

Μετασχηματισμός Fourier

(Fourier Transform)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Εισαγωγή

Άσκηση 1

Δείξτε ότι $\int e^{-i\omega x} dx = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} + c$

$$e^{-i\omega x} = \cos(-\omega x) + i \sin(-\omega x)$$

$$\begin{aligned} \int e^{-i\omega x} dx &= \frac{1}{-i\omega} \int (-i\omega) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-i\omega} \int (e^{-i\omega x})' dx = \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega x} + c = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega x} + c. \end{aligned}$$

Εισαγωγή

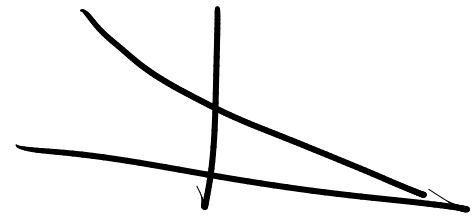
Άσκηση 2

Υπολογίστε το $\int \cos(bx) e^{-i\omega x} dx$

Υπόδειξη: Κατά παράγοντες ολοκλήρωση ή εναλλακτικά $\cos(bx) = (e^{ibx} + e^{-ibx}) / 2$

$$\int \cos(bx) e^{-i\omega x} dx$$

Εισαγωγή



Ορισμός

Μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, λέμε ότι είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη (γράφουμε $f \in L^1(\mathbb{R})$) όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-x}| dx$$

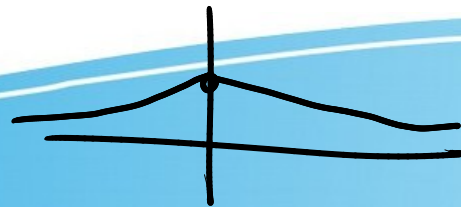
Παράδειγμα

(α) Οι συναρτήσεις $e^{-|x|}$, $1/x^2$ ανήκουν στο $L^1(\mathbb{R})$

$$e^{-x} \notin L^1(\mathbb{R})$$

(β) Οι συναρτήσεις 1 , $1/x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , ΔΕΝ ανήκουν στο $L^1(\mathbb{R})$

$$e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx < +\infty$$

Μετασχηματισμός Fourier

Έστω $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Η παράσταση

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbf{R},$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** της f .

Αν $f \in L^1(\mathbf{R})$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται καλώς. Πράγματι:

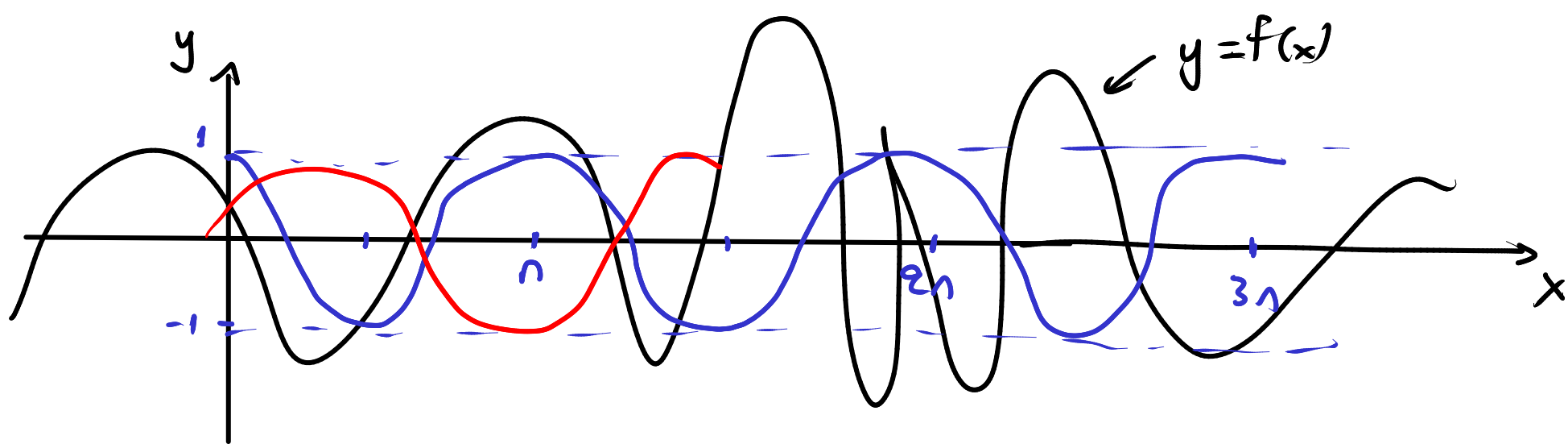
$$|\hat{f}(\omega)| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |e^{-i\omega x}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier transform) είναι ένας μιγαδικός αριθμός

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$(\cos(\omega x), \sin(\omega x))$$

Σημείωση: Γράφουμε και $\hat{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega) = F(f)(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega)$.



$$\omega \in \mathbb{R}, \cos(\omega x): T = \frac{2\pi}{\omega}$$

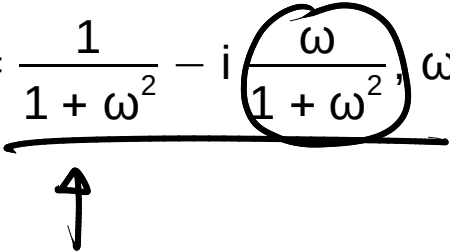
$$\omega = 2$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Λύση

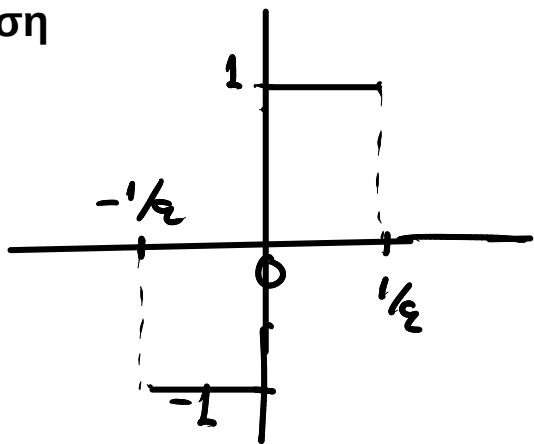
$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i\omega)x} dx \\ &= -\frac{1}{1+i\omega} \left[e^{-(1+i\omega)x} \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} - i \frac{\omega}{1+\omega^2}, \omega \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$


Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1/2 \end{cases}$ (και 0 αλλού), να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

Λύση



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1/2}^0 -e^{-i\omega x} dx + \int_0^{1/2} e^{-i\omega x} dx$$

$$= + \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{x=-1/2}^{x=0} + \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{x=0}^{x=1/2}$$

$$= \frac{1}{-i\omega} (1 - e^{i\omega/2}) - \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega/2} - 1) =$$

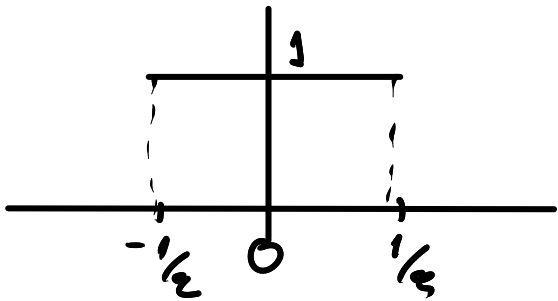
$$= \frac{1}{i\omega} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cancel{i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \cancel{i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 1 \right) = \frac{2}{i\omega} (1 - \cos\frac{\omega}{2}) =$$
$$= -\frac{2}{\omega} (1 - \cos\frac{\omega}{2}) i.$$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, (ορθογώνιος παλμός) να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

Λύση



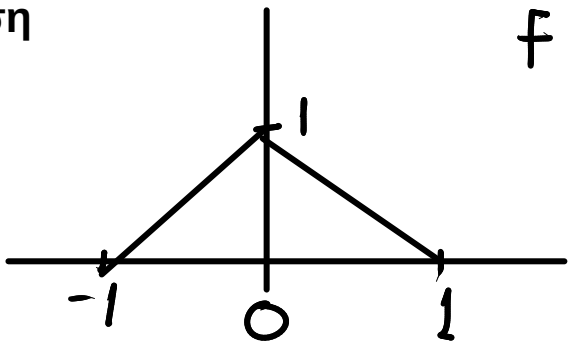
$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{1}{-i\omega} \left(e^{-i\omega/2} - e^{i\omega/2} \right) \\ &= \frac{1}{-i\omega} \left(\cancel{\cos \frac{\omega}{2}} - i \sin \frac{\omega}{2} - \cancel{\cos \frac{\omega}{2}} + i \sin \frac{\omega}{2} \right) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}.\end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, (τριγωνικός παλμός) να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

Λύση



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^0 (1+x) e^{-i\omega x} dx + \int_0^1 (1-x) e^{-i\omega x} dx$$

Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης f ,

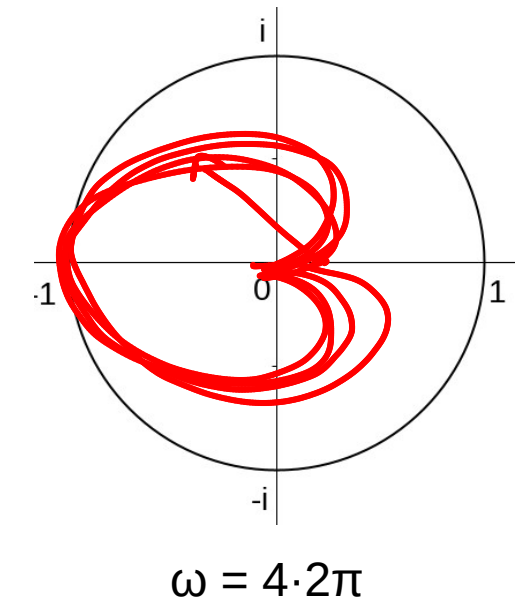
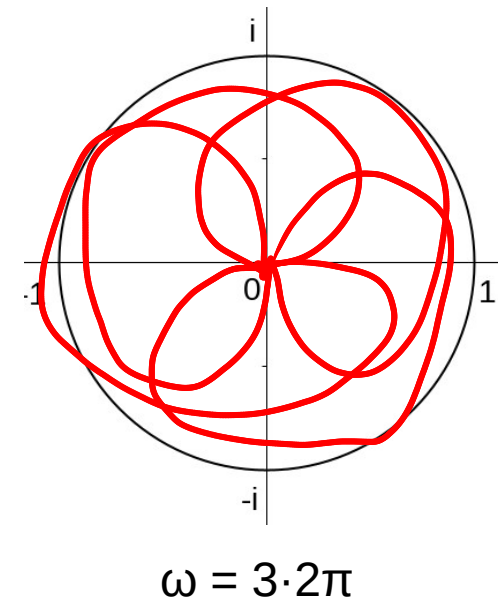
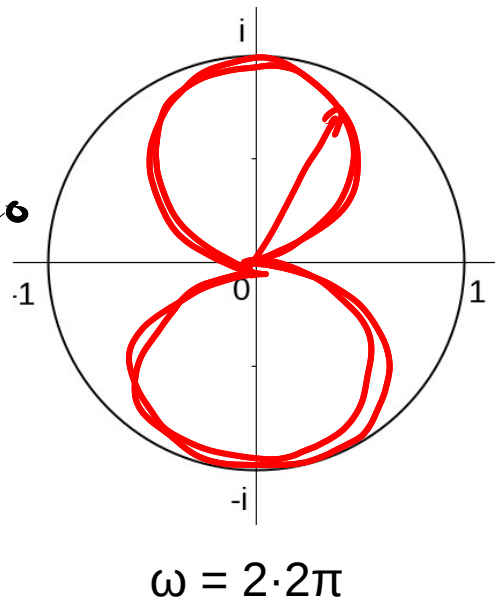
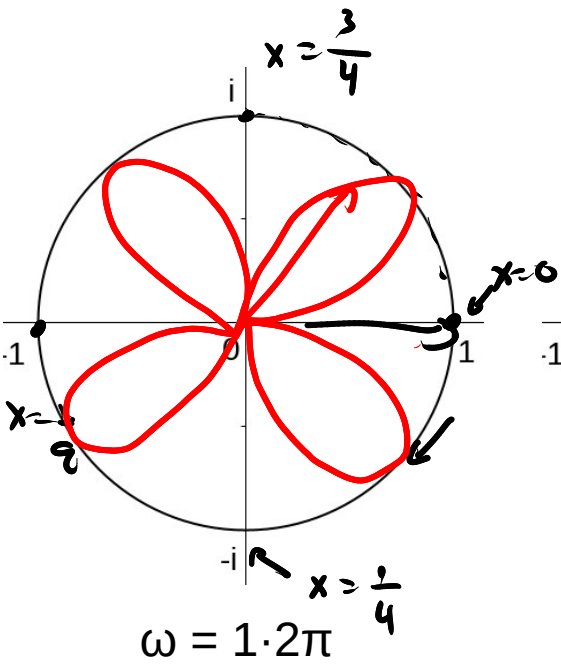
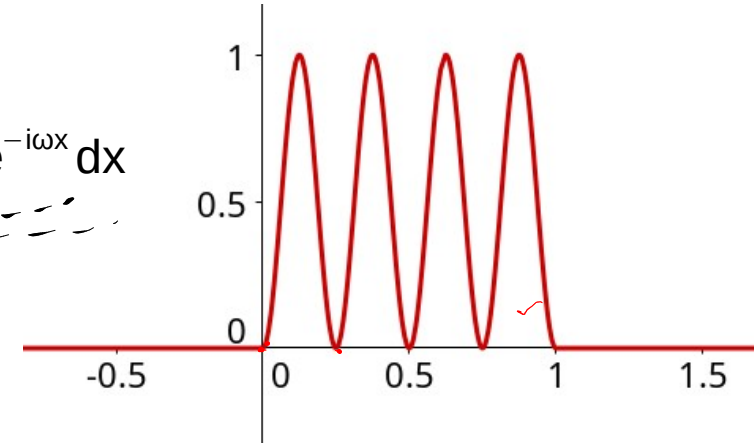
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

λαμβάνει μεγάλες τιμές (κατά μέτρο) στις συχνότητες ω που εκφράζονται περισσότερο στην f .

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί μία **αποσύνθεση** του σήματος f στις συχνότητες που το αποτελούν.

Παράδειγμα

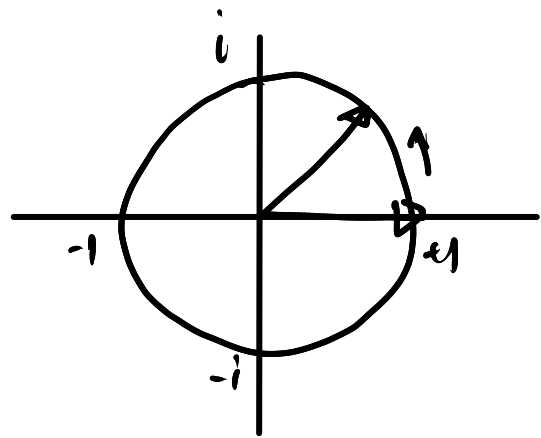
$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2}, \quad 0 < x < 1, \text{ και } 0 \text{ αλλού, } \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^1 \underline{f(x) e^{-i\omega x}} dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$0 < x < 1 \quad \omega x: 0 \rightarrow \omega. \quad e^{-i0} \rightarrow e^{-i\omega}$$



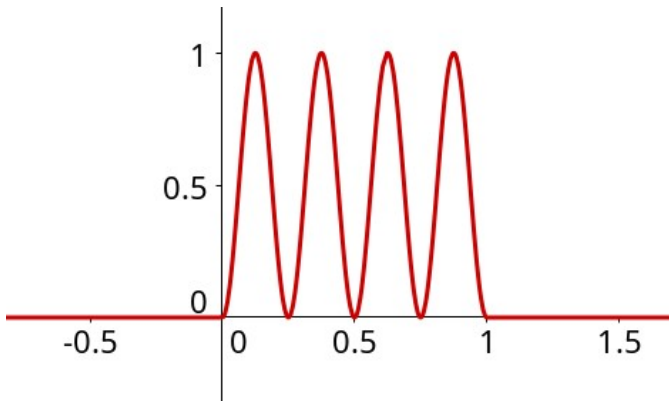
$$\omega = \omega$$

$$\underline{f(x)} \cdot e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$$

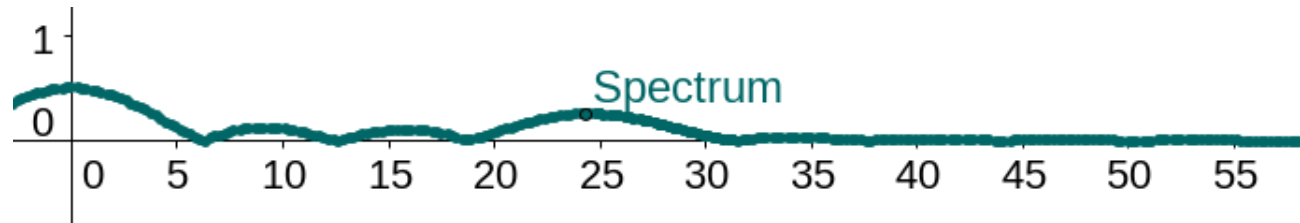
$$0 < x < 1$$

$$0 < \omega x < \omega$$

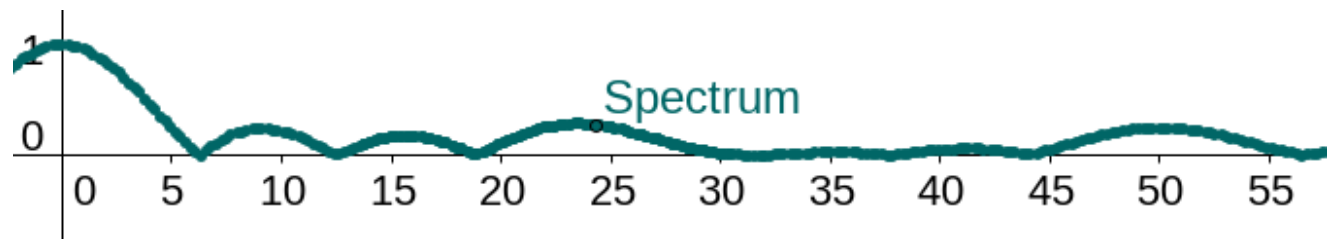
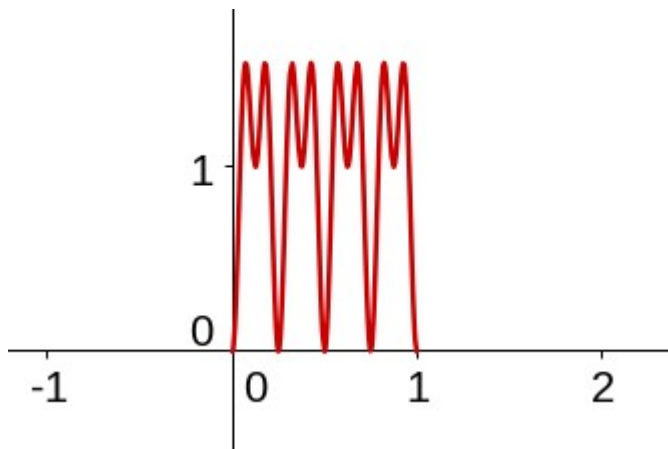
$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2}, 0 < x < 1$$



$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{32i\pi^2 e^{-i\omega} (e^{i\omega} - 1)}{\omega(\omega^2 - 64\pi^2)}$$



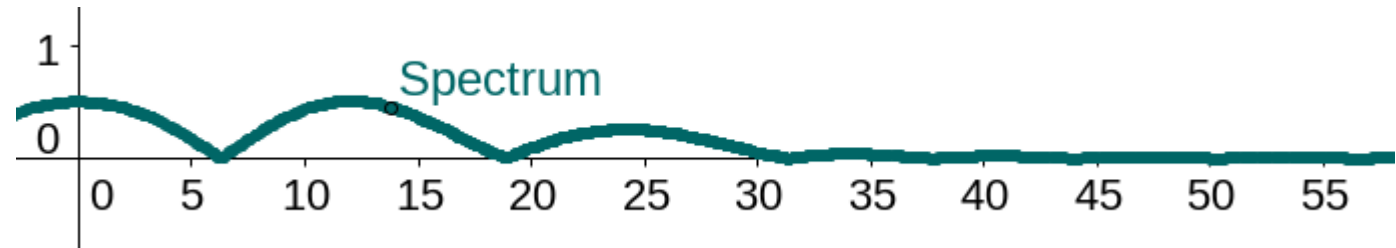
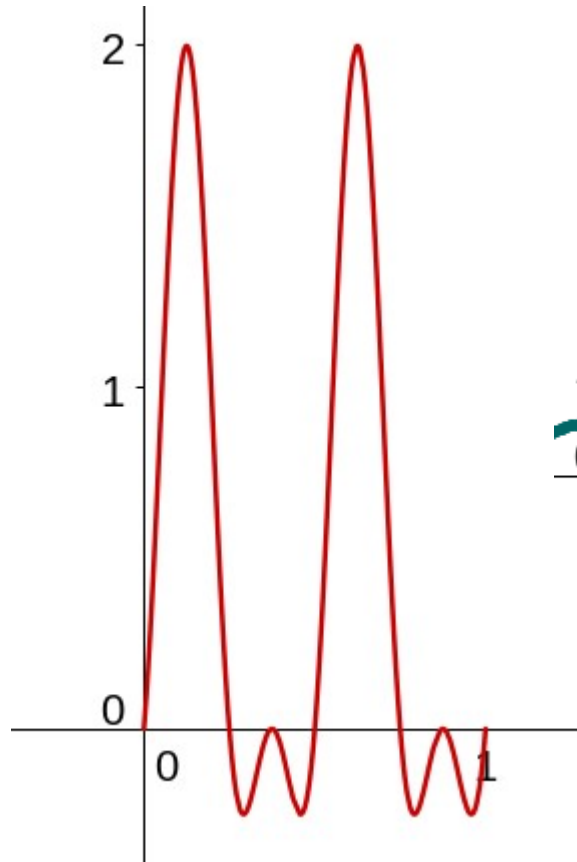
$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2} + \frac{1 - \cos(16\pi x)}{2}, 0 < x < 1$$



Φάσμα πλάτους (Amplitude Spectrum) = $|\hat{f}(\omega)|$

$$f(x) = \frac{1 - \cos(8\pi x)}{2} + \sin(4\pi x), \quad 0 < x < 1$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$



Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Αν \hat{f} , ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως:

$$F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Αποδεικνύεται⁽¹⁾ πως σε κάθε σημείο συνέχειας της f είναι:

$$F^{-1}(F(f)(\omega)) = f(x)$$

ή

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Όπως και στην περίπτωση του κανονικού μετασχηματισμού, η συνθήκη $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ είναι μία από τις ικανές συνθήκες ύπαρξης του αντίστροφου μετασχηματισμού.

(1) <https://math.stackexchange.com/a/2879354/664787>

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 1

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της f .

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να αποδείξετε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 \cos(\omega x) dx - i \int_{-1}^1 \sin(\omega x) dx \\ &= \left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} - i \left[\frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right]_{x=-1}^{x=1} = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} . \end{aligned}$$

Σημειώσεις: 1. Καθώς η f είναι άρτια, μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας μόνο το ολοκλήρωμα με το συνημίτονο.
2. Η ολοκλήρωση του $e^{-i\omega x}$ μπορεί να γίνει απευθείας, με τους γνωστούς κανόνες ολοκλήρωσης.

$$\text{(β)} \quad \text{Για κάθε } x \text{ είναι: } \underline{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ παίρνουμε, } 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \pi \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} .$$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση δέλτα του Dirac ορίζεται ως εξής: $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$

Η δ δεν είναι συνάρτηση με την τυπική έννοια, ωστόσο αποκτά έννοια ως όριο της συνάρτησης

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}, \text{ καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Ορισμένες από τις ιδιότητες της συνάρτησης δ είναι οι εξής:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \alpha) f(x) dx = f(\alpha) \quad (3) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(x) \quad (4) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi \delta(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier της δ : $\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega 0} = 1.$

Μετασχηματισμός Fourier

Παράδειγμα 3

Η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, ονομάζεται μοναδιαία βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside.

Η συνάρτηση f δεν είναι ολοκληρώσιμη, ωστόσο μπορεί να προσεγγιστεί ως όριο των $H_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ για $\alpha \rightarrow 0^+$.

Αποδεικνύεται ότι $H'(x) = \delta(x)$.

Μετασχηματισμός Fourier της H : $\hat{H}(\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, δείξτε ότι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να υπολογίσετε το $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx, \alpha \neq 0$.

Λύση

(α) Από προηγούμενη άσκηση είναι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega} = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

(β) Είναι $F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) \left(\frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \right) d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega$$

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση

(α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, δείξτε ότι $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} - i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$.

(β) Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier, να υπολογίσετε το $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x) + \cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx$, $\alpha \neq 0$.

Λύση

(β) f συνεχής $\mathbb{R} - \{0\}$ άρα $f(x) = F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$x < 0: \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = 0 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = 0.$$

$$x > 0: \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = e^{-\omega} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x) + \omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega = \pi e^{-\omega}.$$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Έστω ότι για τις f, g υπάρχει μετασχηματισμός Fourier (π.χ. $f, g \in L^1(\mathbb{R})$). Συμβολίζουμε:

$$F(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$F(c_1 f + c_2 g)(\omega) = c_1 F(f)(\omega) + c_2 F(g)(\omega)$$

$$F(f(x - a))(\omega) = e^{-i\omega a} F(f)(\omega)$$

$$F(e^{-i\lambda x} f(x))(\omega) = F(f)(\omega - \lambda)$$

$$F(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F(f)\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

$$\begin{aligned} F(f(x-a))(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a) e^{-i\omega x} dx \quad \begin{array}{l} x-a=y \\ dx=dy \end{array} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega(y+a)} dy = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

Συνέλιξη συναρτήσεων

Ορισμός

Έστω δύο συναρτήσεις f, g . Η συνέλιξη (convolution) των f, g ορίζεται να είναι:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Η συνέλιξη δεν υπάρχει πάντα (π.χ. υπάρχει όταν $f, g \in L^2(\mathbb{R})$). Ωστόσο, όταν υπάρχει έχει τις εξής ιδιότητες:

Ιδιότητες της συνέλιξης $f * g$.

(α) Αντιμεταθετική: $f * g = g * f$

(β) Προσεταιριστική: $f * (g * h) = (f * g) * h$

(β) Επιμεριστική: $f * (g + h) = f * g + f * h$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\begin{aligned} f, g \in L^2 \quad |f * g(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dy \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy \right) < \infty. \end{aligned}$$

Συνέλιξη συναρτήσεων

Αποδεικνύεται ότι $\widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Πράγματι:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x-y)} f(x-y)e^{-i\omega y} g(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(x-y)} f(x-y) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega u} f(u) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega y} g(y) dy \\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι: $\widehat{f \cdot g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$.

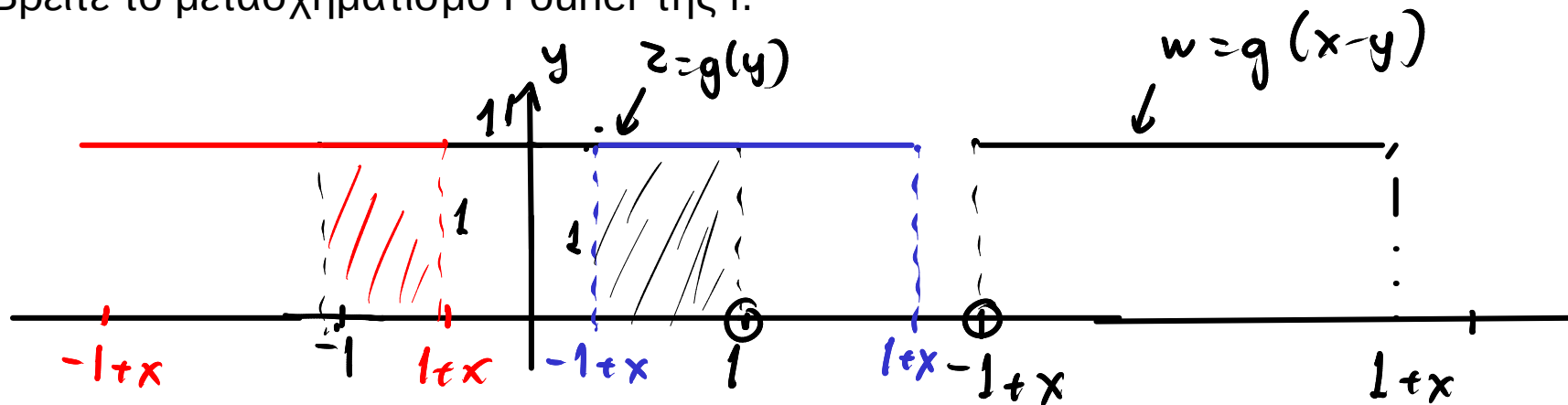
Συνέλιξη συναρτήσεων

Άσκηση: Έστω $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$.

$$1 - (-1+x)$$

(α) Δείξτε ότι $g * g = f$.

(β) Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της f .



$$g * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot g(y) dy$$

$$g(x-y)g(y) = 0, \quad 1 < -1+x \quad \dot{\iota} \quad x > 2$$

$$g(x-y)g(y) = 1, \quad -1 < -1+x < 1$$

$$\begin{array}{l} -1 < -1+x < 1, \quad g * g(x) = 2-x \\ 0 < x < 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1+x < -1 \Rightarrow x < 0 \\ g * g(x) = 2+x \end{array}$$

$$g * g(x) = \begin{cases} 0, & x > 2 \\ 2-x, & 0 < x < 2 \\ 2+x, & -2 < x < 0 \\ 0, & x < -2 \end{cases} = \begin{cases} 2-|x|, & |x| < 2 \\ 0, & \text{all other} \end{cases} = f(x)$$

$$\hat{f}(x) = \widehat{g * g}(x) = \hat{g}(x) \cdot \hat{g}(x) = \hat{g}^2(x)$$

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) = \frac{1}{-i\omega} (-2i \sin \omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

$$f: \text{our axis}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Μετασχηματισμός Fourier και παράγωγος

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της f (π.χ. $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Τότε,

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} e^{-i\omega x} f(x) dx \right] = i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\hat{f}''(\omega) = i\omega \hat{f}'(\omega) = (i\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega), \text{ κλπ.}$$

$$\hat{f}'(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

Αν επιπλέον, η $xf(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε:

$$\widehat{xf(x)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} xf(x) dx = i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$$

Μετασχηματισμός Fourier και παράγωγος

Παράδειγμα

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, τότε $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Απόδειξη

Παραγωγίζουμε την f και βρίσκουμε $f'(x) = -xf(x)$.

Παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μελών της εξίσωσης:

$$\begin{aligned} \widehat{f'(x)}(\omega) &= -i\omega \hat{f}(\omega) \Leftrightarrow i\omega \hat{f}(\omega) = -i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -\omega \hat{f}(\omega) \Leftrightarrow \frac{d}{d\omega} [\ln \hat{f}(\omega)] = -\omega \Leftrightarrow \ln(\hat{f}(\omega)) = -\frac{\omega^2}{2} + c \\ \Leftrightarrow \hat{f}(\omega) &= C e^{-\frac{\omega^2}{2}} \text{ και } C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1. \end{aligned}$$

Βρήκαμε, ότι $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

Σημείωση: Ανάλογα αποδεικνύεται πως για την $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ είναι $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

Εφαρμογή σε ΔΕ

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση: $u_t(t, x) = u_{xx}(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(0, x) = \delta(x)$.

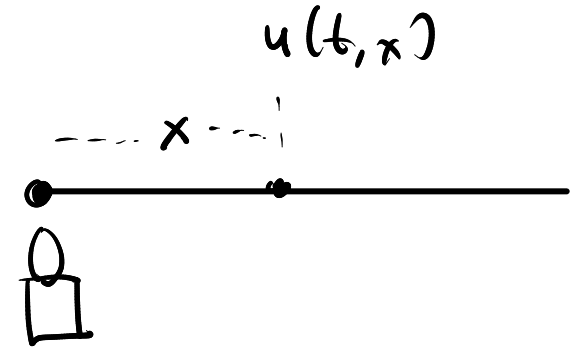
Θεωρούμε γνωστό ότι αν $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ τότε $\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

Λύση

Εφαρμόζουμε στη δ.ε. μετασχηματισμό Fourier (ως προς x).

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega) = \widehat{u''}(\omega) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \hat{u}(\omega) = -\omega^2 \hat{u}(\omega), \text{ με } \hat{u}(0, \omega) = \hat{\delta}(\omega) = 1.$$

Η τελευταία δ.ε. λύνεται εύκολα και βρίσκουμε: $\hat{u}(t, \omega) = e^{-\omega^2 t} \Leftrightarrow u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$



$$\hat{u}_t(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-i\omega x} dx$$

$F(t)$	$\widehat{F}(\omega)$
$f(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$	$\widehat{f}(\omega)$
$\widehat{f}(-t)$	$2\pi f(\omega)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$\beta(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t < 1, \\ 0, & \text{if } t > 1 \end{cases}$	$2 \operatorname{sinc}(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$
$\frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}(t)$	$\beta(\omega)$

$f'(t)$	$i\omega \widehat{f}(\omega)$
$f''(t)$	$(i\omega)^2 \widehat{f}(\omega)$
$tf(t)$	$i \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega)$
$t^2 f(t)$	$i^2 \frac{d^2}{d\omega^2} \widehat{f}(\omega)$
$e^{i\omega_0 t} f(t)$	$\widehat{f}(\omega - \omega_0)$
$f\left(\frac{t - t_0}{k}\right)$	$ke^{-i\omega t_0} \widehat{f}(k\omega)$
$(f * g)(t)$	$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 0 \\ 1, & \text{if } t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)f(t)$	$e^{-i\omega t_0} \widehat{f}(\omega)$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης είναι ένας μιγαδικός αριθμός:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Αν f μία **άρτια** συνάρτηση, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = 0$ και

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx.$$

Ειδικότερα, $\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos[(-\omega)x] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f}$: άρτια.

Επιπλέον, \hat{f} : άρτια $\Rightarrow \hat{f}(\omega) \sin(\omega x)$ περιττή και

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega.$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης είναι ένας μιγαδικός αριθμός:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Αν f μία **περιττή** συνάρτηση, τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = 0$ και

$$\hat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Ειδικότερα, $\hat{f}(-\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin[(-\omega)x] dx = 2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = -\hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{f}$: περιττή.

Επιπλέον, \hat{f} : περιττή $\Rightarrow \hat{f}(\omega) \cos(\omega x)$ περιττή και

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega.$$

Ημ/Συν μετασχηματισμός Fourier

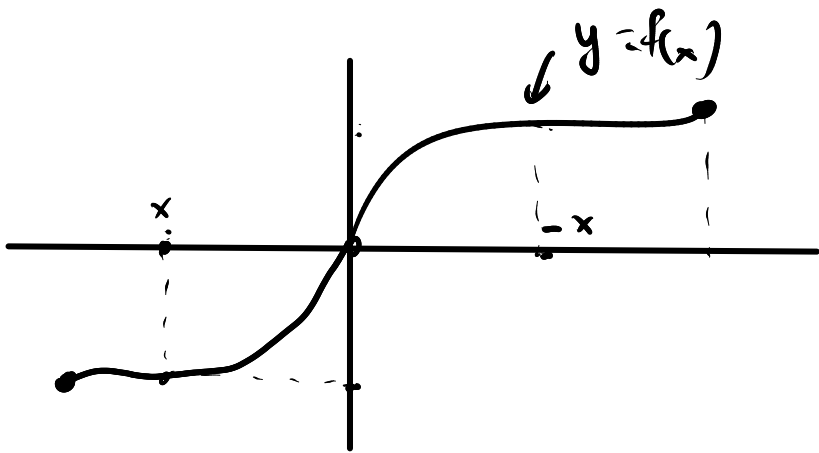
Στην περίπτωση όπου μία συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$, τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε στο $(-\infty, 0)$:

$$\text{(α) ως περιττή συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε θα ισχύει: } \hat{g}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \text{ και } f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega, \quad x \geq 0.$$

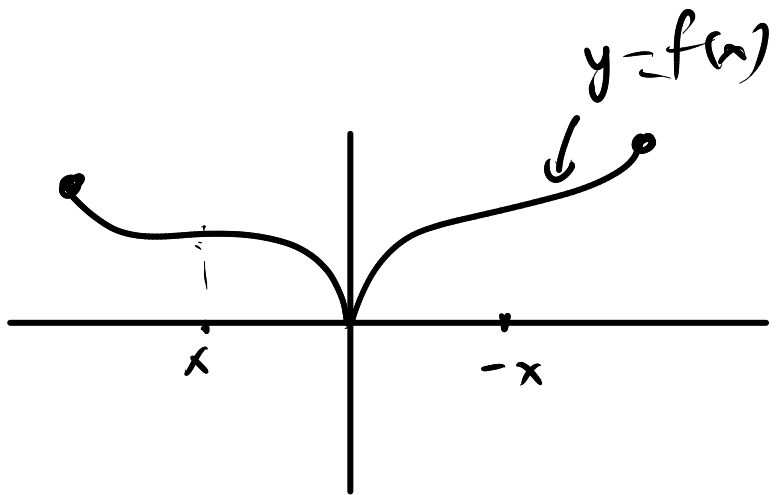
$$\text{(β) ως άρτια συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε θα ισχύει: } \hat{g}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \text{ και } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega, \quad x \geq 0.$$



$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

περιζωω
επίκραση



$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

ἀρτια
επίκραση

Ημ/Συν μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 3

Έστω $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

(α) Να επεκταθεί η f ως περιττή συνάρτηση g στο \mathbb{R} ,

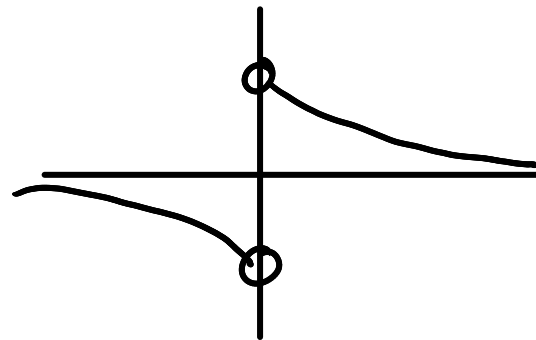
(β) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της g είναι $\hat{g}(\omega) = -2i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(γ) να δείξετε ότι: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Υπόδειξη: Αν f : περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$, $x \geq 0$.

Δίνεται ότι: $\int e^{-x} \sin(\alpha x) dx = -\frac{e^{-x}}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos(\alpha x) + \sin(\alpha x)) + c$

$$(a) \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$



$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = -i \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \sin(\omega x) dx = -2i \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(\omega x) dx$$

$$= -2i \left[-\frac{e^{-x}}{\omega^2 + 1} (\omega \cos(\omega x) + \sin(\omega x)) \right]_{x=0}^{x \rightarrow +\infty}$$

$$= -2i \left(\frac{\omega}{\omega^2 + 1} \right) = -2i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{1a} \quad x \neq 0, \quad g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega \\ &= \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} (-2i) \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \sin(\omega x) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega \end{aligned}$$

$$\Gamma(x) \quad x > 0 : \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin(wx)}{w^2 + 1} dw = e^{-x}.$$

$$f \in L^1, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} dx$$

$$f: \text{à priori}, \quad \hat{f}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) dx$$

$$f: \text{à posteriori}, \quad \hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx, \quad f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) dx$$

$$\hat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx = -i\omega \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}''(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$$

$$\widehat{u''(x) - u(x) = f(x)} \Rightarrow \omega^2 \hat{u}(\omega) + \hat{u}(\omega) = -\hat{f}(\omega) \Leftrightarrow \hat{u}(\omega) = \frac{-\hat{f}(\omega)}{\omega^2 + 1}$$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 4

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-\omega), & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & , \omega > 1 \end{cases}$$

Δίνεται ότι $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$

Υπόδειξη: Αν f περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega, x \geq 0$.

Αν f περιττή, τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$

$$\hat{f}(\omega) = -2i \frac{\pi}{2} (1-\omega) = -i\pi(1-\omega), 0 \leq \omega \leq 1$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \underbrace{-i\pi(1-\omega)}_{\sin(\omega x) - \omega \sin(\omega x)} \cdot \sin(\omega x) d\omega = -\frac{1}{x} \cos(\omega x) + \frac{1}{x} \omega \cos(\omega x) - \frac{1}{x^2} \sin(\omega x) \Big|_{\omega=0}^{\omega=1}$$

$$= -\frac{\cancel{\cos x}}{x} + \frac{\cancel{\cos x}}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x^2}.$$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 5

Να βρεθεί μία συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(1-\omega), & 0 \leq \omega \leq 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$$

Δίνεται ότι $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c$

Υπόδειξη: Αν f άρτια τότε $\hat{g}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega, x \geq 0$.

$$\text{Αν } f: \text{ άρτια, } \hat{F}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{F}(\omega) \cos(\omega x) d\omega.$$

$$\hat{F}(\omega) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} (1-\omega) = \pi (1-\omega), \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \pi (1-\omega) \cos(\omega x) d\omega = \frac{\sin(\omega x)}{x} - \frac{1}{x} \omega \sin(\omega x) - \frac{1}{x^2} \cos(\omega x) \Big|_{\omega=0}^{\omega=1}$$

$$= \frac{\cancel{\sin x}}{x} - \frac{\cancel{\sin x}}{x} - \frac{\cos x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} .$$

Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Άσκηση 6

Να βρεθεί μία λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης $\int_0^{+\infty} y(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < 1 \\ 2, & 1 \leq \omega < 2 \\ 0, & \omega \geq 2. \end{cases}$

Υπόδειξη: Αν f : περιττή τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$ και $f(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$, $x \geq 0$.

y : συνεχής, περιττή, $\hat{y}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} y(x) \sin(\omega x) dx = \begin{cases} -2i, & 0 \leq \omega < 1 \\ -4i, & 1 \leq \omega < 2 \\ 0, & \omega \geq 2. \end{cases}$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{y}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin(\omega x) d\omega + \frac{4}{\pi} \int_1^2 \sin(\omega x) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(\omega x)}{x} \right]_{\omega=0}^{\omega=1} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{-\cos(\omega x)}{x} \right]_{\omega=1}^{\omega=2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n} \left(\frac{-\cos x}{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{4}{n} \left(\frac{-\cos(2x)}{x} + \frac{\cos x}{x} \right)$$

$$= \frac{2}{n} \left[\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x} - 2 \frac{\cos(2x)}{x} \right] = \frac{2}{n x} (\cos x + 1 - 2 \cos(2x)).$$

Από τη σειρά στο ολοκλήρωμα

Δραστηριότητα

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και περιοδική στο $[-L, L]$.

$$\text{Αν } \omega_n = \frac{\pi n}{L}, \text{ τότε } \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{L} \text{ και } f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{L}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n,$$

$$\text{όπου } C(\omega_n) = \frac{c_n}{\Delta\omega_n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Για $L \rightarrow +\infty$, είναι $\Delta(\omega_n) \rightarrow 0$ και από τα παραπάνω παίρνουμε:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \text{ όπου } C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Δηλαδή: Ο μετασχηματισμός Fourier είναι η οριακή περίπτωση των σειρών Fourier όταν η περίοδος της συνάρτησης προσεγγίζει το άπειρο.

$$\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f \in L^1$$

$$\sin x \notin L^1$$

$$\hat{F}'(\omega) = -i\omega \hat{f}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-\frac{1}{\tau}|x| - i\omega x} dx$$

$$\int_0^{\infty} f(x) e^{-\tau x} \cdot e^{-i\omega x} dx$$

