Σειρές Fourier

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(nx)\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left[\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + \cdots + b_k \sin(kx)\right]\cos(nx)\,dx = \underline{\underline{a_n}}$$

$a_n \cos(nx)$

Σειρές Fourier

Σειρές Fourier

Οι μαθηματικοί του 18ου αιώνα, συμπεριλαμβανομένων των Daniel Bernoulli και Leonard Euler, προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα της κίνησης μιας τεντωμένης χορδής με μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Αυτές ωστόσο οι δ.ε. δεν λυνόταν εύκολα καθώς δεν είχαν «στοιχειώδεις συναρτήσεις» ως λύσεις.

Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, εισήγαγαν άπειρες σειρές συναρτήσεων ημιτόνου και συνημιτόνου που ικανοποιούσαν τις εξισώσεις.

Στις αρχές του 19ου αιώνα, ο Joseph Fourier, ενώ μελετούσε το πρόβλημα της ροής της θερμότητας, ανέπτυξε μια συνεκτική θεωρία τέτοιων σειρών οι οποίες καθιερώθηκαν να ονομάζονται σειρές Fourier.

Εισαγωγή

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Εισαγωγική άσκηση 1

Συμβολίζουμε $\delta_{nm} = 1$, αν $n = m$ και 0, αν $n \neq m$. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $n, m \in N$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \pi \delta_{nm}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \pi \delta_{nm}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0.$$

Υπόδειξη: $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$, $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$, $\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$

Σημείωση: Τα παραπάνω ισχύουν σε κάθε διάστημα μήκους 2π, δηλαδή $[\alpha, \alpha+2\pi]$, λόγω περιοδικότητας των $\sin(nx)$, $\cos(nx)$

Εισαγωγή

Εισαγωγική άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση **$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \cos(2x) + \alpha_3 \cos(3x)$.**

(α) Είναι η f περιοδική (αν ναι ποια είναι η περίοδός της;)

(β) Αξιοποιείστε την εισαγωγική άσκηση 1 για να εκφράσετε τους συντελεστές α_0, α_1, α_2, α_3 ως κατάλληλα ολοκληρώματα της f.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = a_0 \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} \cos x\,dx}}_{0} + a_1 \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{\pi} + a_2 \underbrace{\cancel{\int \cos 2x \cos x\,dx}}_{0} + a_3 \underbrace{\cancel{\int \cos 3x \cos x\,dx}}_{0}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi \cdot a_0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

Βασική Ιδέα

Από την εισαγωγική άσκηση 2, προκύπτει ότι σε κάθε συνάρτηση f που είναι γραμμικός συνδυασμός sin και cos οι συντελεστές γράφονται ως ολοκλήρωμα της f επί ένα αντίστοιχο sin ή cos.

Καθώς οι συναρτήσεις sin και cos είναι οι βασικότερες 2π-περιοδικές συναρτήσεις, εύλογα ανακύπτει το ερώτημα:

Είναι δυνατόν κάθε 2π-περιοδική συνάρτηση f να εκφραστεί ως:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Βασική Ιδέα

Ο Joseph Fourier κατάλαβε πως *αν* $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \cos(mx) + b_m \sin(mx),\ x \in [-\pi, \pi],$

τότε θα έπρεπε να είναι

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ \ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n \geq 1,\ \text{ και }\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n \geq 0.$$

Πράγματι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\right)\cos(nx)dx = \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \begin{cases} 2\pi\alpha_0,\ n=0 \\ \pi\alpha_n,\ n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\right)\sin(nx)dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi b_n,\ n \in \mathbb{N}$$

Σειρές Fourier – 1η έκφραση (T = 2π)

Έστω η **περιοδική συνάρτηση f** με περίοδο **T = 2π**, που ορίζεται στο (-π, π) και περιοδικά επεκτείνεται σε όλο το R με τη σχέση f(x + 2π) = f(x).

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f ορίζεται να είναι η παράσταση:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Γράφουμε $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Σειρές Fourier – 1η έκφραση (T = 2L) στο (-L, L)

Έστω η **περιοδική συνάρτηση f** με περίοδο **T = 2L**, που ορίζεται στο (-L, L) και επεκτείνεται σε όλο το R με τη σχέση f(x + 2L) = f(x).

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f ορίζεται να είναι η παράσταση:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Γράφουμε $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$

Σειρές Fourier – 1η έκφραση (T = 2L) στο (0, 2L)

Έστω η **περιοδική συνάρτηση f** με περίοδο **T = 2L**, που ορίζεται στο (0, 2L) και επεκτείνεται σε όλο το R με τη σχέση f(x + 2L) = f(x).

Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στην συνάρτηση f ορίζεται να είναι η παράσταση:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx,\quad b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\text{Γράφουμε } f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \grave{\alpha}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Σειρές Fourier – 2η έκφραση

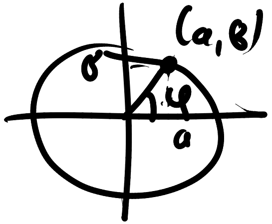
Είναι $\alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}\left[\frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}} \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) - \frac{-b_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)\right]$ (I)

Για $n \geq 1$, θεωρούμε τη γωνία φ_n, τέτοια ώστε $\cos(\varphi_n) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}$ και $\sin(\varphi_n) = -\frac{b_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}}$.

Γράφουμε $(\mathrm{I}) = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}\left[\cos(\varphi_n)\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) - \sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)\right] \overset{(1)}{=} A_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x + \varphi_n\right)$,

όπου $A_0 = \alpha_0$, $A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right)$, $n \geq 1$.

$|a|, |\beta| < 1$ $\quad$ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$



(1) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Σειρές Fourier – 2η έκφραση

Βρήκαμε ότι, αν f μία 2L−περιοδική συνάρτηση τότε

$$\mathbf{f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx + \varphi_n\right)}$$

όπου $A_0 = \alpha_0$, $A_n = \sqrt{\alpha_n^2 + b_n^2}$, $\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{\alpha_n}\right)$, $n \geq 1$.

Το σύνολο των ζευγών (A_n, φ_n), $n = 0, 1, \ldots$ ονομάζεται **φάσμα** της σειράς Fourier.

Η ακολουθία $(A_n)_{n=0,1,2\ldots}$ είναι το **φάσμα πλάτους (amplitude spectrum)**, ενώ η $(\varphi_n)_{n=0,1,2\ldots}$ είναι το **φάσμα φάσεως (phase spectrum).**

Σειρές Fourier – 3η έκφραση

Είναι: $$\alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \frac{\alpha_n}{2}\left(e^{i\pi n x/L} + e^{-i\pi n x/L}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{i\pi n x/L} - e^{-i\pi n x/L}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha_n - i b_n}{2}\right) e^{i\pi n x/L} + \left(\frac{\alpha_n + i b_n}{2}\right) e^{-i\pi n x/L}$$

Περαιτέρω:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - i b_n}{2}\right) e^{i\pi n x/L} + \left(\frac{\alpha_n + i b_n}{2}\right) e^{-i\pi n x/L}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - i b_n}{2}\right) e^{i\pi n x/L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n + i b_n}{2}\right) e^{-i\pi n x/L}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - i b_n}{2}\right) e^{i\pi n x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha_{-n} + i b_{-n}}{2}\right) e^{i\pi n x/L}$$

Σειρές Fourier – 3η έκφραση

Βρήκαμε ότι $f(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_n - ib_n}{2} \right) e^{i\pi n x/L} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{i\pi n x/L}$

Ορίζουμε $c_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \; c_n = \frac{\alpha_n - ib_n}{2}, \; c_{-n} = \frac{\alpha_n + ib_n}{2}, \; n = 1, 2, \ldots$

Αντικαθιστώντας, $\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} n x \right) dx, \; b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x \right) dx, \; n = 0, 1, 2, \ldots$

βρίσκουμε: $c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\pi n x/L} dx, \; n \in \mathbb{Z}.$

Δηλαδή, τελικά: $\mathbf{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L}}$, **με** $\mathbf{c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\pi n x/L} dx, \; n \in \mathbb{Z}.}$

Σειρές Fourier – 3η έκφραση

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \text{ με } c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\pi nx/L} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Στην περίπτωση αυτή, το σύνολο των ζευγών ($|c_n|$, $Arg(c_n)$), n є Z, ονομάζεται **φάσμα** της σειράς.

Η ακολουθία $(|c_n|)_{n \in Z}$ λέγεται **φάσμα πλάτους (amplitude spectrum)**, ενώ η $(Arg(c_n))_{n \in Z}$ λέγεται **φάσμα φάσεως (phase spectrum).**

Σημείωση: Φανερά $|c_{-n}| = |c_n|$ και $Arg(c_{-n}) = -Arg(c_n)$.

Συνθήκες του Dirichlet

Στη συνέχεια, θα λέμε ότι μία συνάρτηση ικανοποιεί τις **συνθήκες του Dirichlet** όταν είναι:

α) τμηματικά συνεχής,

β) έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο,

γ) έχει πεπερασμένου πλήθους ακρότατα.

Αποδεικνύεται ότι:

Για κάθε 2L-περιοδική συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο (-L, L), η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε αυτήν σε όλα τα σημεία x στα οποία η f είναι συνεχής και στο $[f(x^-) + f(x^+)]/2$ στα σημεία ασυνέχειας.

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://people.math.harvard.edu/~knill/teaching/math22b2019/handouts/lecture30.pdf

...ή εδώ: Chernoff, P. R. (1980). Pointwise Convergence of Fourier Series. The American Mathematical Monthly, 87(5), 399–400. https://doi.org/10.2307/2321220

Κριτήριο του Dirichlet

Αποδεικνύεται ότι **για κάθε 2L-περιοδική συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο (-L, L), η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε αυτήν σε όλα τα σημεία x στα οποία η f είναι συνεχής και στο $[f(x^-) + f(x^+)]/2$ στα σημεία ασυνέχειας.**

Δηλαδή, αν η 2L-περιοδική συνάρτηση f είναι συνεχής στο x, τότε

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

όπου

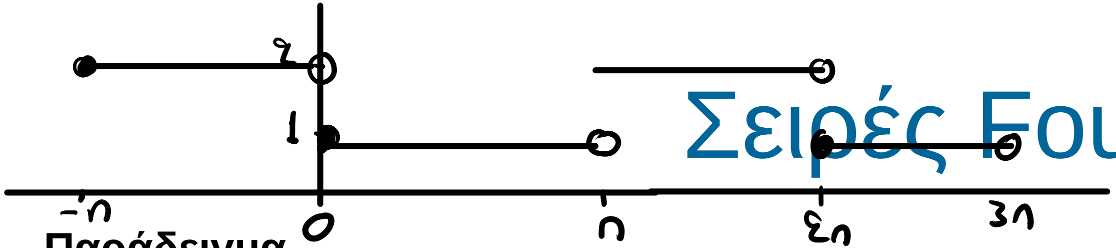
$$\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Περαιτέρω, για κάθε σημείο ασυνέχειας x_0, είναι:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right).$$

Σειρές Fourier

$\cos(n\pi) = (-1)^n$



Παράδειγμα

Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ και f(x + 2π) = f(x), να δείξετε ότι $f(x) \sim \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$

Λύση

Η σειρά Fourier της f είναι $f(x) \sim \dfrac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, όπου:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{2}{\pi}\pi + \frac{1}{\pi}\pi = 3.$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} = 0,\ n \neq 1.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi n}[\cos(nx)]_{x=-\pi}^{x=0} - \frac{1}{\pi n}[\cos(nx)]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi n}[1 - \cos(n\pi)] - \frac{1}{n\pi}[\cos(n\pi) - 1] = -\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{1}{n\pi}\left(-1 + (-1)^n\right)$$

Σειρές Fourier

Παράδειγμα

Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ και f(x + 2π) = f(x), να δείξετε ότι $f(x) \sim \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}$

Λύση

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}[-1+(-1)^n]\sin(nx) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots\right)$$

f συνεχής στο $(-\pi, 0)$: $2 = f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}$ ή $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = -\frac{\pi}{4}$.

f συνεχής στο $(0, \pi)$: $1 = f(x) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}$ ή $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Για $x = 0$ η f δεν είναι συνεχής: $\frac{3}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)\right)$.

Αναπαράσταση: https://www.geogebra.org/m/fdaYrVCH για f(x) = 3 - (sgn(x) + 3) / 2

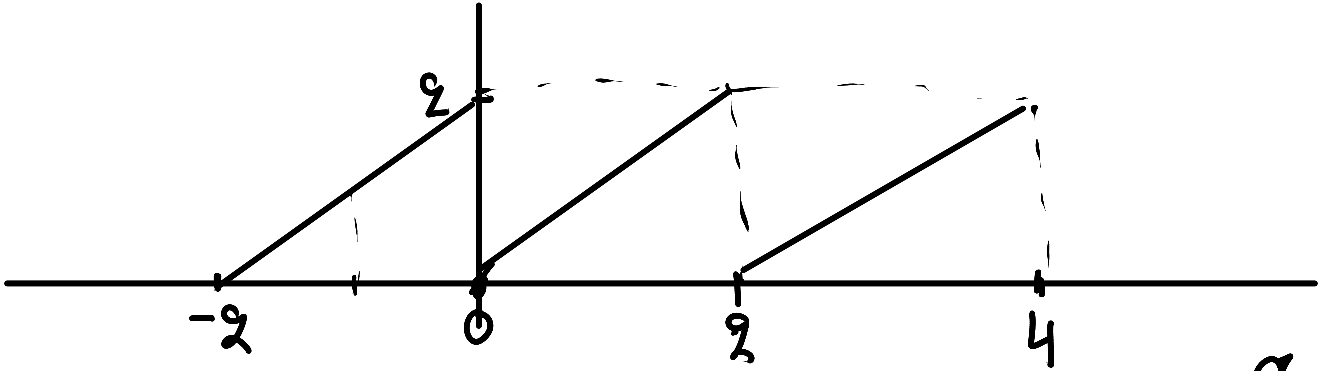
Σειρές Fourier

$2L = 2 \Leftrightarrow L = 1$

Άσκηση 1

Αν f: R → R, με f(x) = x, 0 ≤ x < 2 και f(x + 2) = f(x), να βρεθεί η σειρά Fourier της f.

Δίνεται ότι $\int x\cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}x\sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\cos(\alpha x) + c$, $\int x\sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}x\cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha x) + c$



$$f(x) \sim \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(n\pi x) + \beta_n \sin(n\pi x),$$

$$\alpha_n = \int_0^2 x \cdot \cos(n\pi x)dx$$

$$\beta_n = \int_0^2 x \cdot \sin(n \cdot \pi x)dx$$

Αναπαράσταση: https://www.geogebra.org/m/fdaYrVCH

$$a_n = \frac{1}{\pi n}\overset{0}{\cancel{x\sin(\pi n x)}} + \frac{1}{(\pi n)^2}\cos(\pi n x)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{(\pi n)^2}\left[\overset{1}{\cancel{\cos(2\pi n)}} - \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\right] = 0$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n}x\cos(\pi n x) + \frac{1}{(\pi n)^2}\overset{0}{\cancel{\sin(\pi n x)}}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = -\frac{1}{\pi \cdot n}\left[2\cos(2\pi n)\right] = -\frac{2}{\pi n}.$$

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 = 2.$$

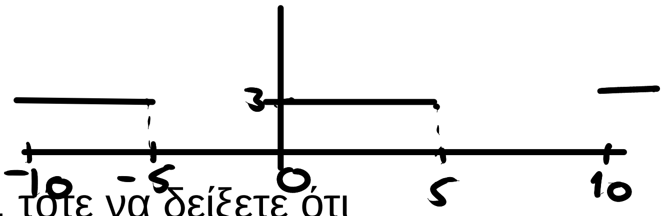
Σειρά Fourier: $f(x) \sim 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n} = 1 - \frac{2}{\pi}\left[\sin(\pi x) + \frac{\sin(2\pi x)}{2} + \dots\right]$

f: συνεχής $(0,2)$: $x = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi n x)}{n}, \ x \in (0,2).$

Για $x=0$: $\frac{1}{2}(2+0) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n \cdot 0)}{n}$

Για $x=2$: $\frac{1}{2}(0+2) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi n)}{n}$

Σειρές Fourier



Άσκηση 2: Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases}0, & -5\le x<0\\ 3, & 0\le x<5\end{cases}$ και f(x + 10) = f(x), τότε να δείξετε ότι

$$(\alpha)\ \ f(x)\sim \frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left[\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right],\ \ (\beta)\ \ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Λύση}\ \ (\alpha)\ \ \alpha_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{0}^{5}3\,dx=3.$$

$$n\ge 1:\ \ \alpha_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{5}nx\right)dx=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\left(\frac{\pi}{5}nx\right)dx=\frac{5}{\pi n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{5}nx\right)\right]_{x=0}^{x=5}=0.$$

$$n\ge 0:\ \ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\left(\frac{\pi}{5}nx\right)dx=\frac{3}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\text{Είναι}\ f(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{\pi}{5}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi}{5}nx\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n}\sin\left(\frac{\pi}{5}nx\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin\left(\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right)=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi x}{5}\right)+\frac{1}{5}\sin\left(5\frac{\pi x}{5}\right)+\dots\right]$$

Geogebra

Σειρές Fourier

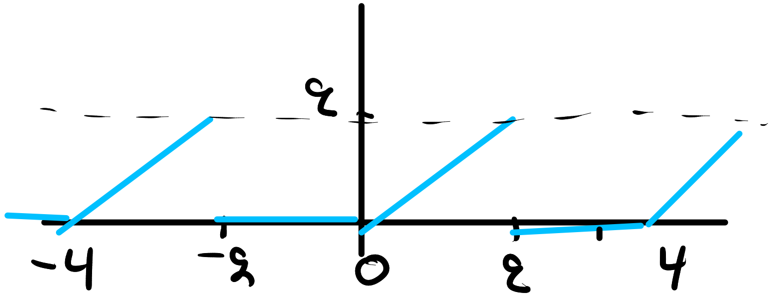
Άσκηση 2: Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases}0, & -5\le x<0\\ 3, & 0\le x<5\end{cases}$ και f(x + 10) = f(x), τότε να δείξετε ότι

(β) $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$.

$$f(x)\sim\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}(2k+1)x\right)}{2k+1}$$

Για $x=\frac{5}{\pi}$: $\cancel{f\left(\frac{5}{\pi}\right)}^{3}=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$.

Σειρές Fourier



Άσκηση 3

Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 2 \end{cases}$ και f(x + 4) = f(x),

(α) να βρεθεί η σειρά Fourier της f. (β) Να δείξετε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Δίνεται ότι $\int x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}x\sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\cos(\alpha x) + c$, $\int x\sin(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}x\cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha x) + c$

$2L = 4 \Leftrightarrow L = 2$,

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\sin(n\pi) = 0$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{n\pi}\cancel{\sin(n\pi)}^{0} + \frac{2}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \frac{2}{(\pi n)^2} \cdot \left[(-1)^n - 1\right] \quad , \quad a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{\pi n}\,x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) + \frac{1}{2}\,\frac{2^2}{(\pi n)^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\,2\cos(\pi n) = -\frac{2}{\pi n}(-1)^n$$

Σειρά Fourier: $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right) - \frac{2}{\pi n}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)$

$x=0$: σημείο συνέχειας της f:

$$0 = f(0) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{(\pi n)^2}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2} = -\frac{1}{2} \iff \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-2}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2} \iff \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$(-1)^n-1 : \quad \begin{array}{cccc} \cancel{n=0} & n=1 & n=2 & n=3 \\ \cancel{0} & -2 & 0 & -2 \end{array}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{-2}{1^2}+\frac{-2}{3^2}+\frac{-2}{5^2}+\cdots\right)$$

$2k+1,\ k=0\to+\infty$

Σειρές Fourier

Άσκηση 4

Έστω η 2π–περιοδική συνάρτηση f, με $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$.

(α) Να βρεθεί η σειρά Fourier της f. (β) Να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Δίνεται ότι: $\int x^2 \cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}x^2 \sin(\alpha x) + \frac{2}{\alpha^2}x\cos(\alpha x) - \frac{2}{\alpha^3}\sin(\alpha x) + c$

$$\int x^2 \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}x^2 \cos(\alpha x) + \frac{2}{\alpha^2}x\sin(\alpha x) + \frac{2}{\alpha^3}\cos(\alpha x) + c$$

Αναπαράσταση: https://www.geogebra.org/m/fdaYrVCH

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f: A → R, ονομάζεται **περιττή** αν

α) αν x є A, τότε -x є A

β) f(-x) = -f(x).

π.χ. οι $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5 – 3x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \tan(3x)$ είναι περιττές συναρτήσεις.

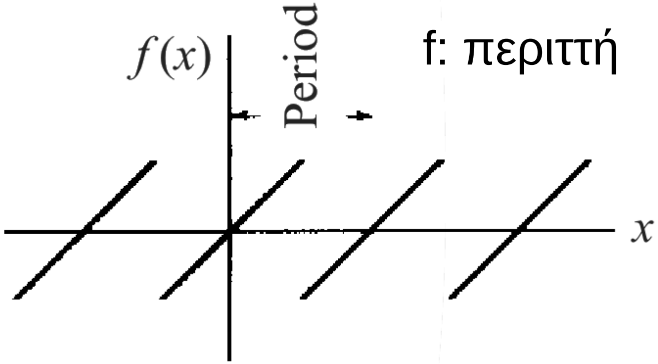
Μια συνάρτηση f: A → R, ονομάζεται **άρτια** αν

α) αν x є A, τότε -x є A

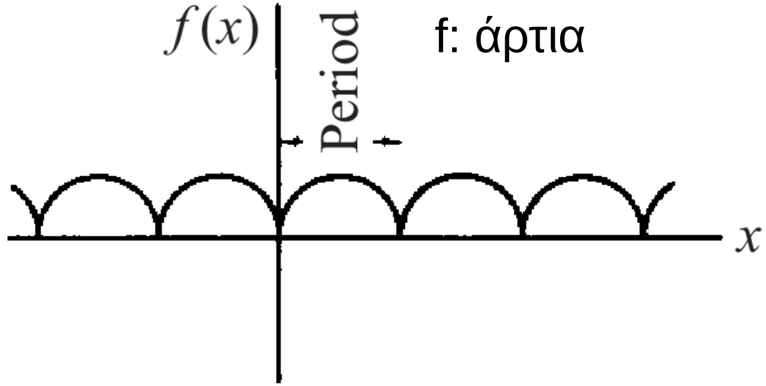
β) f(-x) = f(x).

π.χ. οι $f(x) = x^4$, $f(x) = x^2 – 3x^6$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x + e^{-x}$ είναι άρτιες συναρτήσεις.

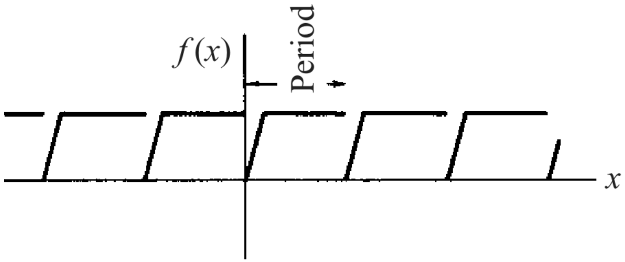
Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

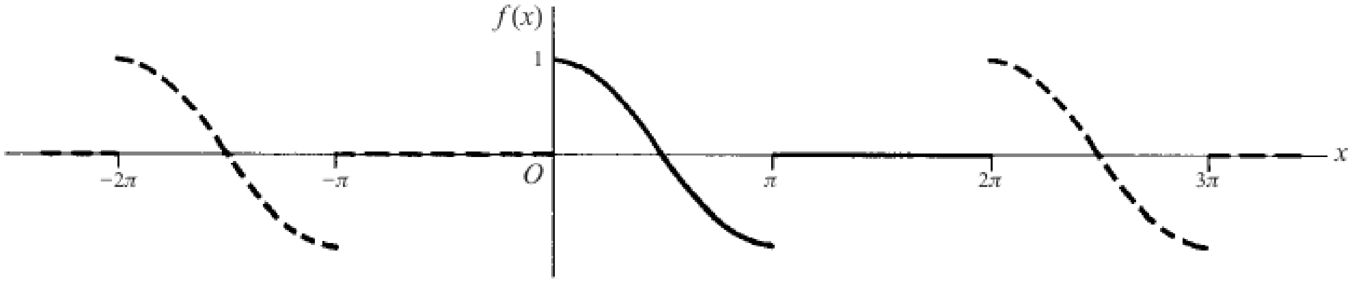


f: περιττή



f: άρτια





f: περιοδική αλλά ούτε άρτια ούτε περιττή

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

- Αν f **περιττή**, τότε $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0.$ π.χ. $\int_{-L}^{L} \sin(\alpha x)dx = 0.$
- Αν f **άρτια,** τότε $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx.$ π.χ. $\int_{-L}^{L} \cos(\alpha x)dx = 2\int_{0}^{L} \cos(\alpha x)dx.$
- Αν f **περιττή**, και g **άρτια**, τότε f·g περιττή και $\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = 0.$

  π.χ. $f:$ περιττή $\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\cos(\alpha x)dx = 0.$
- Αν f **άρτια**, και g **άρτια**, τότε f·g άρτια και $\int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)g(x)dx.$

  π.χ. $f:$ άρτια $\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\cos(\alpha x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\cos(\alpha x)dx.$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Αν f **περιττή** συνάρτηση, τότε $\alpha_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Δηλαδή:

f: περιττή → Σειρά Fourier $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)}$ με $b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Αντίστοιχα, αν f **άρτια** συνάρτηση, τότε $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Δηλαδή:

f: άρτια → Σειρά Fourier: $\frac{\alpha_0}{2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)}$ με $\alpha_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Αν f **περιττή** συνάρτηση, τότε στα σημεία συνέχειας της f:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

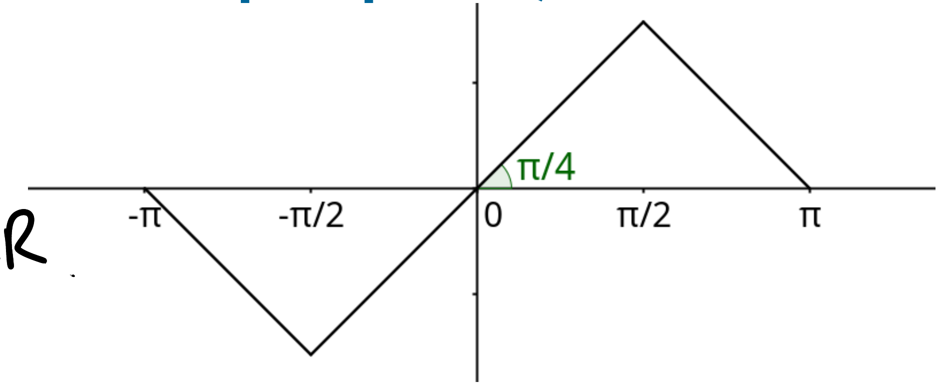
Αν f **άρτια** συνάρτηση, τότε στα σημεία συνέχειας της f:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Άσκηση 5

Να δείξετε ότι για την 2π–περιοδική περιττή συνάρτηση



του σχήματος είναι $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nx)$, $x\in\mathbb{R}$

Δίνεται ότι $\int x\cos(nx)dx=\frac{1}{n}x\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)+c$, $\int x\sin(nx)dx=-\frac{1}{n}x\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)+c$

Λύση

Η f είναι 2π-περιοδική συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι συνθήκες του Dirichlet.

Η f είναι συνεχής στο R, άρα για x ϵ R, θα είναι: $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(nx)$, με $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$, $n\geq 1$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\sin(nx)dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)dx=\frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Συμπεραίνουμε, ότι $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nx)$

Bonus ερώτημα: Δείξτε ότι: $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin((2k+1)x)$

$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	~~$n=0$~~	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
	$\cancel{0}$	1	0	-1	0

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nx) = \frac{1}{1^2}\sin(x) + \frac{(-1)}{3^2}\sin(3x) + \frac{1}{5^2}\sin(5x) + \cdots$$

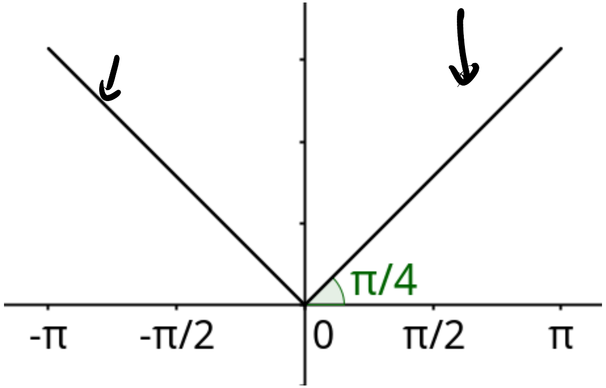
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left[(2k+1)x\right]$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -x & ,[-\pi,0] \\ x & ,[0,\pi] \end{cases}$$

Άσκηση 6

Να δείξετε ότι για την 2π–περιοδική συνάρτηση



του σχήματος είναι

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}$$

Δίνεται ότι $\int x\cos(nx)dx = \frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx) + c$

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) \quad , \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\cancelto{0}{\frac{1}{n}x\sin(nx)} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left[\cos(n\pi)-\cos(0)\right] = \frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{\pi n^2}.$$

f: συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos(nx)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-2}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Ταυτότητα του Parseval

Θεώρημα (ταυτότητα του Parseval)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής, περιοδική στο [-L, L] και

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right),$$

Τότε,

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n^2 + b_n^2\right)$$

Απόδειξη: Αντικατάσταση, επιμεριστική ιδιότητα και εφαρμογή της εισαγωγικής άσκησης 1.

Σημείωση: Αν θεωρήσουμε το χώρο $L^2[-\pi, \pi]$ με βάση $\left[\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right), \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\right]$, τότε η συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διάνυσμα στο χώρο αυτό.

Οι συντελεστές Fourier είναι οι προβολές της f σε κάθε ένα από τα διανύσματα της βάσης και η ταυτότητα του Parseval είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

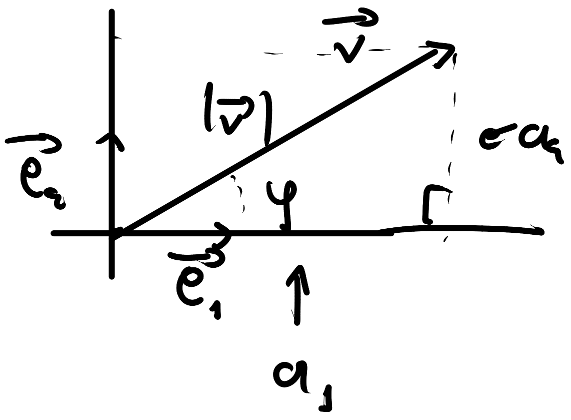
Η ταυτότητα του Parseval ως μορφή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο, γράφεται $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$, όπου $\vec{e}_1 = (1, 0)$ και $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Επιπλέον, αν $<\vec{v}, \vec{u}> = |\vec{v}||\vec{u}|\cos(\vec{v}, \vec{u})$, τότε $\alpha_1 = <\vec{v}, \vec{e}_1>$, $\alpha_2 = <\vec{v}, \vec{e}_2>$

και $|\vec{v}|^2 = <\vec{v}, \vec{v}> = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

Στο παραπάνω πλαίσιο, τα α_1, α_2 είναι οι προβολές του $\vec{v}$ στα διανύσματα βάσης.



$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$|\vec{v}|^2 = <\vec{v}, \vec{v}> = a_1^2 + a_2^2$$

$$\{\vec{e}_i, i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$<\vec{u}, \vec{v}> = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} a_i \vec{e}_i$$

$$a_i = <\vec{u}, \vec{e}_i>$$

Η ταυτότητα του Parseval ως μορφή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Γενίκευση 1: Γενικότερα, αν <f, g> ένα εσωτερικό γινόμενο και $[e_n]_{n \in N}$, ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων ($\langle e_n, e_m \rangle = 0$, $n \neq m$ και $\langle e_n, e_n \rangle = 1$) τότε για κάθε $f = \Sigma a_n e_n$, μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \langle f, e_n \rangle \text{ και } \langle f, f \rangle = \Sigma a_n^2.$$

Σημείωση: Με προϋποθέσεις σχετικά με τη σύγκλιση του αθροίσματος αν αυτό είναι άπειρο..

Οι συντελεστές a_n είναι οι “προβολές” της f σε κάθε ένα από τα διανύσματα της βάσης $[e_n]_{n \in N}$, και η ταυτότητα $\langle f, f \rangle = \Sigma a_n^2$ είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Η ταυτότητα του Parseval ως μορφή του Πυθαγορείου Θεωρήματος

$\|f\| = \langle f, f \rangle$

Γενίκευση 2: Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx$.

Αν $\zeta_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\zeta_n(x) = \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$, $n \geq 1$, $e_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το

σύνολο $[\zeta_n, e_n]_{n\geq 0}$, αποτελείται από ορθογώνια και μοναδιαία στοιχεία ως προς αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Κάτω από αυτήν τη θεώρηση, μπορούμε να δούμε ότι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \zeta_n \rangle \zeta_n + \langle f, e_n \rangle e_n$$

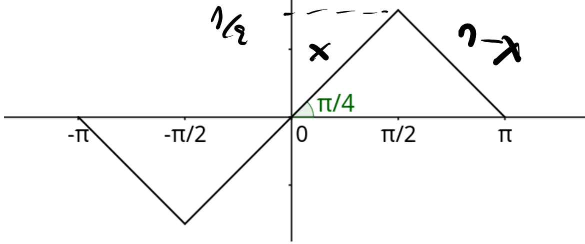
όπου $\langle f, \zeta_0 \rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}$, $\langle f, \zeta_n \rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx = \alpha_n$, $n \geq 1$,

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx = b_n, \quad n \geq 0.$$

Συμπεραίνουμε, $\langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, \zeta_n \rangle^2 + \langle f, e_n \rangle^2 \Leftrightarrow \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n^2 + b_n^2)$

και η ταυτότητα του Parseval αναγνωρίζεται ως μία εκδοχή του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.

Ταυτότητα του Parseval



Άσκηση 7

Για τη 2π–περιοδική συνάρτηση του σχήματος είναι $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin((2k+1)x),\ x \in \mathbb{R}.$

Δείξτε ότι: $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

αναπτυγμα Fourier

συντελεστές $b_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

Θεώρημα Parseval: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 = \frac{4^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi^2 x - \pi x^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\cancel{\frac{\pi^3}{24}} + \left(\cancel{\pi^3} - \cancel{\pi^3} + \frac{\pi^3}{3}\right) - \left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4} + \cancel{\frac{\pi^3}{24}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^3}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα, $\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{16}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$

f : περιοδική $[-L, L]$, $T = 2L$, συνεχής , παραγωγίσιμη σ.π.

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Parseval : $$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2 .$$

$\{\vec{v}_i , i \in \mathbb{N}\} = F$

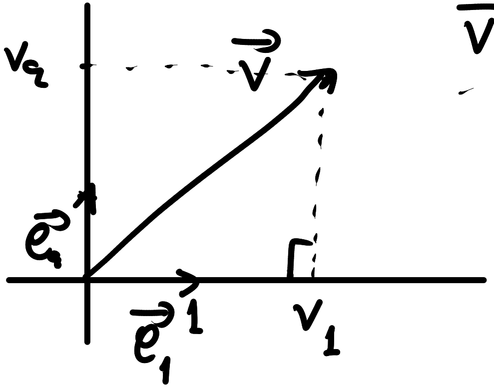
$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle : F \times F \to \mathbb{R}$

$\langle \vec{v} + \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}|^2$

$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0.$

$|\vec{v}|^2 = \sum v_i^2 \qquad \vec{v} = \sum v_i \vec{e}_i$



$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\varphi = v_1 \cdot w_1 + v_2 w_2$$

$v_1 = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle$
$v_2 = \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle$ | Π.Θ.: $|\vec{v}|^2 = \sum_i v_i^2$

Ταυτότητα του Parseval

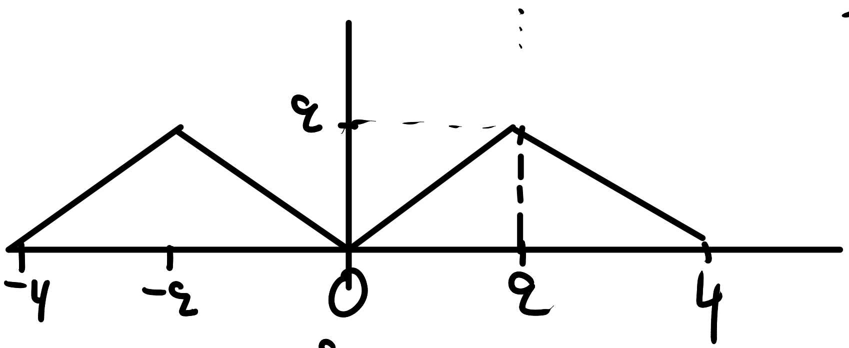
$2L = 4 \Leftrightarrow L = 2$

Άσκηση 8

Αν f: R → R, με $f(x)=\begin{cases} x & ,0 \le x < 2 \\ 4-x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$ και f(x + 4) = f(x). (α) να βρεθεί η σειρά Fourier της f.

(β) Να γραφεί η ταυτότητα του Parseval (γ) Να δειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. (δ) να δειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Δίνεται ότι $\int x\cos(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}x\sin(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\cos(\alpha x) + c$, $\int x\sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}x\cos(\alpha x) + \frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha x) + c$



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right)dx = \int_0^2 x\cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right)dx =$$

$$= \cancelto{0}{\frac{2}{\pi n} x \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \Big|_0^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] =$$

$$= \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi^2 n^2}$$

Σειρά Fourier: $f(x) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} n x\right)$

$$= 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)x\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)x\right).$$

(B) $f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f^2(x)\,dx = 2 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{8}{\pi^2}\,\frac{1}{(2n+1)^2}\right)^2$$

$$\cancelto{\frac{8}{3}}{\int_0^2 x^2\,dx} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}.$$

(γ) $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \rightarrow \frac{\pi^4}{96}$

$$S = \frac{1}{16} S + \frac{\pi^4}{96} \Longleftrightarrow \frac{15}{16} S = \frac{\pi^4}{96} \Longleftrightarrow S = \frac{\pi^4}{90}.$$