Μιγαδικές Συναρτήσεις

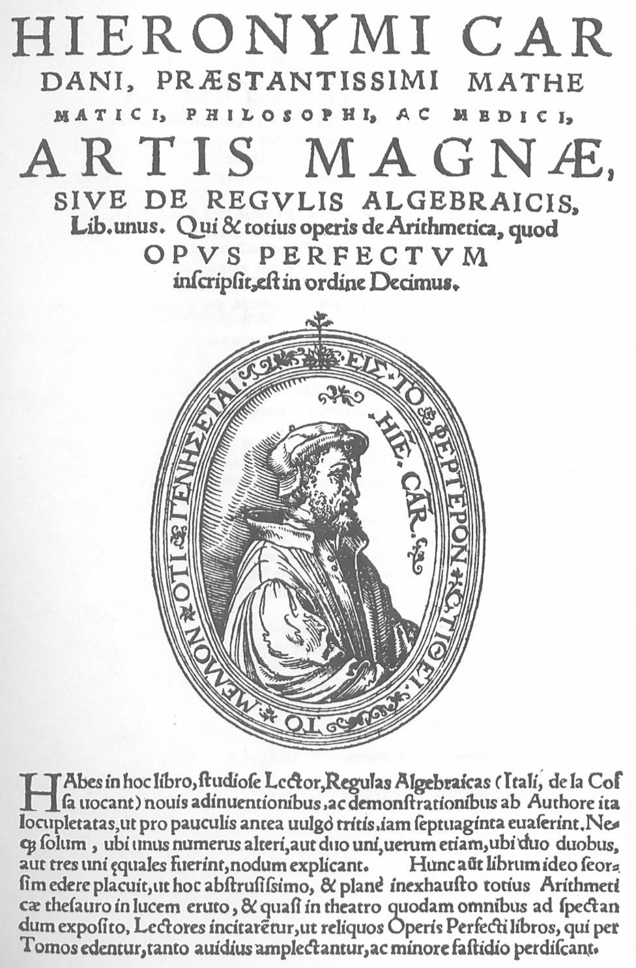
Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Το Ars Magna (Gerolamo Cardano, 1545) είναι ένα βιβλίο Άλγεβρας που θεωρείται μία από τις τρεις μεγαλύτερες επιστημονικές πραγματείες της πρώιμης Αναγέννησης, μαζί με το De Revolutionibus orbium coelestium του Κοπέρνικου και το De humani corporis fabrica του Vesalius.

Στο Ars Magna αναφέρονται κάποια προβλήματα που αποτέλεσαν το αρχικό κίνητρο για την εισαγωγή των φανταστικών αριθμών.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Ένα πρόβλημα που αναφέρεται από τον Cardano και οδηγεί σε τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών είναι:

Να βρεθούν δύο αριθμοί των οποίων

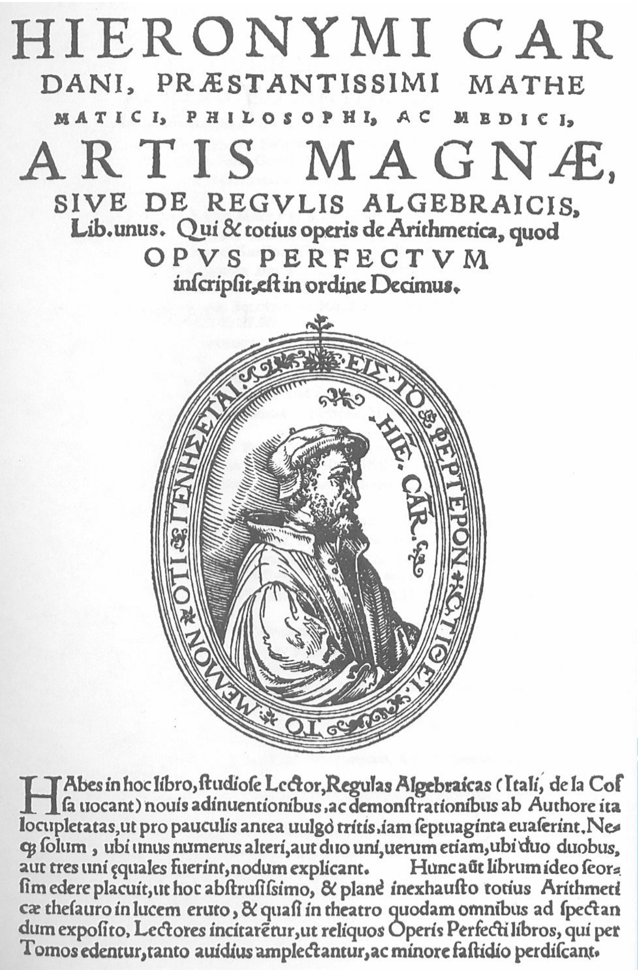
α) το άθροισμα είναι ίσο με 10 και

β) το γινόμενο είναι ίσο με 40.

Αν και δεν αποδίδει οποιοδήποτε νόημα στην λύση, ο Cardano αναφέρει πως οι αριθμοί $5+\sqrt{-15}$, $5-\sqrt{-15}$ αποτελούν λύση του προβλήματος, καθώς:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)=10$$

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)=5^2-\left(\sqrt{-15}\right)^2=25-\left(-15\right)=40.$$


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgo tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni equales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Ένα άλλο πρόβλημα που αναγνώριζε την ανάγκη ορισμού ριζών αρνητικών αριθμών έρχεται από την προσπάθεια επίλυσης εξισώσεων 3ου βαθμού

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Η εξίσωση αυτή για $x = y - 1/3\,\alpha$, παίρνει τη μορφή

$$y^3 = py + q,$$

όπου

$$p = \frac{\alpha^2}{3} - \beta,\quad q = \frac{\alpha\beta}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} - \gamma$$

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Η υπόθεση του Cardano
Στην $x^3 = px + q$, ο Cardano υπέθεσε ότι η λύση ήταν της μορφής $x = u + v$.

Με την υπόθεση αυτή και την επιπλέον συνθήκη $3uv = p$, προκύπτει ότι τα u, v πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$u^3 + v^3 = q$$
$$u^3 v^3 = (p/3)^3$$

δηλαδή, οι $U = u^3$, $V = v^3$, να είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2 – qt + (p/3)^2 = 0$.

Από την τελευταία εξίσωση υπολογίζεται το $t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

$x^3 = px + q$

Βρήκαμε ότι $t_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

Όμως, $t_1 = u^3$, $t_2 = v^3$, και $x = u + v$, από όπου καταλήγουμε:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w}, \quad \text{όπου} \quad w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{-121}}$$

$$2^2 - 5^3$$

$$\sqrt{-121}$$

Για το ιστορικό πλαίσιο όπου έγιναν οι παραπάνω υπολογισμοί, ρίξτε μία ματιά εδώ: https://www.youtube.com/watch?v=cUzklzVXJwo

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Η εξίσωση $x^3 = 15x + 4$, είναι της μορφής $\mathbf{x^3 = px + q}$, με $p = 15$, $q = 4$.

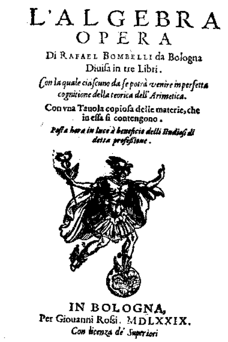
Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η εξίσωση έχει 3 πραγματικές ρίζες, 2 αρνητικές και 1 θετική.

Άρα, η θετική θα πρέπει να δίνεται από τον τύπο του Cardano. Υπολογίζουμε:

$$w = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3} = \sqrt{-121}, \text{ και } x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

Δηλαδή, πρέπει να είναι: $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$.

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Ο Ιταλός Rafael Bombelli, στο τρίτομο βιβλίο του “l’Algebra” (1572, 1579) θεώρησε τη $\sqrt{-1}$ ως ξεχωριστό αριθμό και απέδειξε την

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4,$$

ακολουθώντας τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες υπολογισμού.

Ακόμα πιο μετά, το 1637, ο Γάλλος Καρτέσιος (Rene Descarte) εισήγαγε Τον προσδιορισμό **φανταστικός** στην προσπάθεια του επίλυσης με γεωμετρικό τρόπο της εξίσωσης

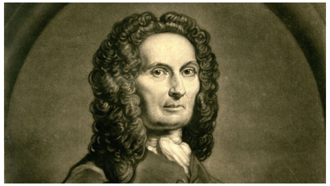
$$x^2 – αx + β^2 = 0, \text{ με } α, β > 0.$$

Έγραφε τότε:

For *any equation one can* ***imagine*** *as many roots [as its degree would suggest], but in many cases no quantity exists which corresponds to what one* ***imagines****.*

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

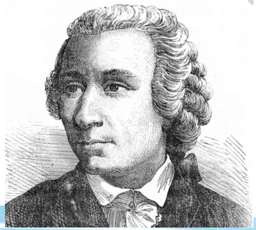
Ο Άγγλος John Wallis (1616-1703) στο δικό του βιβλίο “Algebra” εισάγει την γεωμετρική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών ως μία ευθεία με τον προσανατολισμό που χρησιμοποιούμε και σήμερα. Κάνει επιπλέον μία προσπάθεια να δώσει γεωμετρική υπόσταση στην τετραγωνική ρίζα του -1.



Ο Γάλλος Abraham de Moivre (1667-1754), συνεργαζόταν με τον Νεύτωνα (Newton) στο Λονδίνο. Το 1698 αναφέρει πως ο Νεύτωνας γνώριζε τον τύπο

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad \varphi \in R,\ n \in N.$$

που είχε ήδη ανακαλύψει ο ίδιος και που σήμερα είναι γνωστός ως τύπος του de Moivre.



Ο Ελβετός Euler (1707-1783) ήταν αυτός που εισήγαγε το συμβολισμό $i = \sqrt{-1}$ και έκανε πρόοδο τόσο στην γεωμετρική αναπαράσταση των φανταστικών αριθμών όσο και στις αλγεβρικές τους ιδιότητες.

Ο Νορβηγός Caspar Wessel (1745-1818), σε εργασία του το 1797, περιγράφει το άθροισμα διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου και το γινόμενο διανυσμάτων (πρόσθεση των ορισμάτων του), πράξεις που εφαρμόζονται αυτούσιες στους μιγαδικούς αριθμούς.

Ιστορία της φανταστικής μονάδας i

Ο Ιρλανδός William Rowan Hamilton (1805-65) περιγράφει επαρκώς τους μιγαδικούς αριθμούς ως διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών στα οποία εφαρμόζονται οι πράξεις
(α, β) + (γ, δ) = (α + γ, β + δ) και (α, β)(γ, δ) = (αγ − βδ, βγ + αδ).

Ο Γερμανός Carl Friedrich Gauss (1777-1855) μελέτησε τους μιγαδικούς αριθμούς και κατέγραψε και ένα θεώρημα που σήμερα το ονομάζουμε θεώρημα του Cauchy.

Ο Γάλλος Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) ήταν αυτός που το 1825, έθεσε τις βάσεις για την μιγαδική ανάλυση, προσδιορίζοντας την έννοια της αναλυτικής συνάρτησης.

Ορισμός φανταστικής μονάδας i

$\sqrt{-121}^2 = (\sqrt{-1} \cdot 11)^2 = -121.$

Ορισμός φανταστικής μονάδας i

Ορισμός

Ορίζουμε ως **φανταστική μονάδα** (imaginary unit) και συμβολίζουμε με **i** τον *αριθμό* για τον οποίο ισχύει $\mathbf{x^2 = -1}$.

Άρα, *εξ΄ ορισμού* είναι $\mathbf{i^2 = -1}$.

Κάθε αριθμός της μορφής **z = βi, β є R,** ονομάζεται **φανταστικός αριθμός.**

Η εξίσωση $x^2 = -1$

Η πολυωνυμική εξίσωση $x^2 = -1$, είναι 2ου βαθμού άρα έχει το πολύ 2 ρίζες.

Αν $x^2 = -1$, τότε είναι και $(-x)^2 = -1$.

Δηλαδή, αν x είναι μία ρίζα, τότε και το -x πρέπει να είναι ρίζα.

Από τον ορισμό του, το i είναι μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$.

Συμπεραίνουμε, ότι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = -1$ είναι οι αριθμοί i και -i.

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i$$

Μη Ορισμός του i

Προσοχή!

Ο ορισμός της φανταστικής μονάδας **δεν είναι** $i = \sqrt{-1}$.

Αν “ξεχαστούμε” και θεωρήσουμε πως $i = \sqrt{-1}$ και πως οι ιδιότητες της ρίζας που γνωρίζουμε για τους θετικούς αριθμούς ισχύουν και στους αρνητικούς, τότε μπορεί εύκολα να καταλήξουμε σε παράδοξα όπως το παρακάτω:

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Δυνάμεις της φανταστικής μονάδας

Για τον υπολογισμό των δυνάμεων του i, έχουμε τις παρακάτω προφανείς σχέσεις:

- $i^2 = -1$ (ορισμός)
- $i^3 = i^2\, i = (-1)i = -i$
- $i^4 = i^3\, i = (-i)i = -\, i^2 = 1$
- $i^5 = i^4\, i = 1\, i = i$
- $i^6 = i^5\, i = i\, i = i^2 = -1$

  ...

- $i^{-1} = 1 / i = i / i^2 = -i$
- $i^{-2} = 1/i^2 = -1$
- $i^{-3} = 1/i^3 = 1/(-i) = i$
- $i^{-4} = i$

Καθώς $i^4 = 1$, συνάγεται άμεσα ότι, για κάθε κ є Z:

- $i^{4κ} = 1$
- $i^{4κ + 1} = i$
- $i^{4κ + 2} = -1$
- $i^{4κ + 3} = -i$

Άσκηση

Να γίνουν οι πράξεις

(α) $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1.$

(β) $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$

(γ) $(-i)^5 = (-1)^5 \cdot i^5 = -1 \cdot i^4 \cdot i = -i.$

Σύνολο μιγαδικών αριθμών

Ορισμός συνόλου μιγαδικών αριθμών

Ορισμός
Κάθε αριθμός της μορφής **α + βi,** με α, β πραγματικούς αριθμούς ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number).** Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{C}$

Ο α ονομάζεται πραγματικό μέρος του z = α + βi και ο β φανταστικό μέρος του z. Γράφουμε **α = Re(z)** και **β = Im(z)**. Για κάθε α ϵ R, είναι α = α + 0i, άρα συμπεραίνουμε:

Οι μιγαδικοί αριθμοί περιέχουν τους πραγματικούς αριθμούς. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

Ωστόσο, το **C** έχει κάποιες διαφορές από το **R**. Μία σημαντική διαφορά που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι *δεν έχει διάταξη*.

Δηλαδή, <u>δεν έχει νόημα</u> να γράψει κάποιος α + βi < γ + δi, με |α| + |δ| ≠ 0.

Δραστηριότητα: Επαληθεύστε ότι για κάθε λ ϵ R είναι, Re(λz) = λ·Re z, Im(λz) = λ·Im z.

$Re(\lambda z) = Re(\lambda(a+\beta i)) = Re(\lambda a + \lambda\beta i) = \lambda a = \lambda \cdot Re(z)$.

Αριθμητική στο C

Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Η έννοια της ανισότητας δεν έχει νόημα στο C. Ωστόσο, *αποδεικνύεται* ότι:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta i = \gamma + \delta i} \text{ αν και μόνο αν } \boldsymbol{\alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta},$$

ή ισοδύναμα $\mathbf{z = w}$ αν και μόνο αν $\mathbf{Re(z) = Re(w)}$ **και** $\mathbf{Im(z) = Im(w)}$

Απόδειξη

Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι συνέπεια της παραδοχής ότι $i^2 = -1$.

$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \leftrightarrow \alpha - \gamma = i(\delta - \beta)$ (αναδιάταξη μελών)

$\leftrightarrow (\alpha - \gamma)^2 = -(\delta - \beta)^2$ (τετραγωνισμός και $i^2 = -1$)

$\leftrightarrow (\alpha - \gamma)^2 + (\delta - \beta)^2 = 0$ (αναδιάταξη μελών)

$\leftrightarrow \alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. (εφαρμογή πρότασης από πραγματική ανάλυση)

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Το i είναι αριθμός, άρα οι γνωστές ιδιότητες των αριθμών ισχύουν και για αυτό. Ιδιαίτερα, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, συνεχίζουν να ισχύουν η αντιμεταθετική ιδιότητα, η προσεταιριστική και η επιμεριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Με τους γνωστούς κανόνες οι πράξεις γίνονται ως εξής:

- $(\alpha + \beta i) \pm (\gamma + \delta i) = (\alpha \pm \gamma) + (\beta \pm \delta)i$
- $(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) = (\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta) + (\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma)i$
- $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \dfrac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \dfrac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Δραστηριότητα

Να γίνουν οι πράξεις (α) $(2 + i)(1 + i)$ (β) $\dfrac{3 + i}{1 + 2i}$ (γ) $(1 – i)^3$

(α) $(2+i)\cdot(1+i) = 2 + 2i + i + \cancel{i^2}^{\,-1} = 1+3i$.

(β) $\dfrac{3+i}{1+2i} = \dfrac{(3+i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)} = \dfrac{3+i-6i-2i^2}{1^2-(2i)^2} = \dfrac{5-5i}{1+4} = 1-i$.

(γ) $(1-i)^3 = 1^3 - 3\cdot1^2\cdot i + 3\cdot 1\cdot i^2 - i^3 = 1-3i-3+i = -2-2i$.

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Ορισμός

Έστω z = α + βi, α, β ϵ R. Τότε ο **συζυγής** μιγαδικός αριθμός του z είναι ο

$$\bar{z} = \alpha - \beta i$$

Είναι εύκολο να δειχθεί (πως;) ότι $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του z συμβολίζεται και z*.

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow \cancel{\alpha} - \beta i = \cancel{\alpha} + \beta i \Leftrightarrow 2\beta i = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Δραστηριότητα

Να βρεθούν οι συζυγείς των μιγαδικών αριθμών:

(α) $z = 3 + 2i$, (β) $z = -3 + i$, (γ) $z = -i$, (δ) $z = -2$

(α) $z = 3 + 2i \Leftrightarrow \bar{z} = 3 - 2i$

(β) $z = -3 + i \Leftrightarrow \bar{z} = -3 - i$

(γ) $z = -i \Rightarrow \bar{z} = i$

(δ) $z = -2 \Rightarrow \bar{z} = -2$

Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε z, w є C, ισχύουν τα εξής:

$\overline{\overline{z}} = z$

$\overline{z^n} = \overline{z}^n, \ n \in \mathbb{Z}.$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

$\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$

$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$

$\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

$\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{(a+i\beta)+(a-i\beta)}{2} = \dfrac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z).$

Τετραγωνική ρίζα μιγαδικού

Ορισμός

Αν z є C, τότε $\sqrt{z} = \{ w \in \mathbb{C} : w^2 = z \}$

Παρατήρηση

Η τετραγωνική ρίζα στο C, ορίζεται ανάλογα με το R, με τη διαφορά πως δεν υπάρχει πλέον ο περιορισμός της μη αρνητικότητας στην τιμή της. Αυτό έχει ως συνέπεια **η τετραγωνική ρίζα να έχει πλέον 2 τιμές.**

Άσκηση: Αν $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{x^2} = \pm x$, $\sqrt{-x^2} = \pm ix$.

$$\sqrt{x^2} = \{ w \in \mathbb{C} : w^2 = x^2 \}$$

$$w^2 = x^2 \Rightarrow w^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (w-x)(w+x) = 0 \Rightarrow w = \pm x.$$

$$\sqrt{-x^2} = \{ w \in \mathbb{C} : w^2 = -x^2 \}, \quad w^2 = -x^2 \Rightarrow w^2 + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2 - (ix)^2 = 0 \Rightarrow (w-ix)(w+ix) = 0 \Rightarrow w = \pm ix.$$

Ασκήσεις

Να υπολογιστούν: (α) $\sqrt{9}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{100}$.

(β) $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-49}$.

$\sqrt{9} = \pm 3$

$\sqrt{-1} = \pm i$

$\sqrt{-16} = \pm 4i$

$\sqrt{-49} = \pm 7i$.

Ας θυμηθούμε την εξίσωση 2ου βαθμού...

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου»**.
Έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \qquad [\text{αφού } \alpha\neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x\cdot\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε:

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \quad \text{ή} \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=0$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Αν **Δ < 0**, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Προσέξτε πως στο C μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση και στην περίπτωση Δ < 0!

Ασκήσεις

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$

$\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$ ...

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3$

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$.

Εναλλακτικά: $x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 = 0 \Rightarrow \ldots$

Πολυώνυμα στο C

Πολυώνυμα στο C

Γνωστά θεωρήματα που αφορούν τα πολυώνυμα, εξακολουθούν και ισχύουν για πολυώνυμα με μιγαδικούς συντελεστές.

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x), \qquad (2)$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Είναι δηλαδή

$$\upsilon = P(\rho)$$

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

(ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Πολυώνυμα στο C

Για την παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου στο C, ισχύουν οι γνωστοί κανόνες και τεχνικές, με την επισήμανση πως πλέον δεν υπάρχει αδυναμία υπολογισμού αρνητικής διακρίνουσας.

Δραστηριότητα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $z^3 - 2z^2 + z - 2$

$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = z(z^2+1) - 2(z^2+1) = (z-2)(z^2+1)$$

$$= (z-2)\cdot(z^2 - i^2) = (z-2)(z-i)(z+i).$$

Πολυώνυμα στο C

Δραστηριότητα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $z^3 – 7z^2 + 41z – 87$

Πολυώνυμα στο C

Στο R, κάθε πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε γινόμενο πρωτοβάθμιων, δευτεροβάθμιων ή όρων μεγαλύτερου βαθμού.

Στο C ωστόσο αποδεικνύεται ότι κάθε πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων.

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (ή Θεώρημα D' Alembert)
Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων, ακριβώς n ρίζες.

Άρα, αν $P(z) = α_n z^n + α_{n-1} z^{n-1} + \dots + α_1 z + α_0$, με $α_i \in C$, $i = 0, 1, .., n$, τότε μπορούμε πάντα να γράψουμε το $P(z)$ ως γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων:

$$P(z) = α_n(z - ρ_n)(z - ρ_{n-1})\dots(z - ρ_1)$$

Σημείωση: Για το θεώρημα αυτό υπάρχουν πολλές αποδείξεις, καμία όμως δεν είναι “απλή”. Περισσότερες πληροφορίες εδώ:
https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra#Proofs

Πολυώνυμα στο C

Δραστηριότητα

Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $z^3 + iz^2 – z – i$.

Υπόδειξη: Ξεκινήστε βρίσκοντας μία προφανή ρίζα. Στη συνέχεια κάντε σχήμα Horner.

Πολυώνυμα στο C με πραγματικούς συντελεστές

Η αντιμεταθετικότητα του συζυγή μιγαδικού αριθμού με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό έχει ως συνέπεια ένα πολύ ενδιαφέρον αλγεβρικό συμπέρασμα.

Θεώρημα

Αν P(z) είναι ένα πολυώνυμο *με πραγματικούς συντελεστές* και z είναι μία ρίζα του τότε και ο συζυγής του z οφείλει να είναι ρίζα του.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $P(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$ και $P(z) = 0$, τότε θα είναι και

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$$

Το παραπάνω Θεώρημα έχει ως άμεσο πόρισμα την εξής πρόταση:

Οι μη πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές εμφανίζονται πάντα ως ζεύγη συζυγών αριθμών.

Αλγεβρικές Ταυτότητες

Ισχύουν όλες οι γνωστές αλγεβρικές ταυτότητες, δηλαδή, αν z, w, v ϵ C, τότε:

- $(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$
- $(z \pm w)^3 = z^3 \pm 3z^2w + 3zw^2 \pm w^3$
- $(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $z^2 – w^2 = (z – w)(z + w)$, (αλλά και $z^2 + w^2 = (z – wi)(z + wi)$)
- $z^3 \pm w^3 = (z \pm w)(z^2 \mp zw + w^2)$
- $(z + w + v)^2 = z^2 + w^2 + v^2 + 2zw + 2zv + 2wv$

Γεωμετρική αναπαράσταση

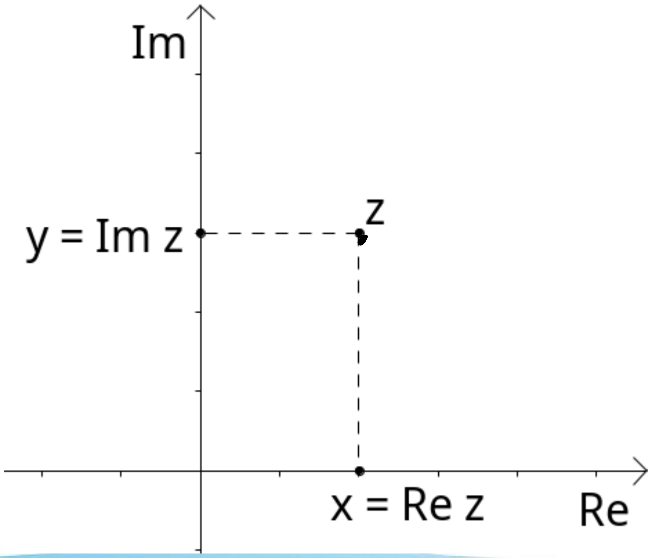
Αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο

Έστω $z = x + iy = (x, y)$, $x, y \in R$. Ο αριθμός z μπορεί να αναπαρασταθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ως **ένα σημείο** το οποίο θα έχει:

- τετμημένη το $x = \text{Re } z$.
- τεταγμένη το $y = \text{Im } z$.

Τα σημεία του οριζόντιου άξονα αντιστοιχούν σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Ο οριζόντιος άξονας ονομάζεται **πραγματικός άξονας**.

Τα σημεία του κατακόρυφου άξονα αντιστοιχούν σε όλους τους φανταστικούς αριθμούς. Ο κατακόρυφος άξονας ονομάζεται **φανταστικός άξονας**.



Κάθε μιγαδικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σημείο και κάθε σημείο ορίζει ένα μιγαδικό αριθμό. Το καρτεσιανό επίπεδο με την παραπάνω αντιστοίχιση ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο.**

Οι μιγαδικοί αριθμοί ως διανύσματα

Έστω $z = α + βi$ και $w = γ + δi$. Είναι $(α + βi) + (γ + δi) = (α + γ) + (β + δ)i$.

Τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z, w είναι το πέρας των διανυσμάτων (α, β) και (γ, δ) αντίστοιχα, ενώ το άθροισμα z + w αντιστοιχεί στο πέρας του διανύσματος (α + γ, β + δ).

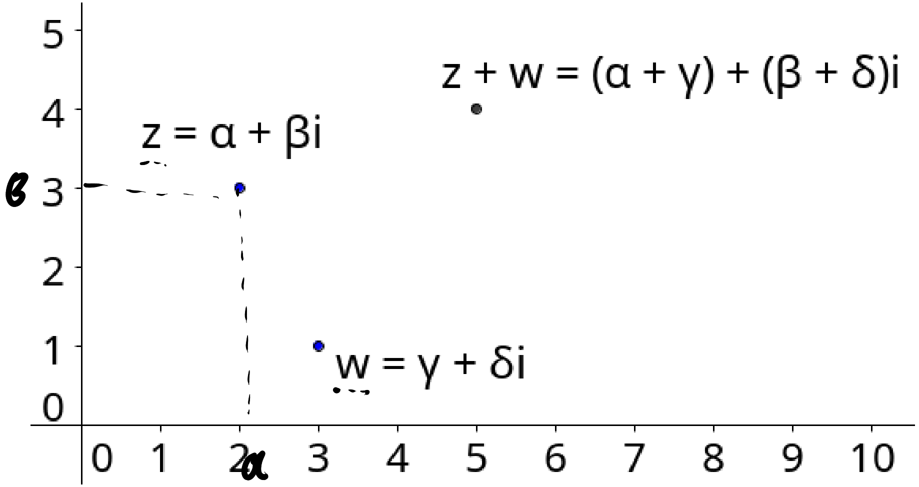
Από τα σχολικά μαθηματικά, γνωρίζουμε ότι το άθροισμα δύο διανυσμάτων μπορεί να υπολογιστεί από τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

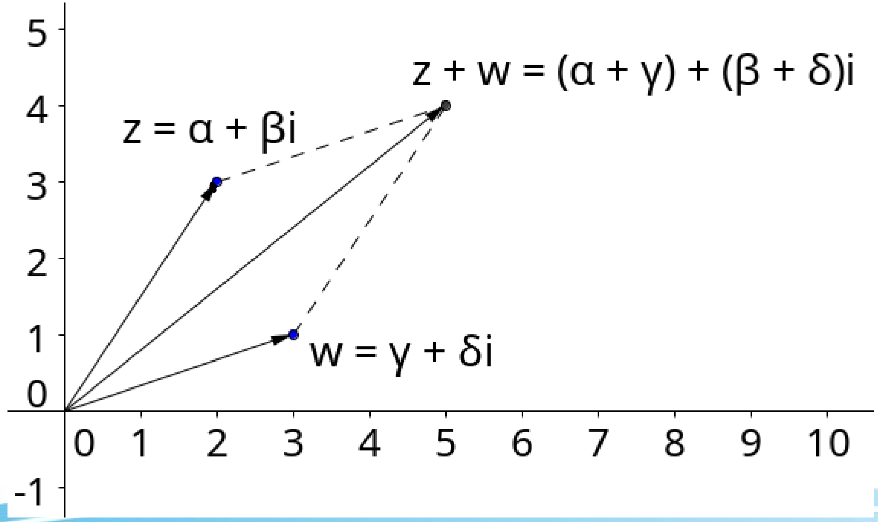
Συμπεραίνουμε, ότι:

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον γεωμετρικό υπολογισμό αθροίσματος μιγαδικών αριθμών.

Οι μιγαδικοί αριθμοί ως διανύσματα

Ο κανόνας του παραλληλογράμμου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον γεωμετρικό υπολογισμό αθροίσματος μιγαδικών αριθμών.





Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο

Φανερά:

- αν ε // x’x και η ε διέρχεται από το $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε η εξίσωση της ε είναι ε: $Im(z) = y_0$.
- αν ε // y’y και η ε διέρχεται από το $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε η εξίσωση της ε είναι ε: $Re(z) = x_0$.

Αν η ε διέρχεται από τα σημεία z_1 ,z_2 τότε ο συντελεστής διεύθυνσής της θα είναι ο:

$$\lambda = (Im(z_2) – Im(z_1))/ (Re(z_2) – Re(z_1))$$

και η εξίσωσή της θα είναι: ε: $Im(z) – Im(z_1) = \lambda\, (Re(z) – Re(z_1))$ ή

$$\frac{Im(z) - Im(z_1)}{Re(z) - Re(z_1)} = \frac{Im(z_2) - Im(z_1)}{Re(z_2) - Re(z_1)}$$

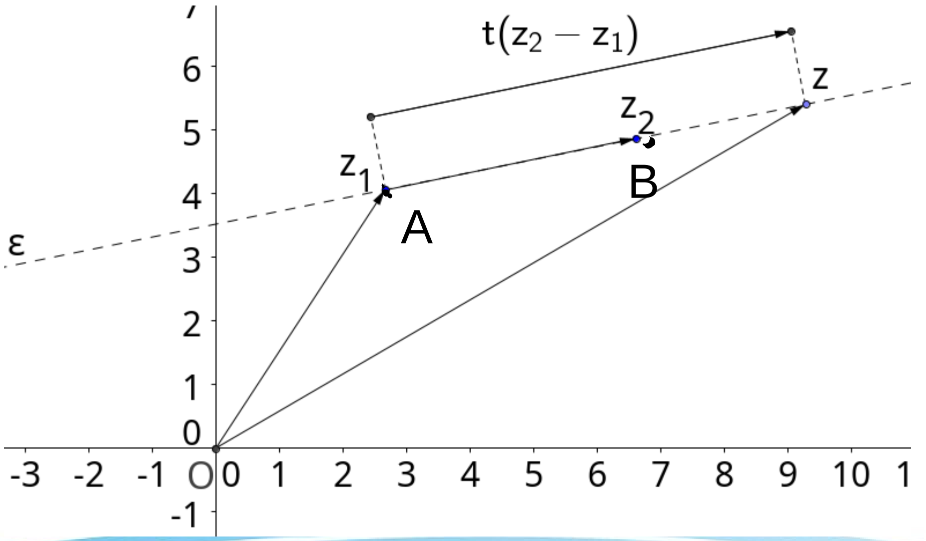
Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο

Εναλλακτικά, αν Α, Β δύο σημεία του επιπέδου τότε η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση:

$$f(t) = \overrightarrow{OA} + t\cdot \overrightarrow{AB},\ t \in R.$$

Αν z_1, z_2, οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στα διανύσματα ΟΑ, ΟΒ, αντίστοιχα, τότε $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$ και η εξίσωση της ε γράφεται

$$\mathbf{f(t) = z_1 + t(z_2 - z_1),\ t \in R,}$$



Σημείωση: Είναι αξιοσημείωτο ότι στη θέση του t μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με σύνολο τιμών το R, όπως π.χ.

$$\mathbf{f(t) = z_1 + t^3(z_2 - z_1),\ t \in R,}$$

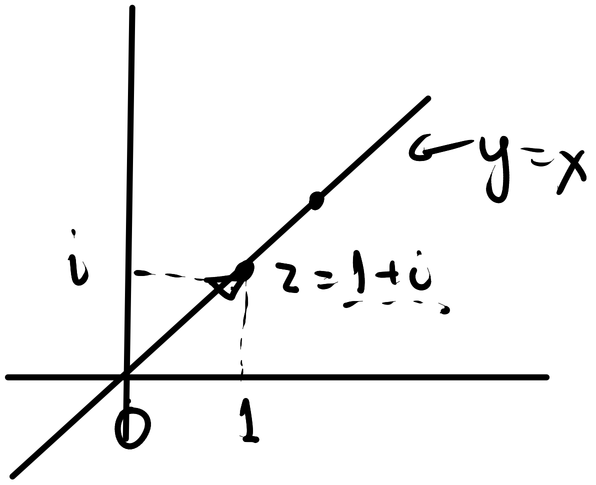
ή ακόμα και

$$\mathbf{f(t) = z_1 + \tan(t)(z_2 - z_1),\ t \in (-\pi/2, \pi/2).}$$

Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο

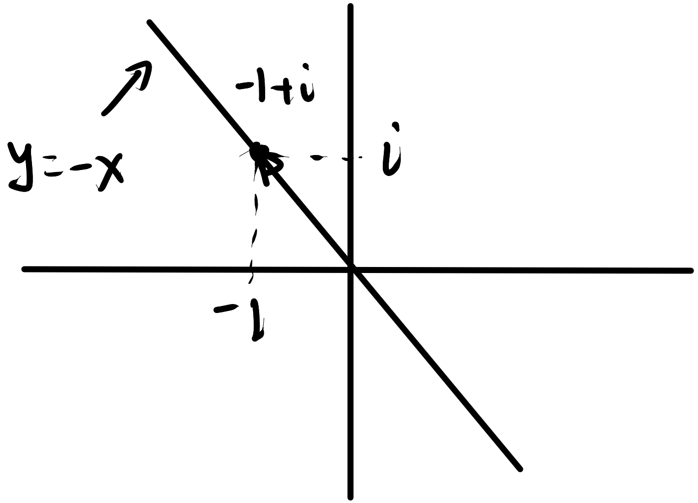
Παράδειγμα
Η διχοτόμος του 1ου – 3ου τεταρτημορίου του μιγαδικού επιπέδου διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο z = 1 + i, άρα μία παραμετρική εξίσωση για αυτήν είναι η

f(t) = t(1 + i), t є R.



Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο

Άσκηση
Να βρεθεί μία παραμετρική εξίσωση της διχοτόμου του 2ου - 4ου τεταρτημορίου του μιγαδικού επιπέδου.



$$f(t) = t\cdot(-1+i),\ t\in\mathbb{R}.$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

$\sqrt{z} = \{w \in \mathbb{C} : w^2 = z\}$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Ορισμός

Ως μέτρο |z| ενός μιγαδικού αριθμού z = α + βi, καλούμε την ποσότητα

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$\cancel{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$

Σημείωση: Το μέτρο του z είναι το μέτρο του διανύσματος (α, β).

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

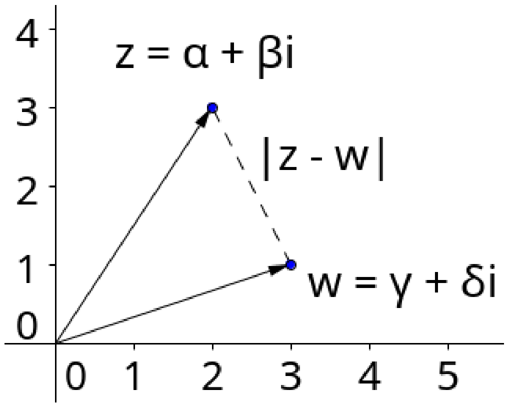
- $|z|^2 = z\bar{z}$

$z \cdot \bar{z} = (a+\beta i)\cdot(a-\beta i) = a^2 - (\beta i)^2 = a^2 + \beta^2 = |z|^2$

- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0,$
- $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$ (τριγωνική ανισότητα)

Απόσταση μιγαδικών αριθμών

Έστω z, w ϵ C. Με τους αριθμούς z και w προσδιορίζονται και δύο διανύσματα με αρχή την αρχή των αξόνων O και πέρας το z και το w αντίστοιχα. Η διαφορά των δύο διανυσμάτων z – w είναι ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο w και πέρας το σημείο z. Άρα, το μέτρο του διανύσματος z – w θα είναι η απόσταση των z, w.



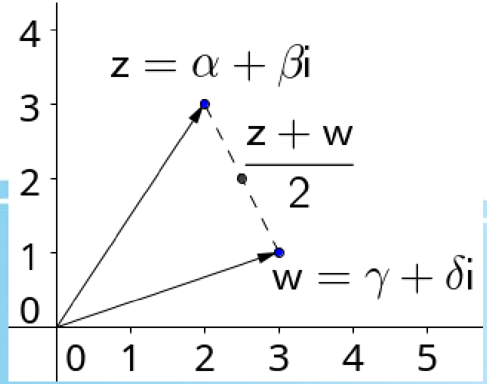
Η παράσταση |z – w| εκφράζει την απόσταση των σημείων z και w στο μιγαδικό επίπεδο,

$$d(z, w) = |z - w|.$$

Επιπλέον:

Το μέσο Μ του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ των σημείων z και w, προσδιορίζεται από τον μιγαδικό αριθμό

$$\frac{z + w}{2}$$



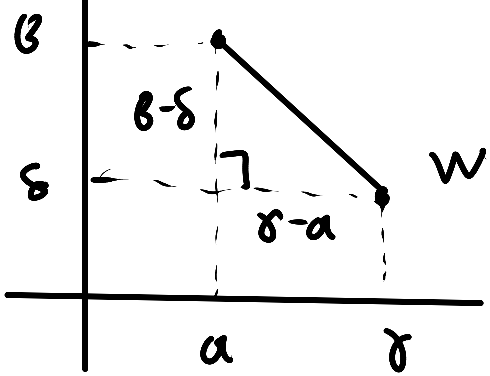
Απόσταση μιγαδικών αριθμών

Δραστηριότητα

Να αποδειχθεί ότι d(z, w) = |z – w| με αλγεβρικές μεθόδους.

$z = \alpha + \beta i$

$d(z,w) = \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + (\beta - \delta)^2} = |z - w|$.



$w = \gamma + \delta i$

Αξιοσημείωτα υποσύνολα του C

Ορισμένα υποσύνολα (ή χωρία) του μιγαδικού επιπέδου που συναντώνται συχνά στη μιγαδική ανάλυση είναι τα εξής:

Ο **ανοικτός δίσκος** με κέντρο το μιγαδικό αριθμό z_0 και ακτίνα r

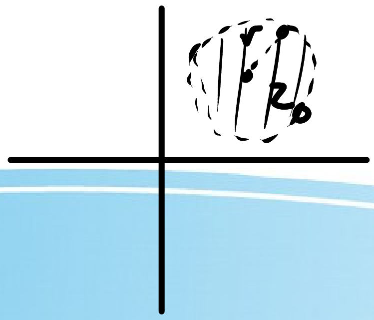
$$D_r(z_0) = \{z \in C : |z - z_0| < r\}$$

Ειδικότερα, αν r = 1 και $z_0 = 0$, ο $D_1(0) = \{z \in C : |z| < 1\}$ λέγεται απλά μοναδιαίος δίσκος και συμβολίζεται με D ή U.

$D_r(z_0)$

Ο **κλειστός δίσκος** με κέντρο το μιγαδικό αριθμό z_0 και ακτίνα r

$$\overline{D_r(z_0)} = \{ z \in C : |z - z_0| \le r \}$$



Αξιοσημείωτα υποσύνολα του C

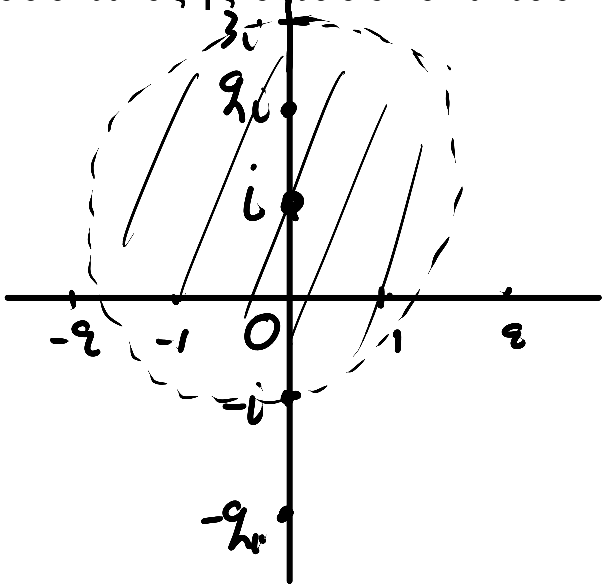
Δραστηριότητα

Να καταδειχθούν στο μιγαδικό επίπεδο τα εξής υποσύνολά του:

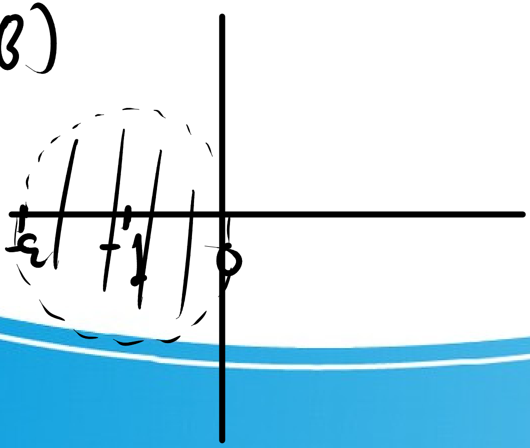
α) $|z - i| < 2$

β) $|z + 1| \leq 1$

(α)



(β)



Αξιοσημείωτα υποσύνολα του C

Δραστηριότητα
Να καταδειχθούν στο μιγαδικό επίπεδο τα εξής υποσύνολά του:

α) $|z| > 1$

β) $2 < |z| < 3$

Αξιοσημείωτα υποσύνολα του C

Δραστηριότητα

Να καταδειχθούν στο μιγαδικό επίπεδο τα εξής υποσύνολά του:

α) $\mathrm{Im}\, z < 0$

β) $-1 < \mathrm{Re}\, z < 1$

Εξισώσεις κωνικών τομών

Η εξίσωση κύκλου με κέντρο O και ακτίνα r είναι $|z| = r$.

Η εξίσωση κύκλου με κέντρο z_0 και ακτίνα r είναι $|z - z_0| = r$.

Η εξίσωση έλλειψης με εστίες α και β, είναι $|z - \alpha| + |z - \beta| = c$, όπου $c > |\alpha - \beta|$.

Η εξίσωση υπερβολής με εστίες α και β, είναι $||z - \alpha| - |z - \beta|| = c$, όπου $c < |\alpha - \beta|$.

Η εξίσωση παραβολής με εστία α και διευθετούσα δ: $\beta + \gamma t$, $t \in R$, $\alpha, \beta, \gamma \in C$, είναι

$$|z - \alpha| = \left|\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{\gamma}(z - \beta)}{|\gamma|}\right)\right|.$$

Σχετική αναφορά: https://math.stackexchange.com/questions/481582/equation-of-ellipse-hyperbola-parabola-in-complex-form

Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Ο μιγαδικός αριθμός z = x + iy, θεωρούμενος ως διάνυσμα προσδιορίζει μία γωνία φ, με αρχή μέτρησης τον θετικό πραγματικό ημιάξονα και τέλος μέτρησης το διάνυσμα (x, y).

Η γωνία φ ονομάζεται **όρισμα (argument)** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με **arg z**.

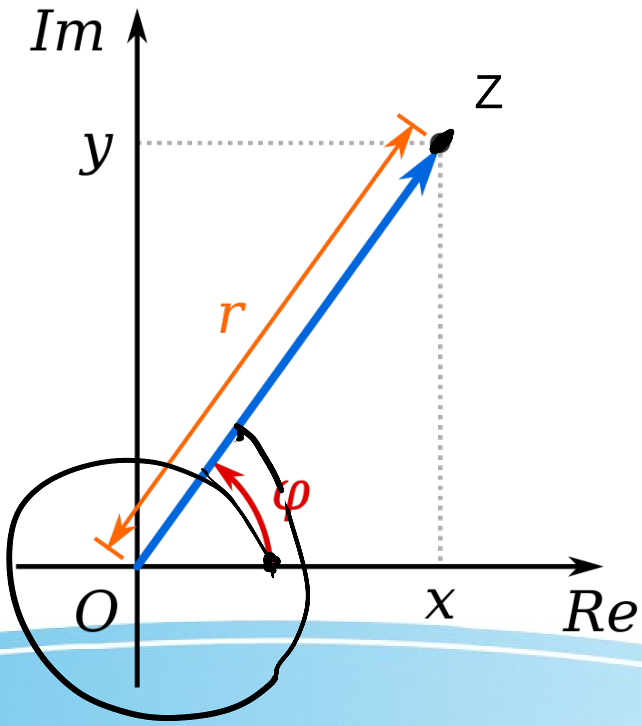
Προσοχή: Η γωνία ενός διανύσματος περιορίζεται στο [0, 2π). Στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, το όρισμα δεν έχει άνω και κάτω όριο. Δηλαδή, αν φ είναι το όρισμα του z, τότε κάθε γωνία φ + 2κπ είναι επίσης όρισμα του z, δηλαδή

arg z = φ + 2κπ, κ ϵ Z.

Πρωτεύον όρισμα (principal argument) του μιγαδικού αριθμού ονομάζεται η μοναδική γωνία που αποτελεί όρισμα και ανήκει στο (-π, π]. Γράφουμε

Arg z = φ ϵ (-π, π].

Σημείωση
Η αντιστοίχιση z → arg(z) δεν είναι συνάρτηση, ενώ η z → Arg(z) είναι.



Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Άσκηση: Να βρεθεί το όρισμα και το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών

$\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$

(α) 1

(β) -1 $\quad \arg(-1) = \pi + 2\kappa\pi, \ \mathrm{Arg}(-1) = \pi$

ή $-\pi + 2\kappa\pi$

(γ) 1 + i

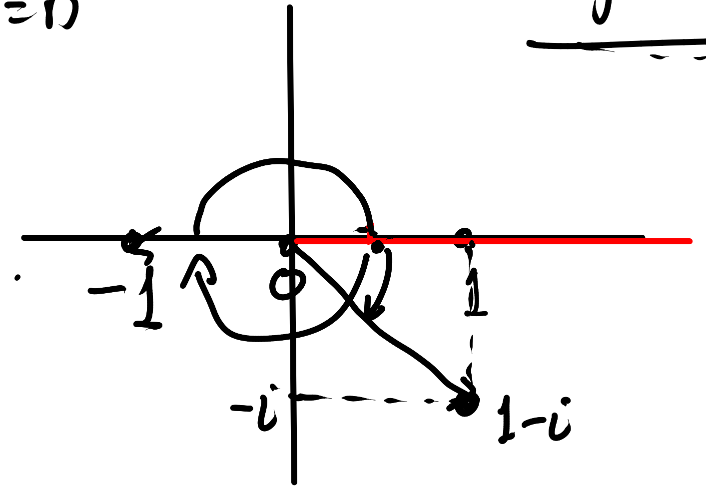
(δ) 1 – i $\quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi, \ \mathrm{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}.$

(ε) z = x + 0i, με x > 0.

(ζ) z = x + 0i, με x < 0.

(η) z = yi, με y > 0.

(θ) z = yi, με y < 0.



$\arg 1 = 0 + 2\kappa\pi$

$\mathrm{Arg}\, 1 = 0$

Υπόδειξη: Τοποθετήστε τα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο.

Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Λύση

(α) 1: arg(1) = 2κπ, κ є Z και Arg(1) = 0.

(β) -1: arg(-1) = 2κπ + π, κ є Z και Arg(-1) = π.

(γ) 1 + i: arg(1 + i) = 2κπ + π/4, κ є Z και Arg(1 + i) = π/4.

(δ) 1 – i: arg(1 – i) = 2κπ – π/4, κ є Z και Arg(1 – i) = - π/4.

(ε) z = x + 0i, με x > 0: arg(z) = 2κπ, κ є Z και Arg(x) = 0.

(ζ) z = x + 0i, με x < 0: arg(z) = 2κπ + π, κ є Z και Arg(x) = π.

(η) z = yi, με y > 0: arg(yi) = 2κπ + π/2, κ є Z και Arg(yi) = π/2.

(θ) z = yi, με y < 0: arg(yi) = 2κπ – π/2, κ є Z και Arg(yi) = -π/2.

Όρισμα μιγαδικού αριθμού

$\mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi]$.

Άσκηση: Να βρεθεί ένας μιγαδικός αριθμός με όρισμα

(α) -π , $z = x$, $x < 0$.

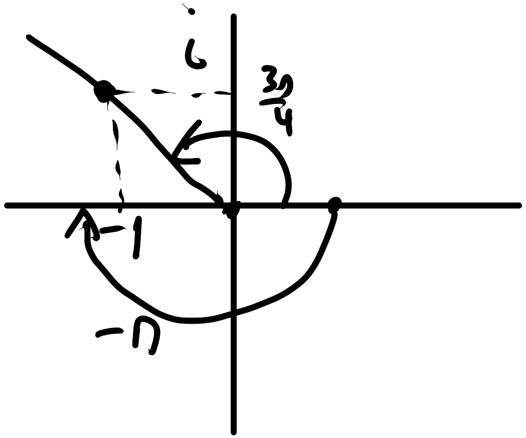
(β) π

(γ) 3π/4 $z = -1 + 0$, $z = -2 + 2i$,

(δ) -3π/4

(ε) π/6

(ζ) -5π/6



Υπόδειξη

Επιλέξτε οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό που βρίσκεται στην ευθεία με γωνία το όρισμα που δίνεται.

Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Λύση

(α) -π: Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $z = x + 0i$, με $x < 0$.

(β) π: Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $z = x + 0i$, με $x < 0$.

(γ) 3π/4: Κάθε αριθμός στη διχοτόμο του 2ου τεταρτημορίου, π.χ. $z = -1 + i$.

(δ) -3π/4: Κάθε αριθμός στη διχοτόμο του 4ου τεταρτημορίου, π.χ. $z = -1 – i$.

(ε) π/6: Κάθε αριθμός της μορφής $z = r \cos \pi/6 + i\, r \sin \pi/6$, $r > 0$ (γιατί;)

(ζ) -5π/6: Κάθε αριθμός της μορφής $z = -r \cos \pi/6 - i\, r \sin \pi/6$, $r > 0$ (γιατί;)

Πολική (ή τριγωνομετρική) μορφή

Έστω z = x + iy. Το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό z είναι το πέρας του διανύσματος (x, y). Αν r το μέτρο του διανύσματος (x, y), τότε

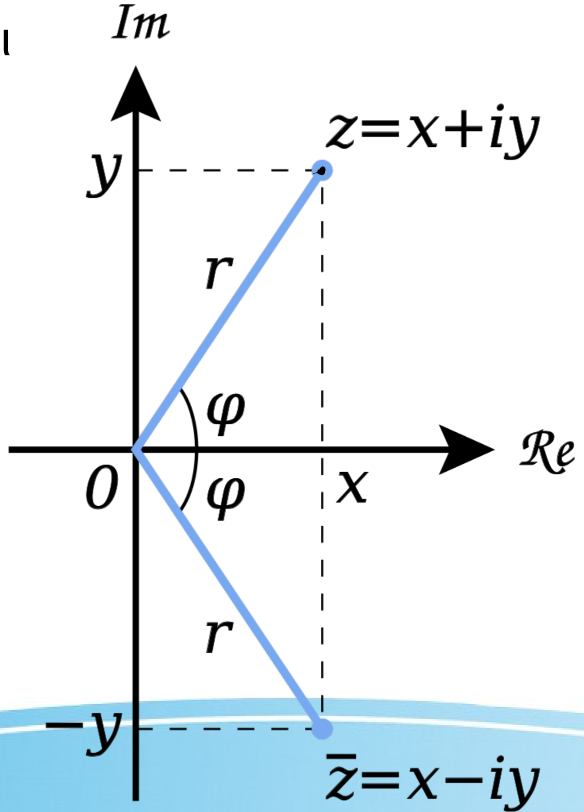
$$\mathbf{r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z|, \quad x = Re\, z = r\cos\varphi} \text{ και } \mathbf{y = Im\, z = r\sin\varphi}$$

Δηλαδή, ο μιγαδικός αριθμός z γράφεται

$$\mathbf{z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

ή **z = |z|(cosφ + isinφ)**. Η μορφή αυτή λέγεται **πολική ή τριγωνομετρική μορφή** του μιγαδικού αριθμού z.
Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{\bar{z} = x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).}$$



Εξίσωση και ταυτότητα του Euler

(ή αλλιώς:Ο ορισμός του e^{ix})

Εξίσωση του Euler

Ο Euler (1707 – 1783) συνδύασε αποτελέσματα της μαθηματικής ανάλυσης που ήταν γνωστά στην εποχή του για να φτάσει σε μία σημαντική ταυτότητα, που πλέον είναι γνωστή ως **εξίσωση του Euler (Euler's formula).** Τότε, ήταν γνωστό ότι:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Εξίσωση του Euler

Θέτοντας όπου x το ix στην τελευταία, προκύπτει ότι:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + i\,(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i\sin x,\ x \in R}$$

Εξίσωση του Euler

Εναλλακτική απόδειξη 1

Euler starts with writing down De Moivre's Formula (can be proven by simple induction using some basic trig identities).

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

He says that n is very large ($n \to \infty$) and x is very small ($x \to 0$). The product of both will be a finite number called $\omega = nx$. Then he applies this as substitution for De Moivres Formula:

$$\cos(\omega) + i\sin(\omega) = \left(\cos(\frac{\omega}{n}) + i\sin(\frac{\omega}{n})\right)^n$$

Euler now applies the limit $n \to \infty$:

$$\cos(\omega) + i\sin(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos(\frac{\omega}{n}) + i\sin(\frac{\omega}{n})\right)^n$$

using small angle aproximations $\cos(x) \approx 1$ and $\sin(x) \approx x$:

$$\cos(\omega) + i\sin(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\omega}{n}\right)^n = e^{i\omega}.$$

In the last line he applied the limit representation $e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n$.

https://hsm.stackexchange.com/questions/4907/eulers-first-proof-of-eix-cosxi-sinx

Εξίσωση του Euler

Εναλλακτική απόδειξη 2

Για την απόδειξη της ταυτότητας, δεχθήκαμε “ελαφρά την καρδία” ότι το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης σε σειρά ορίζεται καλώς στον μιγαδικό αριθμό ix, κάτι που δεν είναι προφανές και απαιτεί μία σειρά παραδοχών. Μία περισσότερο στοιχειώδης απόδειξη θα μπορούσε να γίνει ξεκινώντας από τη σχέση

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

από όπου, μόνο με χρήση της έννοιας του ορίου, ορίζεται ο

$$e^{ix} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$$

και δείχνοντας ότι το όριο αυτό συγκλίνει στο σημείο του μιγαδικού επιπέδου με μέτρο 1 και συντεταγμένες (cos x, sin x), προκύπτει η ζητούμενη ταυτότητα.

Περισσότερες λεπτομέρειες εδώ: https://math.stackexchange.com/questions/3510/how-to-prove-eulers-formula-ei-varphi-cos-varphi-i-sin-varphi

Ταυτότητα του Euler

Θέτοντας στην εξίσωση του Euler, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, ως τιμή του x τον αριθμό π = 3,14..., προκύπτει ότι

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i0 = -1$$

ή

$$\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0.}$$

Η παραπάνω εξίσωση, γνωστή ως **ταυτότητα του Euler (Euler's identity),** συνδέει τους 5 πιο σημαντικούς αριθμούς στα μαθηματικά: το **0**, το **1**, το **e**, το **π** και το **i**.

Δραστηριότητα

Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί $e^{i\pi/3}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{i(2\pi + \pi/3)}$, $e^{-i\pi/4}$, $e^{2k\pi i}$, $e^{-2k\pi i}$.

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i.$$

$$e^{i(2\pi+\frac{\pi}{3})} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$$

$$= 1 + i\cdot 0 = 1$$

$$e^{2k\pi i} = 1.$$

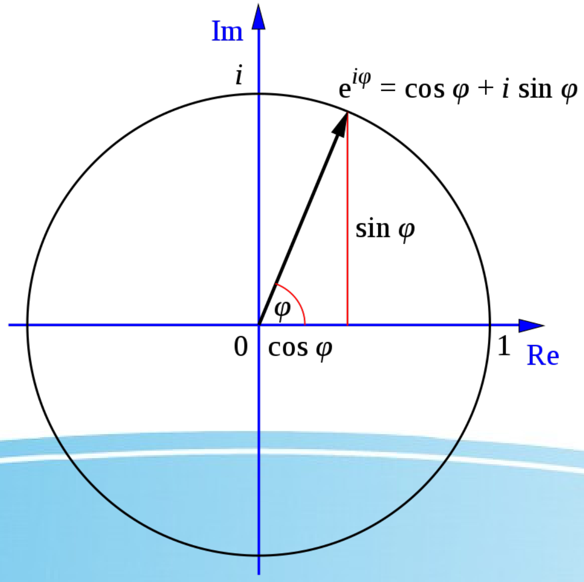
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Αξιοποιώντας την εξίσωση του Euler, μπορούμε να ξαναγράψουμε την πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$, και του συζυγούς του ως:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \text{ και } \bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}.$$

Ιδιαίτερα, προκύπτει ότι κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $e^{i\varphi}$, βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου

$$|e^{i\varphi}| = 1, \text{ για κάθε } \varphi \in R$$



$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Δραστηριότητα

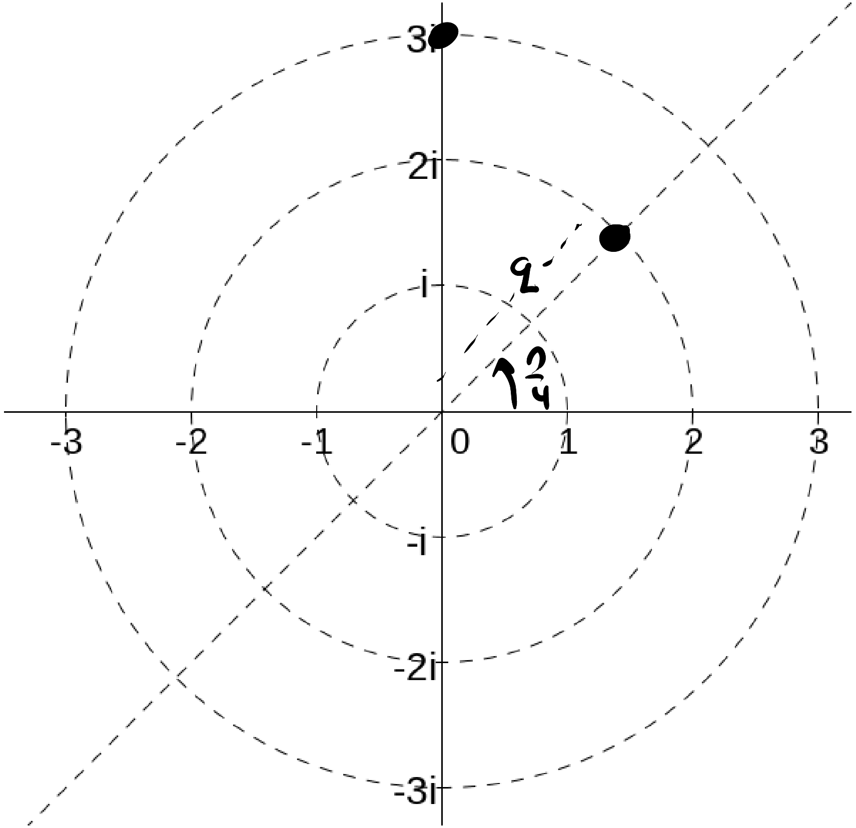
Εντοπίστε στο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = 2e^{i\pi/4}$, $z_2 = 3e^{i\pi/2}$

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\downarrow$

$|z| = 2$

$\arg z = \frac{\pi}{4}$

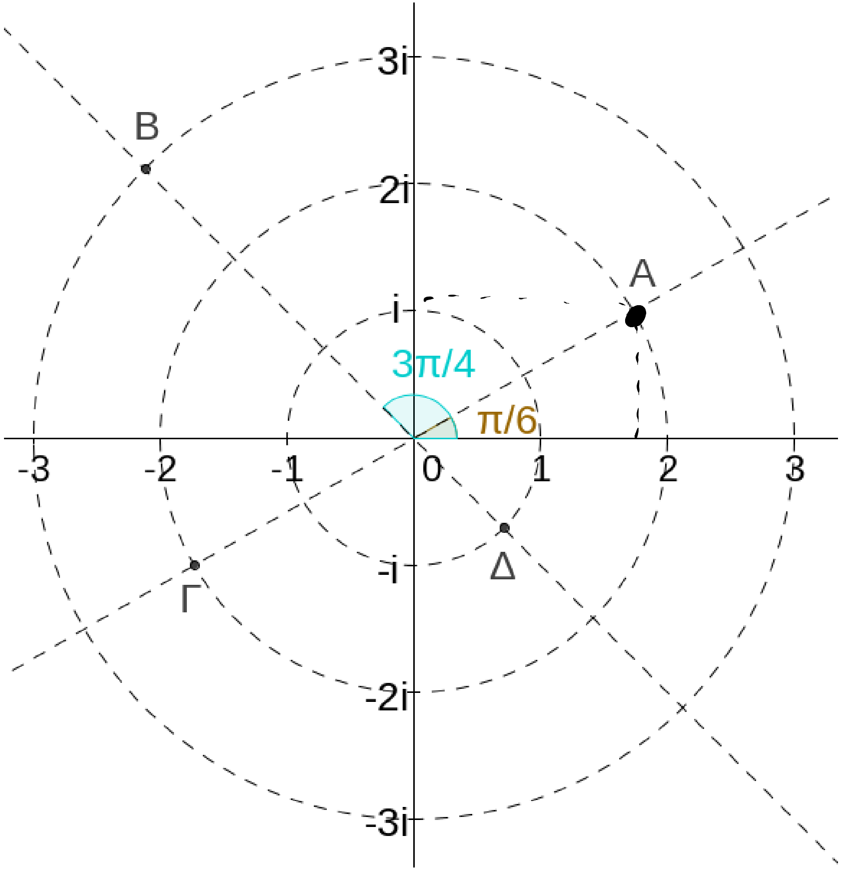


$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Δραστηριότητα

Βρείτε την καρτεσιανή μορφή των μιγαδικών αριθμών Α, Β, Γ, Δ.



$$A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} + i.$$

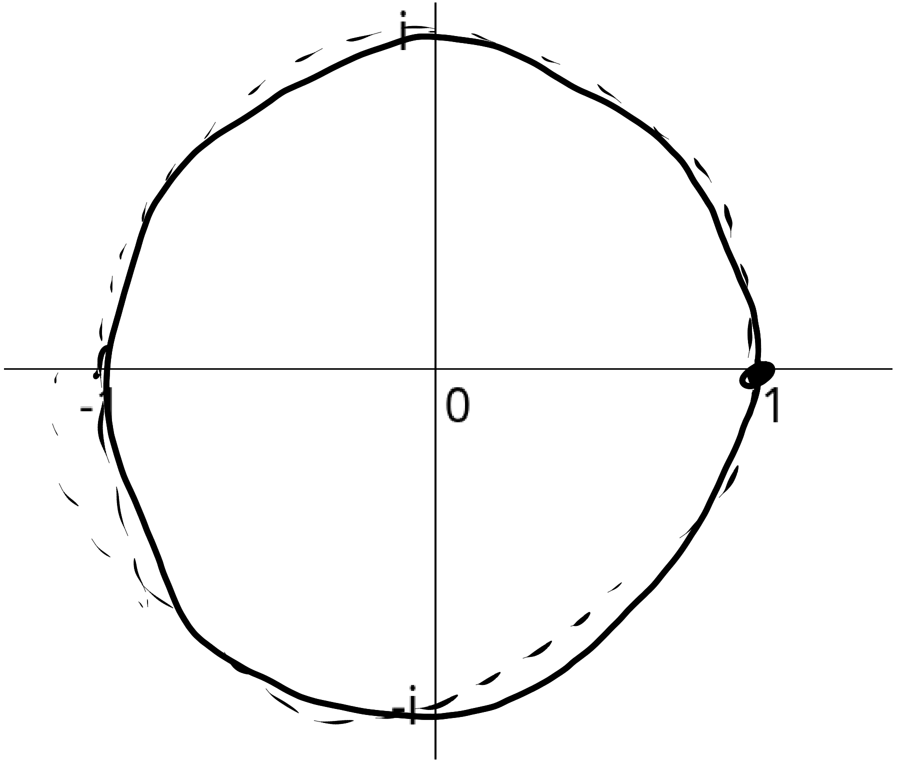
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Δραστηριότητα

Σχεδιάστε τους μιγαδικούς αριθμούς $e^{2\pi x i}$, $0 \leq x < 1$.

$$z = e^{2\pi x i}, \quad 0 \leq x < 1.$$

$$|e^{2\pi x i}| = \sqrt{\cos^2(2\pi x) + \sin^2(2\pi x)} = 1$$



$|e^{2\pi i x}| = 1$

$|\lambda \vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

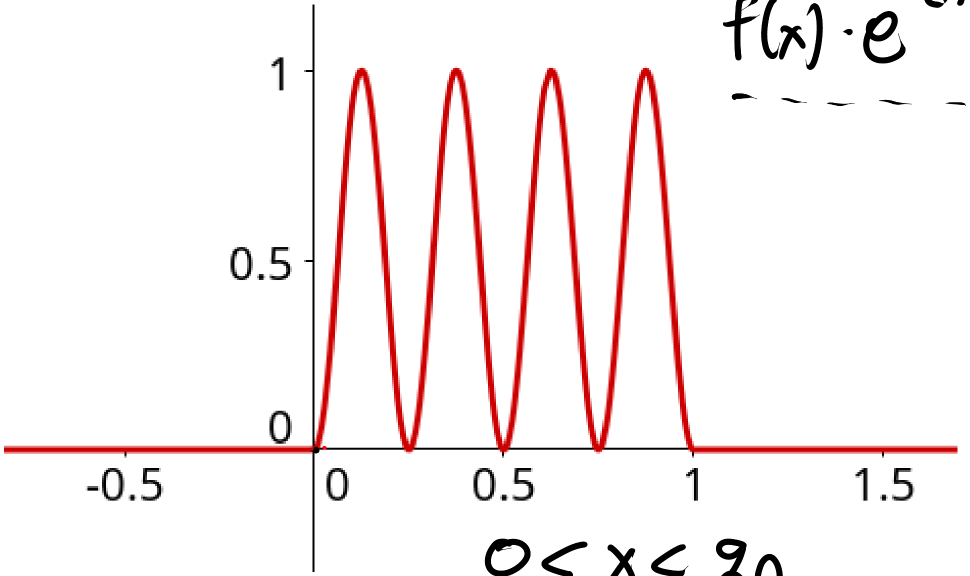
$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Δραστηριότητα

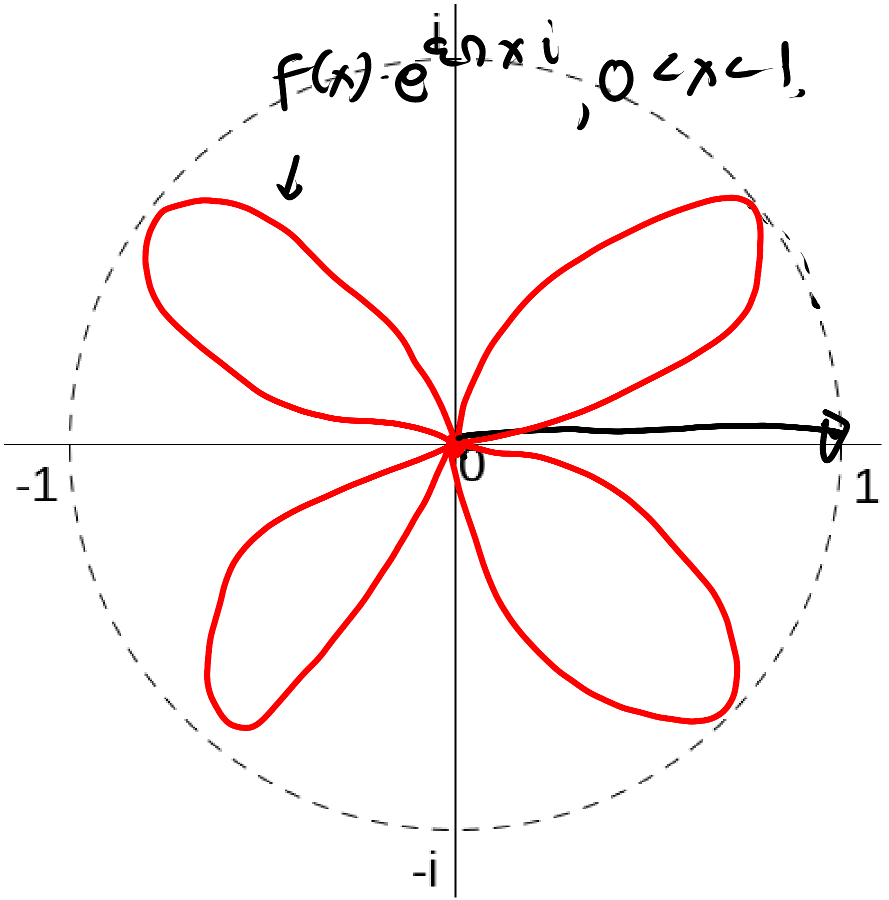
Αν $\quad f(x) = \dfrac{1 - \cos(8\pi x)}{2}$, $0 < x < 1$, και 0 αλλού,

σχεδιάστε τους μιγαδικούς αριθμούς $f(x)e^{2\pi xi}$, $0 < x < 1$.

$f(x) \cdot e^{2\pi x i}$, $0 < x < 1$



$0 < x < 2\pi$



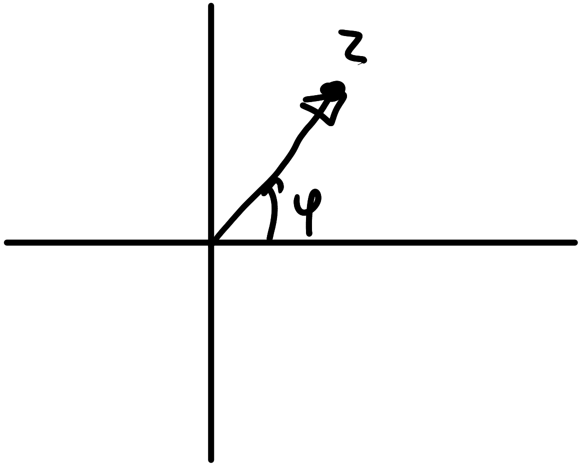
$i^2 = -1$ $\quad z = a + \widetilde{\beta \cdot i}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{C}$

μιγαδικούς

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\quad z = a + \beta i = r e^{i\varphi}$, $r = \sqrt{a^2 + \beta^2}$

e^x

2^x



$\varphi = \arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$

$\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$.

$e^{-ix} = 1/e^{ix}$ και $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x + y)}$

Ξεκινώντας από την $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, παίρνουμε

$e^{-ix} = e^{i(-x)} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x = 1 / (\cos x + i\sin x) = 1/e^{ix}$.

Ανάλογα, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
e^{ix}e^{iy} &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) \\
&= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x \sin y + \sin x\cos y) \\
&= \cos(x+y) + i\sin(x + y) \\
&= e^{i(x+y)}.
\end{aligned}
$$

$(e^{ix})^n = e^{inx}$

Το Θεώρημα De Moivre

Μία σημαντική τριγωνομετρική ταυτότητα είναι **ο τύπος του De Moivre**. Για κάθε φ є R και για κάθε n є N, είναι:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad \varphi \in R, n \in N.$$

Απόδειξη

Η απόδειξη του τύπου γίνεται με επαγωγή και χρήση γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Βήμα 1ο: Για n = 1 ισχύει προφανώς.

Βήμα 2ο: Έστω ότι ισχύει για n = k, δηλαδή έστω ότι $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$.

Βήμα 3ο: Για n = k + 1, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos k\varphi \cos \varphi - \sin k\varphi \sin \varphi) + i (\cos k\varphi \sin \varphi + \sin k\varphi \cos \varphi) \\ &= \cos(k+1)\varphi + i \sin (k+1)\varphi.\end{aligned}$$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ \varphi \in R,\ n \in N.$

Παρατηρήσεις

1. Καθώς, $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ και $\cos n\varphi + i\sin n\varphi = e^{in\varphi}$, το θεώρημα De Moivre ισοδυναμεί με την ιδιότητα **$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi},\ n \in N$**.

2. Ο τύπος του De Moivre επεκτείνεται σχετικά εύκολα για αρνητικούς ακεραίους:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = 1/(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$
$$= 1\,/\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad \text{(πολλαπλασιασμός με } \cos n\varphi - i\sin n\varphi\text{)}$$
$$= \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$
$$= \cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi.$$

Ωστόσο, δεν μπορεί να επεκταθεί για εκθέτες $n \in Q - Z$, καθώς τότε το πρώτο μέλος δεν προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο και η ισότητα των δύο μελών είναι λανθασμένη.

Πράξεις στην τριγωνομετρική μορφή

Οι ιδιότητες $e^{-ix} = 1/e^{ix}$, $e^{ix} e^{iy} = e^{i(x+y)}$, $(e^{iφ})^n = e^{inφ}$, n є N, μας επιτρέπουν να γράψουμε για κάθε $z = r_1e^{iφ}$ και $w = r_2e^{iθ}$, τις εξής σχέσεις:

- $z \cdot w = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(φ + θ)}$
- $z / w = r_1 / r_2 \, e^{i(φ – θ)}$
- $z^n = r_1^n \, e^{inφ}$, n є N

Παρατήρηση
Από τις παραπάνω ιδιότητες γίνεται αντιληπτό πως οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης γίνονται πιο εύκολα όταν οι μιγαδικοί αριθμοί που εμπλέκονται είναι στην τριγωνομετρική τους μορφή.

$$e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$$

Δραστηριότητα

Να δειχθεί ότι $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$, αν και μόνο αν $\theta = \varphi + 2\kappa\pi$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$.

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Longleftrightarrow \theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Longleftrightarrow \cos\theta + i\sin\theta = \cos\varphi + i\sin\varphi \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\cos\theta = \cos\varphi \\ \sin\theta = \sin\varphi\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \varphi$$

$$\left\{\begin{array}{l}\theta = 2k\pi + \varphi \\ \theta = 2k\pi + \pi - \varphi.\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \theta = 2k\pi + \varphi.$$

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Έστω $z = x + iy$. Αν $z = re^{i\varphi}$, τότε

$$r = (x^2 + y^2)^{½} = |z|, \quad x = r\cos\varphi \text{ και } y = r\sin\varphi$$

Διαιρώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \tan\varphi$$

Άρα, $\mathbf{z = x + iy = re^{i\varphi}}$, με $\mathbf{r = (x^2 + y^2)}^{½}$ και φ τέτοια ώστε $\mathbf{\tan\varphi = \frac{y}{x}}$

Σημείωση
Μπορούμε να γράφουμε και $\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$ προσέχοντας ωστόσο πως η $\tan^{-1}$ δεν θεωρείται ως συνάρτηση που παίρνει τιμές στο $(-\pi/2, \pi/2)$, αλλά ως αντίστροφη απεικόνιση της tan.

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Παρατηρήσεις

1. Όρισμα μιγαδικού αριθμού από καρτεσιανές συντεταγμένες

Η εξίσωση $\varphi = \tan^{-1}(y / x)$ ή ισοδύναμα $\tan \varphi = y/x$, έχει άπειρες λύσεις της μορφής $\theta + \kappa\pi$, $\kappa \in Z$. Από αυτές, αποδεκτά ορίσματα είναι όσα είναι συμβατά με τη θέση του z στο μιγαδικό επίπεδο. Από το σύνολο των αποδεκτών ορισμάτων, στη συνέχεια θα καταγράφουμε ως λύση μόνο το πρωτεύον όρισμα του z, δηλαδή αυτό που βρίσκεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

2. Ισότητα μιγαδικών – updated

Αν $z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z = |z|e^{i\arg z}$ και $w = \mathrm{Re}\, w + i\, \mathrm{Im}\, w = |w|e^{i \arg w}$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{z = w} \text{ αν και μόνο αν } \mathbf{Re\, z = Re\, w} \text{ και } \mathbf{Im\, z = Im\, w}$$

Στα πλαίσια της τριγωνομετρικής μορφής των μιγαδικών *αποδεικνύεται* αντίστοιχα ότι:

$$\mathbf{z = w} \text{ αν και μόνο αν } \mathbf{|z| = |w|} \text{ και } \mathbf{\arg z = \arg w + 2\kappa\pi}, \text{ για κάποιο } \kappa \in Z$$

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Ισχυρισμός

$z = w$ αν και μόνο αν $|z| = |w|$ και $\arg z = \arg w + 2\kappa\pi$, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη

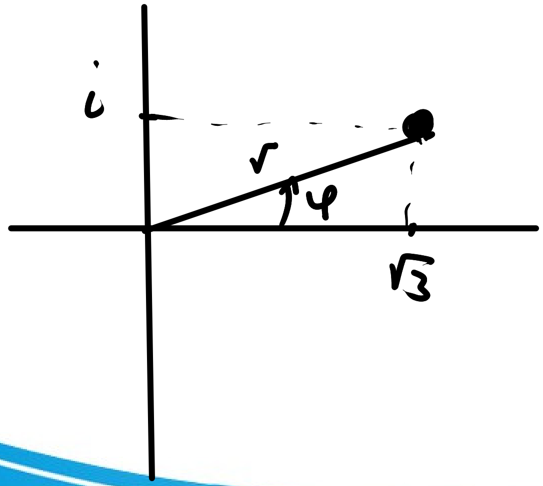
Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Άσκηση

Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \sqrt{3} + i,\quad z_2 = 1 - i \;\text{ και }\; z_3 = -1 + \sqrt{3}i,$$

Λύση



$$r = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{3} = r\cos\varphi \\ \beta &= 1 = r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ και για } \kappa = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Άρα, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Άσκηση

Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \sqrt{3} + i,\ \ z_2 = 1 - i \ \text{ και } z_3 = -1 + \sqrt{3}i,$$

Λύση

Για τον z_1, υπολογίζουμε $|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ και $\tan\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι $\varphi_1 = \pi/6 + \kappa\pi$, $\kappa \in Z$.

Όμως Re $z_1 > 0$ και Im $z_1 > 0$, άρα θα πρέπει να είναι $\varphi_1 = \pi/6 + 2k\pi$. Άρα,

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Άσκηση

Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \sqrt{3} + i,\ \ z_2 = 1 - i \ \text{ και } z_3 = -1 + \sqrt{3}i,$$

Λύση

Για τον z_2, υπολογίζουμε $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ και $\tan\varphi_2 = -1$ ή $\varphi_2 = -\dfrac{\pi}{4} + \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$

Όμως Re $z_2 > 0$ και Im $z_2 < 0$, άρα θα πρέπει να είναι $\varphi_2 = -\pi/4 + 2k\pi$. Συνεπώς,

$$z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Άσκηση

Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί

$$z_1 = \sqrt{3} + i,\ \ z_2 = 1 - i \ \text{ και } z_3 = -1 + \sqrt{3}i,$$

Λύση

Για τον z_3, υπολογίζουμε $|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ και $\tan\varphi_3 = -\sqrt{3}$ ή $\varphi_3 = -\dfrac{\pi}{3} + \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

Όμως Re $z_3 < 0$ και Im $z_3 > 0$, άρα θα πρέπει να είναι $\varphi_3 = 2\pi/3 + 2k\pi$. Συνεπώς,

$$z_3 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}.$$

Από την καρτεσιανή στην τριγωνομετρική μορφή

Ασκήσεις

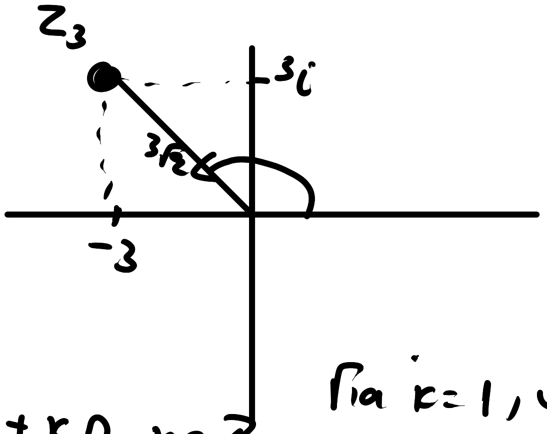
1. Να γραφούν στην τριγωνομετρική τους μορφή οι αριθμοί

$z_1 = 3 + 3i$,

$z_2 = 3 – 3i$,

$z_3 = -3 + 3i$,

$z_4 = 5i$,



$r = |z_3| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{3}{-3} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Για $k = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

$z_3 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. Να γραφούν στην καρτεσιανή τους μορφή οι αριθμοί

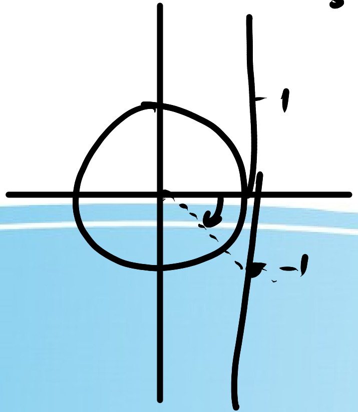
$z_1 = 5e^{i\pi/2}$,

$z_2 = 3e^{i\pi/4}$,

$z_3 = -2e^{i3\pi/4}$,

$z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$



Πράξεις στην τριγωνομετρική μορφή

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι για κάθε $z = re^{i\theta} \in C$, είναι

    $-z = re^{i(\theta + \pi)}$

    $-z^* = re^{i(\pi - \theta)}$ (z*: ο συζυγής του z)

2. Αν $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 - i$ και $z_3 = -1 + \sqrt{3}i$, να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1^4, $\dfrac{z_1^3}{z_2^4 z_3^2}$.

1.) $z = re^{i\theta} \Rightarrow -z = -re^{i\theta} = re^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$.

$$-\bar{z} = -\overline{(r\cos\theta + i\sin\theta)} = -(r\cos\theta - i\sin\theta) = -(r\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$= -re^{-i\theta} = e^{i\pi} re^{-i\theta} = re^{i(\pi-\theta)}.$$

Πράξεις στην τριγωνομετρική μορφή

Ασκήσεις

3. Αν $z = 1 + i$, να υπολογιστούν:

α) Η εκθετική μορφή του z.

β) Η εκθετική μορφή του z^7.

γ) Η καρτεσιανή μορφή του z^7.

4. Να δειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z, ισχύει:

α) $z^n + (z^*)^n = 2|z|^n \cos(n \cdot \arg(z))$

β) $z^n - (z^*)^n = 2|z|^n \sin(n \cdot \arg(z))$ (z^*: ο συζυγής του z).

Οι αριθμοί e^z, $z \in C$ και $\ln z$, $z \in C^*$

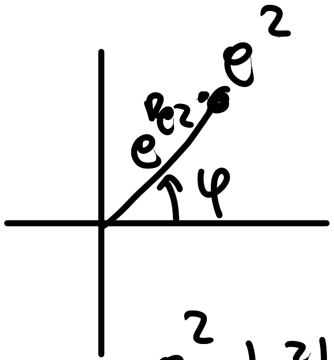
Ο αριθμός e^z, $z \in C$

Ορισμός

Για κάθε $z \in C$, ο αριθμός e^z, προσδιορίζεται ως εξής:

- Αν $z = x \in R$, τότε $e^z = e^x$.
- Αν $z = iy$, με $y \in R$, τότε $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (εξίσωση του Euler)
- Αν $z = x + iy$, $x, y \in R$, τότε *ορίζουμε*

$$\mathbf{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y}$$



$e^z = |e^z| e^{i\varphi}$

Από τον τελευταίο ορισμό συμπεραίνουμε ότι για κάθε $z \in C$, είναι

$$\mathbf{Re(e^z) = e^x \cos y, \qquad Im(e^z) = e^x \sin y, \qquad |e^z| = e^{Re z}, \qquad \arg e^z = Im\, z}$$

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x = e^{Re z}$$

$$\arg e^z = \arg e^x e^{iy} = \quad Im z + 2k\pi \qquad e^x(\cos y + i \sin y)$$

Ο αριθμός e^z, $z \in C$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε z, w є C, ισχύουν οι εξής σχέσεις:

- $e^z \neq 0$, $\arg e^z = \operatorname{Im} z + 2\kappa\pi$.
- $e^{z+w} = e^z e^w$.
- $e^{z-w} = e^z / e^w$.
- $e^{-z} = 1 / e^z$.
- $e^{2\kappa\pi i} = 1$, κ є Z.
- $e^z = 1$, αν και μόνο αν $z = 2\kappa\pi i$, κ є Z.
- $e^z = e^w$, αν και μόνο αν $z = w + 2\kappa\pi i$, κ є Z.
- $e^z = e^{z+2\kappa\pi i}$, κ є Z.

$z = x + iy$

$e^z = 1 \Rightarrow |e^z| = 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re} z} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0.$

$e^{iy} = 1 \Rightarrow y = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ και $z = 2\kappa\pi i$

$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z - w = 2\kappa\pi i \Leftrightarrow z = w + 2\kappa\pi i.$

Παράρτημα

Ορισμός συνόλου μιγαδικών αριθμών

Σχόλιο
Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών C βασίζεται στον ορισμό της φανταστικής μονάδας i. Καθώς, ο ορισμός της ως λύση της εξίσωσης $x^2 = -1$, αφήνει ελεύθερη την επιλογή της ρίζας που θα “βαφτιστεί” φανταστική μονάδα, δημιουργείται κάποια ανησυχία σχετικά με την αξιοπιστία της κατασκευής των μιγαδικών αριθμών. Ένας περισσότερο τυπικός ορισμός των μιγαδικών αριθμών που δεν αφήνει περιθώρια για παρανοήσεις σχετικά με την επιλογή της ρίζας της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$ στην οποία αντιστοιχεί η φανταστική μονάδα i, είναι ο εξής:

Ορισμός μιγαδικών αριθμών (εναλλακτικός)
Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζεται να είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών (α, β) για τα οποία ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$.
- $\lambda(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$, για κάθε $\lambda \in R$.
- $(\alpha, \beta)\cdot(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta, \beta\gamma + \alpha\delta)$.

$i^2 = -1$

$x^2 = -1$

Με την παραπάνω θεώρηση, αν συμβολίσουμε (1, 0) = 1 και (0, 1) = i, τότε

$$(\alpha, \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha\cdot 1 + \beta i = \alpha + \beta i,$$

ενώ επιπλέον:

$$i \cdot i = (0, 1)\cdot(0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1.$$

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας (ή Θεώρημα D' Alembert)
Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές έχει, συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων, ακριβώς n ρίζες.

Απόδειξη
Έστω P(z) ένα πολυώνυμο με deg P(z) > 0. Θα δείξουμε ότι έχει μία ρίζα. Πράγματι, αν δεν είχε, τότε θα ήταν $P(z) \neq 0$. Τότε, η συνάρτηση $f(z) = 1/P(z)$ θα ήταν αναλυτική και φραγμένη, άρα από το θεώρημα του Liouville θα έπρεπε να είναι σταθερή.

Δηλαδή, $P(z) = C$, άτοπο γιατί deg $P(z) > 0$. Άρα, υπάρχει μία ρίζα z_0, του P(z) και το P(z) γράφεται $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, με deg Q(z) = deg P(z) – 1.

Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται στο πολυώνυμο Q και εντοπίζεται ακόμα μία ρίζα. Επαγωγικά, προκύπτει το ζητούμενο συμπέρασμα.