$\int_a^B \int_0^{\delta} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}) \Delta x \Delta y$$

$$\textcircled{A} = \int_0^{\infty} \int_y^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-sx} dx dy =$$

Deriv $x = t + y \Rightarrow dx = dt$

Gamma $x - y \Rightarrow t = 0$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t)g(y)e^{-s(t+y)} dt dy =$$

$$= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \int_0^{\infty} g(y)e^{-sy} dy = L(f)(s) \cdot L(g)(s).$$

$$L(f * g)(s) = L(f)(s) L(g)(s)$$

Άσκηση 18

Έστω $f(t) = e^{\alpha t}$, $g(t) = e^{\beta t}$, $t \geq 0$. (α) Αποδείξτε ότι $f * g(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$.

(β) Επαληθεύστε ότι $L(f * g)(s) = L(f)(s) \cdot L(g)(s)$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad f * g(t) &= \int_0^t f(t-y)g(y)dy = \int_0^t e^{a(t-y)} \cdot e^{\beta y} dy = e^{at} \int_0^t e^{(\beta-a)y} dy \\ &= e^{at} \frac{1}{\beta-a} e^{(\beta-a)y} \Big|_{y=0}^{y=t} = e^{at} \cdot \frac{e^{(\beta-a)t} - 1}{\beta-a} = \frac{e^{at} - e^{\beta t}}{a-\beta} \end{aligned}$$

$$\text{(β)} \quad L(f)(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a, \quad L(g)(s) = \frac{1}{s-\beta}, \quad s > \beta$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \frac{1}{a-b} \left[\mathcal{L}(e^{at})(s) - \mathcal{L}(e^{bt})(s) \right] = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right] = \\ &= \frac{1}{s-a} \cdot \frac{1}{s-b} = \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(g)(s). \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός συνέλιξης συναρτήσεων

Άσκηση 19

Έστω $y: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, και λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(\omega) \sin(t - \omega) d\omega.$$

Να δείξετε ότι

$$L(y)(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1)}, \quad s > 0.$$

Λύση

$$\text{Είναι } y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(\omega) \sin(t - \omega) d\omega \Leftrightarrow L(y)(s) = \frac{1}{s+1} + L(y) \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Leftrightarrow L(y)(s) \left[1 - \frac{1}{s^2+1} \right] = \frac{1}{s+1} \Leftrightarrow L(y)(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)}, \quad s > 0.$$

Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα

Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τμηματικά συνεχής, εκθετικής τάξης περιοδική συνάρτηση με περίοδο T και έστω $L(f)$ ο μετασχηματισμός Laplace της f . Τότε, ισχύει η εξής σχέση:

$$L(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: <https://math.stackexchange.com/questions/1552013/on-laplace-transform-of-periodic-functions>

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $T = 2$ και $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ -1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ να βρεθεί ο $L(f)$.

Λύση

Από το Θεώρημα είναι:

$$\begin{aligned} L(f)(s) &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 -e^{-st} dt + \int_1^2 e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} [e^{-st}]_{t=0}^{t=1} - \frac{1}{s} [e^{-st}]_{t=1}^{t=2} \right) = \frac{2e^{-s} - 1 - e^{-2s}}{s(1 - e^{-2s})} \end{aligned}$$

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{nT+T} f(x) e^{-sx} dx \quad \begin{array}{l} x = u + nT \\ dx = du \end{array} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T \underbrace{f(u+nT)} e^{-s(u+nT)} du = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(u) e^{-su} e^{-snT} du = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \int_0^T f(u) e^{-su} du \\ &= \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(u) e^{-su} du \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός περιοδικής συνάρτησης

Άσκηση 20

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $T = 1$ και $f(t) = t$, $0 \leq t < 1$, να δείξετε ότι

$$L(f)(s) = \frac{2 - 2e^{-s} - 2se^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}, \quad s > 0.$$

Λύση

