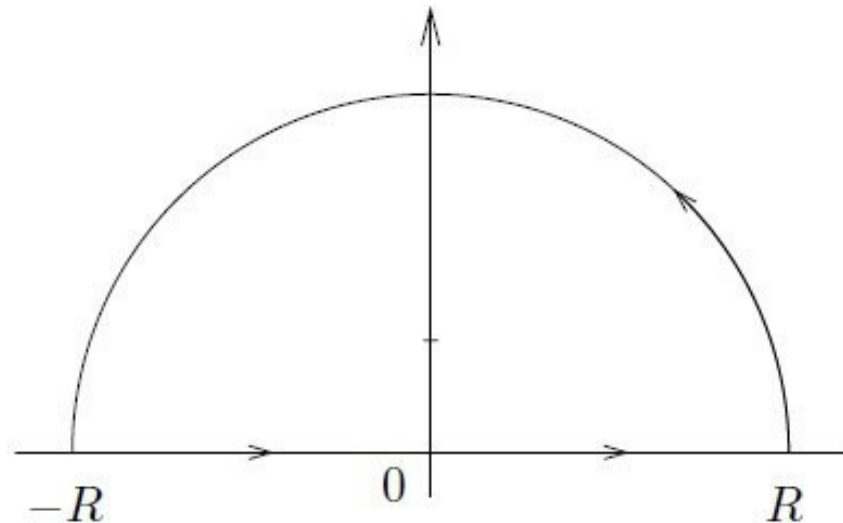


Μιγαδικές Συναρτήσεις

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)

Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

Ειδικές Περιπτώσεις

$$m = 1: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$m = 2: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

$$m = 3: \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} [(z - z_0)^3 f(z)]$$

Εφαρμογές στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων



1^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

Διαδικασία

Ιδέα: Θα αναγνωρίσουμε το ολοκλήρωμα ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Επιλέγουμε ως μονοπάτι το μοναδιαίο κύκλο: $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Για $z = e^{i\theta}$, είναι

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Αντικαθιστώντας, όπου $\cos \theta$, $\sin \theta$, όπως παραπάνω, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_{\gamma} g(z) dz$$

όπου g είναι μία μιγαδική συνάρτηση και $d\theta = dz/(iz)$. Μετά, αρκεί:

1. Να εντοπίσουμε τους πόλους στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.
2. Να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε αυτούς.
3. Να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

1^η Κατηγορία

Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Λύση

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{2i\theta} + 1}{2e^{i\theta}}} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} d\theta = \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} ie^{i\theta} d\theta = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$$

Η μιγαδική συνάρτηση που ολοκληρώνεται έχει πόλους 1ης τάξης στα σημεία $z = -2 \pm 3^{0.5}$.

Από αυτούς, μόνο ο $-2 + 3^{0.5}$ ανήκει στο μοναδιαίο δίσκο. Άρα,

$$\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \underline{\underline{z = e^{i\theta}}} \quad \underline{\underline{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

1^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστούν τα $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 + 3\cos x} dx$, $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{5 + 3\cos x} dx$.

Λύση

Υπόδειξη: Θεωρήστε το $\int_0^{2\pi} \frac{e^{ix}}{5 + 3\cos x} dx$.

1^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5 + 3\cos x)} dx$.

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5 + 3\cos x)} dx &= \int_{|z|=1} \frac{1}{z[5 + 3(z + 1/z)/2]} \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(3z^2 + 10z + 3)} dz \\ &= \frac{2}{3i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(z + 1/3)(z + 3)} dz = \frac{2}{3i} \left[\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \int_{|z|=1} \frac{27}{8(3z + 1)} dz + \int_{|z|=1} \frac{1}{8(z + 3)} dz \right] \\ &= \frac{2}{3i} \left[2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}, 0\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{27}{8(3z + 1)}, -\frac{1}{3}\right) + 0 \right] \\ &= \frac{2}{3i} \left(2\pi i + 2\pi i \frac{9}{8} \right) = \frac{2}{3i} \frac{17}{8} 2\pi i = 17 \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ είναι γενικευμένα και ως εκ τούτου υπάρχουν όταν υπάρχει το διπλό όριο

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

ή ισοδύναμα, όταν για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$, υπάρχουν τα ολοκληρώματα, $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$, $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$.

Με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

το οποίο ονομάζεται **κύρια τιμή του ολοκληρώματος κατά Cauchy** και ταυτίζεται με την κανονική τιμή μόνο όταν και εκείνη συγκλίνει (ως ένα διπλό όριο).

Σημείωση

Η παρατήρηση αυτή δεν αφορά ολοκληρώματα με πεδίο ορισμού απεριορίστο μόνο από τη μία πλευρά.

2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Παρατήρηση

Η κύρια τιμή κατά Cauchy ενός γενικευμένου ολοκληρώματος μπορεί να υπάρχει ακόμα και όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν ορίζεται καλώς όπως π.χ. αν $f(x) = x$:

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = 0,$$

ενώ, για οποιοδήποτε $\gamma \in \mathbb{R}$

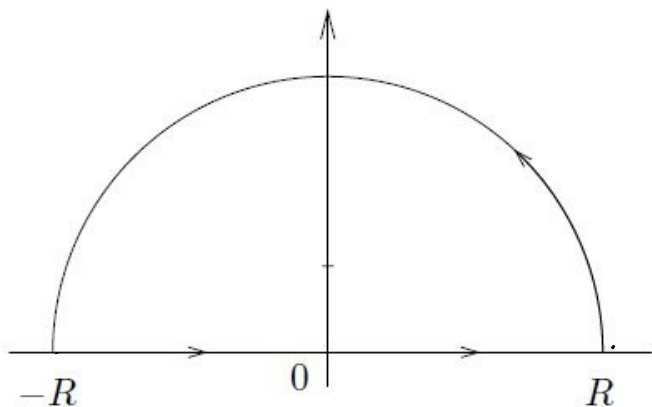
$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^{\gamma} x dx + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\gamma}^{\beta} x dx = \infty - \infty = \text{απροσδιόριστο}$$

Στη συνέχεια, όποτε ζητείται ο υπολογισμός ενός γενικευμένου ολοκληρώματος, αυτό θα υποτίθεται ότι υπάρχει, άρα η κύρια τιμή κατά Cauchy θα μας δίνει την τιμή του.

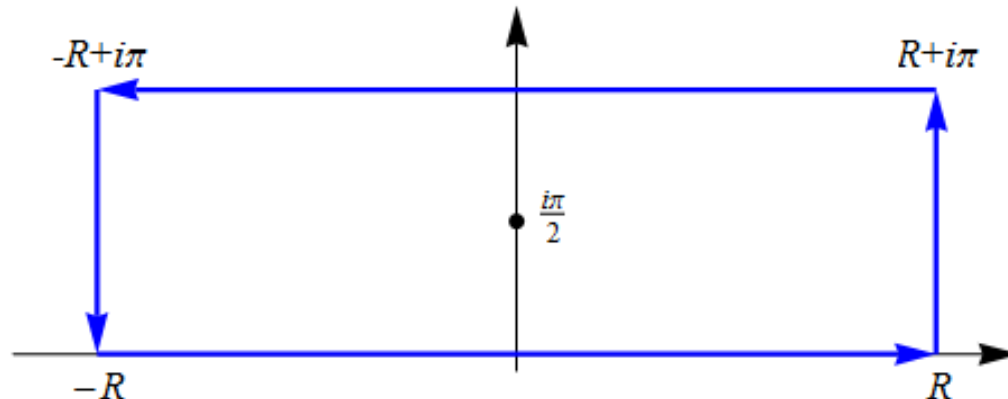
2^η Κατηγορία: Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Διαδικασία

Επιλέγουμε ως μονοπάτι μία διαδρομή που στο όριο της να αποδίδει το $(-\infty, +\infty)$. Ενδεικτικά, αυτή μπορεί να είναι ημικύκλιο με ακτίνα $R \rightarrow \infty$, ή ορθογώνιο με σταθερό πλάτος και μήκος $R \rightarrow \infty$.



Επιλέγεται στην περίπτωση όπου $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$,
καθώς $R \rightarrow \infty$, όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$.



Επιλέγεται στην περίπτωση όπου το ολοκλήρωμα στην πάνω πλευρά του ορθογωνίου μπορεί ναδειχθεί ότι είναι ανάλογο με αυτό της κάτω πλευράς (το οποίο καθώς $R \rightarrow \infty$ δίνει αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε).

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi + 2\kappa\pi i} \Leftrightarrow z = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2\kappa\pi}{4})i}, \kappa = 0, 1, 2, 3.$$

2^η Κατηγορία

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

$$\text{Poles: } z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Θ.Ο.Υ ↓

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}})]$$

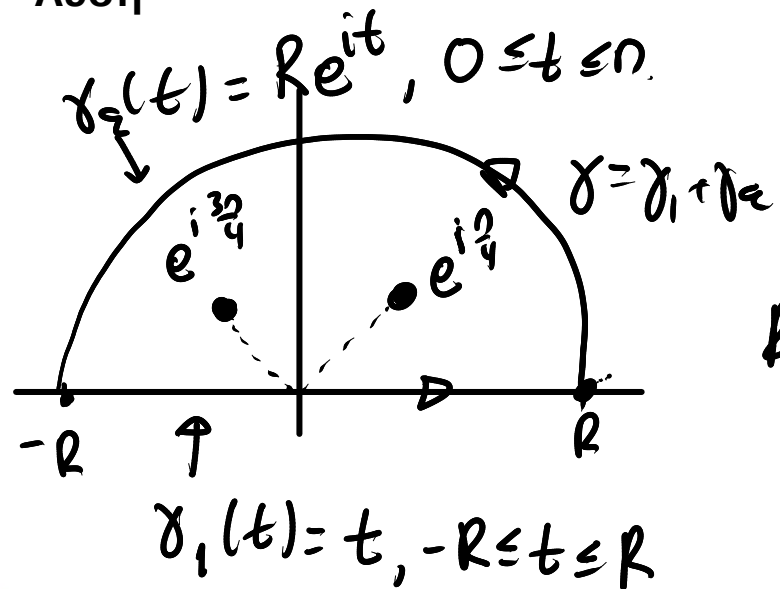
$$\begin{aligned} \text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{\pi}{4}}) \cdot \frac{z^2}{1+z^4} = (e^{i\frac{\pi}{4}})^2 \frac{1}{4(e^{i\frac{\pi}{4}})^3} \\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} (z - e^{i\frac{3\pi}{4}}) \frac{z^2}{1+z^4} = (e^{i\frac{3\pi}{4}})^2 \frac{1}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3} =$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Λύση



$$|e^{it}| = |\cos t + i \sin t| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \quad = \frac{1}{4} e^{-i \frac{3\pi}{4}} \quad |a-b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

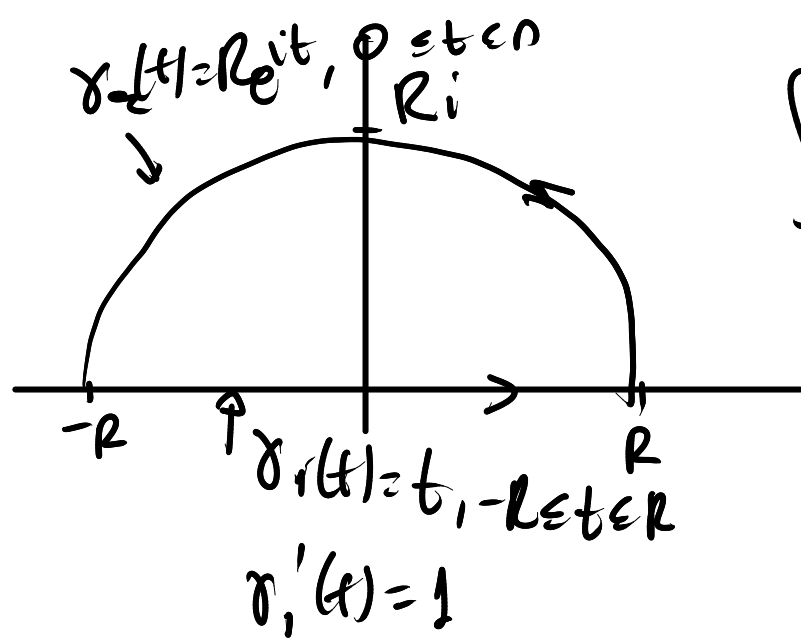
$$2\pi i [\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(f, e^{3i\frac{\pi}{4}})] = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} [e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}] =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4} [\cancel{\cos(-\frac{\pi}{4})} + i \sin(-\frac{\pi}{4}) + \cancel{\cos(-\frac{3\pi}{4})} + i \sin(-\frac{3\pi}{4})]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4} \cdot (-i\sqrt{2}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_0^n \frac{(Re^{it})^2}{1+(Re^{it})^4} \cdot iRe^{it} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

$$\left| \int_0^n \frac{R^2 e^{2it}}{1+(Re^{it})^4} \cdot iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R^3}{|1+R^4 e^{4it}|} dt \leq \int_0^n \frac{R^3}{R^4-1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$



$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz$$

$$= \int_{-R}^R \frac{t^2}{1+t^4} \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad \left| \quad \int_R \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_0^{\pi} \frac{(Re^{it})^2}{1+(Re^{it})^4} \cdot i Re^{it} dt. \right.$$

$$\gamma_2'(t) = (Re^{it})' = R \cdot e^{it} \cdot (it)' = i Re^{it}.$$

$$\gamma(t), t \in [a, b]$$

2^η Κατηγορία

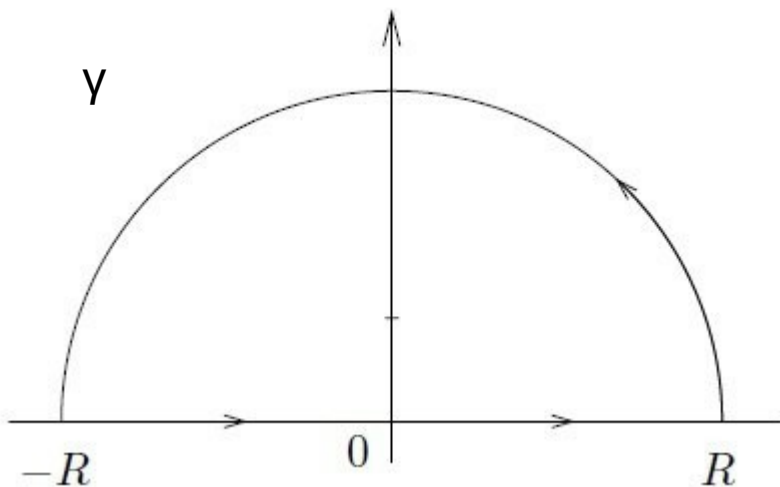
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Λύση

Θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ η οποία έχει 4 απλούς πόλους στα σημεία

$z_k = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, έναν σε κάθε τεταρτημόριο. Για $R > 0$, έστω γ το μονοπάτι του σχήματος.



Για R αρκετά μεγάλο, το γ περιέχει στο εσωτερικό του τους πόλους $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{i3\pi/4}$. Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα είναι:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{4} e^{-\frac{\pi i}{4}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} \right] = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

2^η Κατηγορία

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

Λύση

Είναι $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, όπου $\gamma_1(t) = t$, $-R \leq t \leq R$, και $\gamma_2(t) = R e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. Άρα,

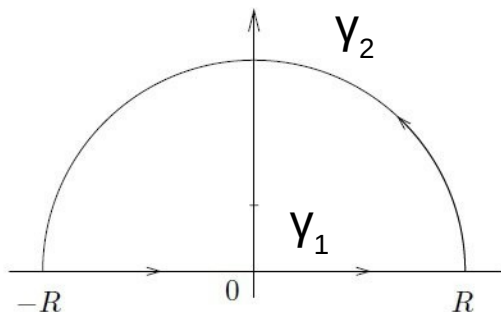
$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_0^{\pi} \frac{iR^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt = I_1(R) + I_2(R).$$

Καθώς το $R \rightarrow \infty$, το I_1 συγκλίνει στο ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε ενώ το I_2 συγκλίνει κατά μέτρο στο 0.

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{iR^3 e^{3it}}{1+R^4 e^{4it}} dt \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{|1+R^4 e^{4it}|} dt \leq \int_0^{\pi} \frac{R^3}{R^4 - 1} dt = \pi \frac{R^3}{R^4 - 1} \rightarrow 0.$$

Συμπεραίνουμε, ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

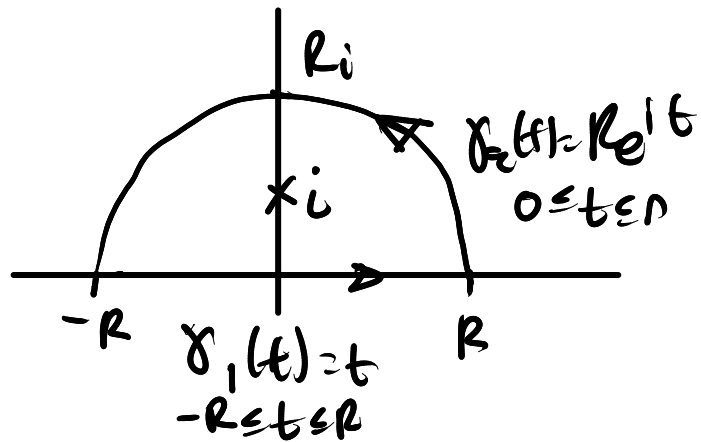


$$i^3 = i \cdot i^2 = -i$$

Άσκηση 1

Δείξτε ότι
Λύση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$



2^η Κατηγορία

$$1+z^2=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\pm i.$$

νόμος
 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i)^2 \cdot f(z) \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[-2 \cdot \frac{1}{(z+i)^3} \right] \\ &= -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{1}{4i^3} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

$$||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(1+z)^2} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + \int_0^n \frac{1}{(1+(Re^{it})^2)^2} \cdot iRe^{it} dt \quad (I)$$

$$\left| \int_0^n \frac{iRe^{it}}{(1+(Re^{it})^2)^2} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R}{|1+Re^{2it}|^2} dt \leq \int_0^n \frac{R}{(R^2-1)^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

$$(I) \text{ as } R \rightarrow \infty : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Δείξτε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Λύση

2^η Κατηγορία

Σημείωση

Με την ίδια μεθοδολογία αντιμετωπίζονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, όπου f είναι μία άρτια συνάρτηση. Πράγματι στην περίπτωση αυτή $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Επιπλέον, η ίδια μεθοδολογία είναι εφαρμόσιμη σε κάθε ολοκλήρωμα της μορφής,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad P, Q, \text{ πολυώνυμα, με } \deg P(x) \leq \deg Q(x) - 2, \quad Q(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

degree

2^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} dx$, $a > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} dx. \text{ Ορίζω } f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^4} \text{ : άρτια}$$

3^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{τριγωνομετρική}}{\text{πολυώνυμο}} dx$

Διαδικασία

Οι μιγαδικές συναρτήσεις $\sin z$ και $\cos z$ δεν είναι φραγμένες στο $\mathbb{C}$, άρα δεν είναι καλή επιλογή για αντικατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\text{πολυώνυμο}}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε “ημικυκλικό” μονοπάτι όπως αυτό της 2^{ης} κατηγορίας. Μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, αρκεί να πάρουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος του αποτελέσματος για να βρούμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.



$$\int_{-R}^R \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + \int_0^R \frac{|e^{iRt}|}{|(e^{it})^2 + 1|} |e^{it}| dt$$

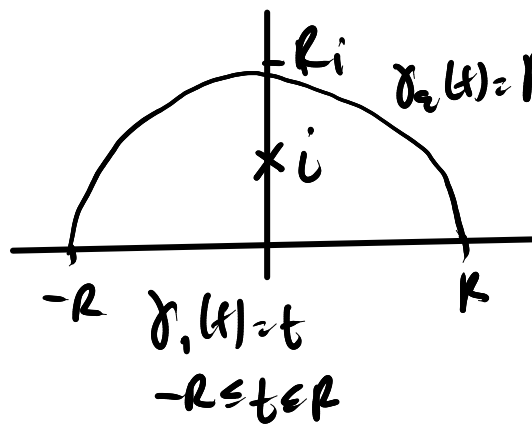
$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 1}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad z = iy \Rightarrow \frac{e^{-y} + e^y}{2}$$

3^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$.



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = \frac{\cos z}{z^2 + 1} + i \frac{\sin z}{z^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \\ &= \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2i \cdot e} \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{it}}}{(Re^{it})^2 + 1} \cdot i \cdot Re^{it} dt$$

$$\left| \int_0^n \frac{e^{iRe^{it}}}{(e^{it})^2 + 1} \cdot i \cdot Re^{it} dt \right| \leq \int_0^n \frac{R}{|Re^{2it} + 1|} dt \leq \int_0^n \frac{R}{R^2 - 1} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{O.O.V.: } \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i \cdot e} = \frac{\pi}{e} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e} \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx = 0. \end{cases}$$

3^η Κατηγορία

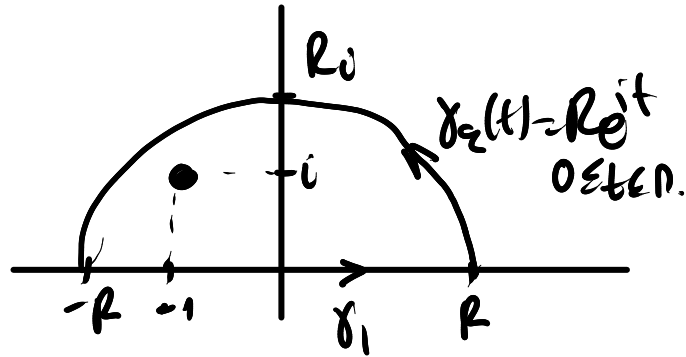
Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 9} dx$.

3^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2 + 2x + 2} dx$.



$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\text{Res}(f, -1+i) = \lim_{z \rightarrow -1+i} (z+1-i) \cdot f(z) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+i} \frac{e^{2iz}}{z+1+i} = \frac{e^{2i(-1+i)}}{2i} =$$

$$\frac{e^{2(-1-i)}}{2i}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_0^n \frac{e^{2iRe^{it}}}{Re^{2it} + 2Re^{it} + 2} iRe^{it} dt$$

$$\text{As } R \rightarrow \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1+i) = 2\pi i \frac{e^{2i(-1+i)}}{2i} = \pi e^{2i(-1+i)} =$$

$$= \pi \cdot e^{-2} \cdot e^{-2i} = \frac{\pi}{e^2} \cdot (\cos(-2) + i \sin(-2)) =$$

$$= \frac{\pi}{e^2} (\cos 2 - i \sin 2).$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) \cdot i R e^{it} dt$$

$$\gamma(t) = \underline{R} e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma(t) : t \in [a, b] : \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b \underline{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt$$

3^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+ix)^2(1-ix)} dx$, $t > 0$.

3^η Κατηγορία: Λήμμα του Jordan

Το λήμμα του Jordan είναι ένα αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης που βοηθάει στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} g(x) dx}_{\text{---}} \quad \left| \quad \int_0^\pi \underbrace{e^{ia \cdot Re^{it}}}_{\text{---}} \cdot \underbrace{g(Re^{it}) \cdot iRe^{it}}_{|g(Re^{it})| \cdot R dt} dt \right.$$

Λήμμα του Jordan

Έστω $f(z) = e^{iaz} g(z)$, συνεχής στο μονοπάτι $C_R = \{Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Τότε

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_R} e^{iaz} g(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{\alpha} M_R, \quad \text{όπου } M_R = \max_{z \in C_R} |g(z)|.$$

Σημείωση

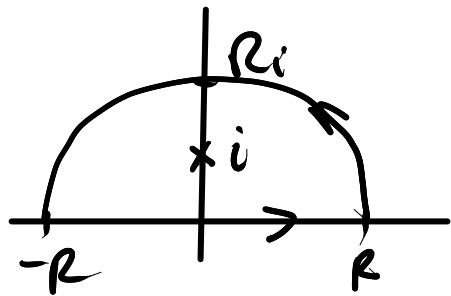
Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan%27s_lemma

3^η Κατηγορία

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το λήμμα του Jordan.



$$f(z) = \frac{z \cdot e^{iz}}{z^2 + 1}$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z \cdot e^{iz}}{z + i} = \frac{i \cdot e^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x \cdot e^{ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{\gamma_2} e^{iz} \cdot \frac{z}{z^2 + 1} dz \quad \text{και} \quad \left| \int_{\gamma_2} e^{iz} \frac{z}{z^2 + 1} dz \right| \leq \pi \cdot \max_{z \in \gamma_2} \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right|$$

$$\max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z}{z^2+1} \right| = \max_{t \in [0, n]} \left| \frac{Re^{it}}{R^2 e^{2it} + 1} \right| \leq \max_{t \in [0, n]} \frac{R}{R^2 - 1} = \frac{R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} e^{iz} \frac{z}{z^2+1} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) = \frac{n i}{e}$$

via $R \rightarrow \infty$: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx = \frac{n i}{e}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{n i}{e}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx = \frac{n}{e}$$

$$e^z - e^{-z} = e^{in} e^{-z} = e^{-z+in}$$

3^η Κατηγορία

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx$.

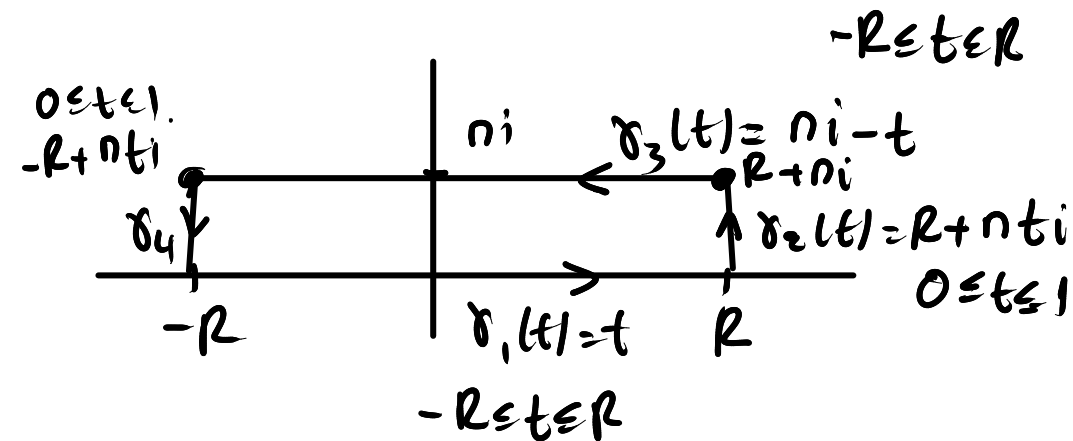
Υπόδειξη: Θεωρήστε ορθογώνιο μονοπάτι.

Λύση

$$e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{in} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z = in + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow z = i\frac{n}{2} + k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$



$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{i(ni-t)}}{e^{ni-t} + e^{-ni+t}} \gamma_3'(t) dt = - \int_{-R}^R \frac{e^{-n} e^{-it}}{-e^{-t} - e^t} dt = e^{-n} \int_{-R}^R \frac{e^{-it}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$= e^{-n} \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{e^t + e^{-t}} dt$$

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^1 \frac{e^{i(R+nti)}}{e^{R+nti} + e^{-R-nti}} \cdot i R e^{it} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{R}{|e^{R+nti} + e^{-R-nti}|} dt$$

$$\text{Dpoia } \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad \leq \int_0^1 \frac{R}{e^R + e^{-R}} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\frac{\pi}{2}), \quad \operatorname{Res}(f, i\frac{\pi}{2}) = \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} (z - i\frac{\pi}{2}) =$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} = \pi \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= e^{i \cdot i\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^z - e^{-z}} = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}}{2i} \end{aligned}$$

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_{\gamma_R} f(z) dz + e^{-n} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx + \int_{\gamma_n} f(z) dz = n e^{-\frac{n}{2}}$$

$$R \rightarrow \infty: (1 + e^{-n}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = n e^{-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{n \cdot e^{-\frac{n}{2}}}{1 + e^{-n}}$$

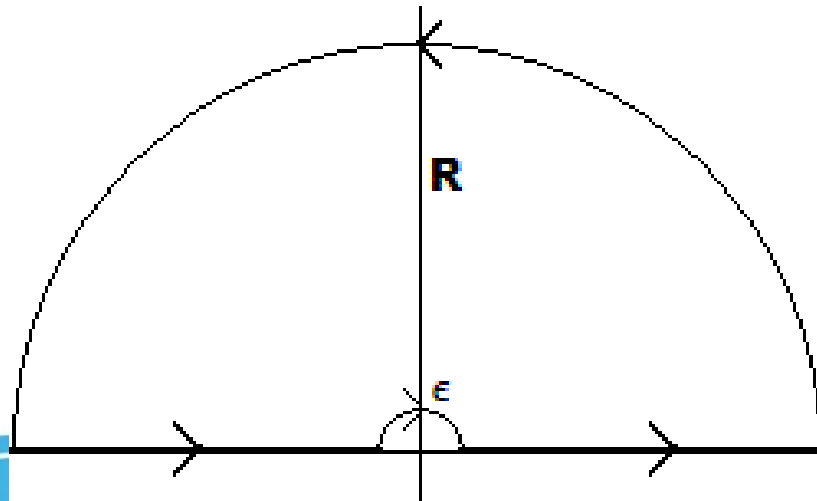
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{n \cdot e^{-\frac{n}{2}}}{1 + e^{-n}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}} dx = 0$$

4^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{τριγωνομετρική}}{\text{πολυώνυμο}} dx$, με πόλο πάνω στην πραγματική ευθεία.

Διαδικασία

Στην περίπτωση αυτή πρέπει το μονοπάτι που θα χρησιμοποιήσουμε να αποφεύγει την ανωμαλία της συνάρτησης. Ο απλούστερος τρόπος για να συμβεί αυτό είναι να γίνει μία ημικυκλική παράκαμψη γύρω από το προβληματικό σημείο. Στο ημικύκλιο που παρακάμπτει την ανωμαλία θα γίνει ξεχωριστός υπολογισμός και θα υπολογιστεί η τιμή της με καταφυγή στο όριο καθώς $\epsilon \rightarrow 0$.

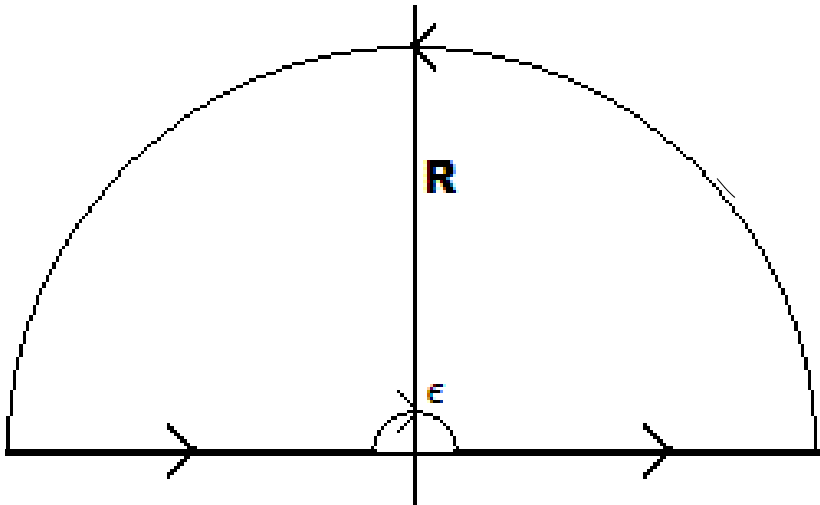


4^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Λύση



4^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - \alpha^2} dx$.

Λύση

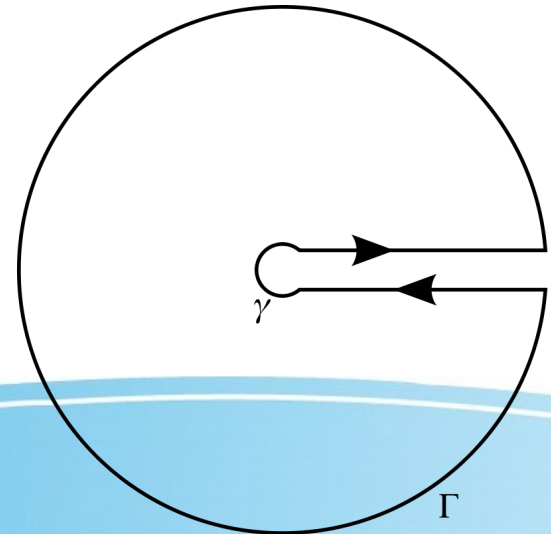
5^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα που περιέχουν λογάριθμο ή ορίζονται με τη βοήθεια λογαρίθμου όπως οι ρίζες.

Διαδικασία

Επιλέγουμε μία τομή διακλάδωσης έτσι ώστε να ορίζεται καλώς η συνάρτηση εκεί. Επίσης, η τομή πρέπει να επιλεγθεί έτσι ώστε, στο όριο, να προκύπτει το ολοκλήρωμα που μας απασχολεί. Ιδιαίτερα, δεν είναι υποχρεωτικό να είναι η $(-\infty, 0]$, μπορεί να είναι η $[0, +\infty)$.

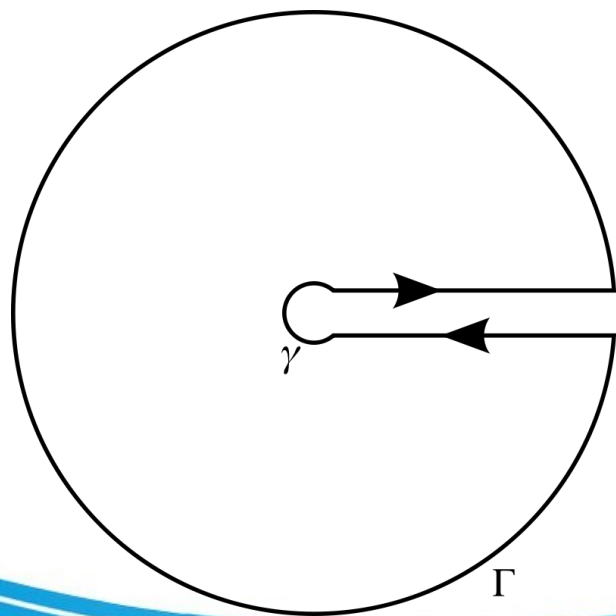
Συνήθως, σε αυτές τις περιπτώσεις το μονοπάτι ολοκλήρωσης, έχει τη μορφή κλειδαριάς, όπως στο σχήμα.



5^η Κατηγορία

Άσκηση 1

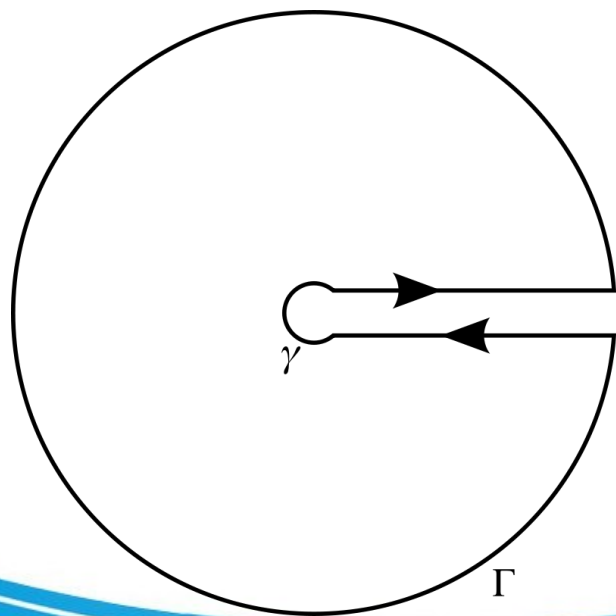
Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 6x + 8} dx$



5^η Κατηγορία

Άσκηση 2

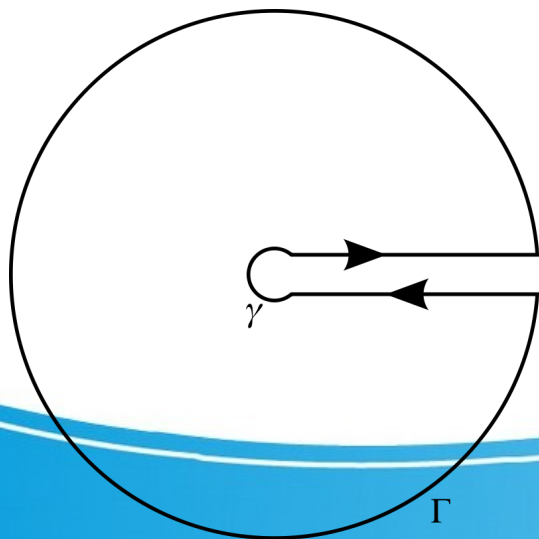
Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} dx$.



5^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/4}(x+1)} dx$.



5^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x \ln(1+x)}{x^2+1} dx$.

