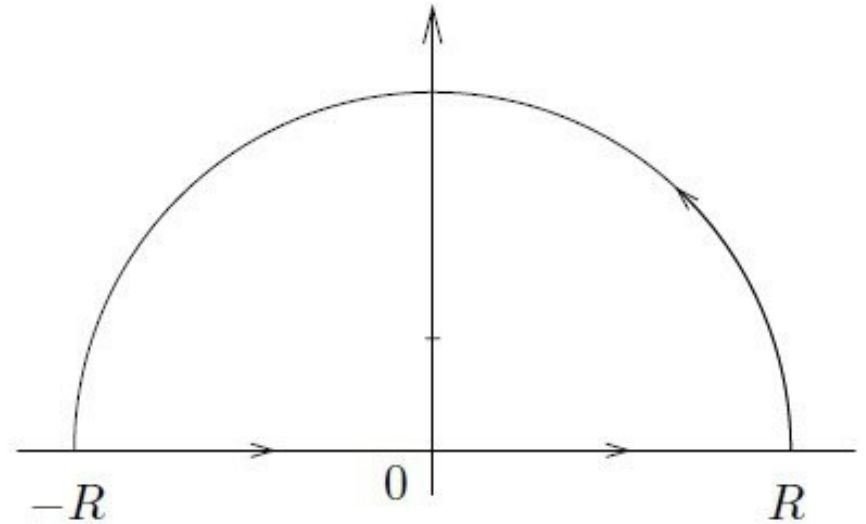


Μιγαδικές Συναρτήσεις

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$



Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr

Αναγνώριση των ανωμαλιών

Υπάρχει η δυνατότητα αναγνώρισης μίας μεμονωμένης ανωμαλίας με τον υπολογισμό του ορίου της συνάρτησης στο σημείο αυτό.

Θεώρημα

Έστω f μία συνάρτηση αναλυτική για z τέτοια ώστε $0 < |z - z_0| < r$. Τότε

1. Το z_0 είναι **επουσιώδης (απαλείψιμη) ανωμαλία** για την f , αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.
2. Το z_0 είναι **πόλος** για την f , αν και μόνο αν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Στην περίπτωση αυτή, η τάξη του πόλου είναι το ελάχιστο m για το οποίο $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$ και πεπερασμένο.
3. Το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** για την f , αν και μόνο αν το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα



Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και για $0 < |z - z_0| < r$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{\alpha_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_0) + \alpha_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0 . Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, όπου γ ο κύκλος $|z - z_0| = r$, διαγεγραμμένος κατά τη θετική φορά.

Θέτοντας στον τελευταίο τύπο $n = -1$, παίρνουμε ότι ο συντελεστής που αντιστοιχεί στον όρο $1/(z - z_0)$ είναι ίσος με

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Ο συντελεστής α_{-1} , ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0** και συμβολίζεται

$\text{Res}(f, z_0)$, δηλαδή $\text{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Ετυμολογία

Ο συντελεστής α_{-1} , ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** γιατί είναι κυριολεκτικά, αυτό που απομένει αν ολοκληρωθεί η σειρά Laurent όρο προς όρο γύρω από το σημείο ανωμαλίας z_0 . Πιο συγκεκριμένα, αν το ανάπτυγμα της f γύρω από το z_0 είναι

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

και γ είναι κυκλικό μονοπάτι με κέντρο z_0 και εντός του δακτυλίου, $0 < |z - z_0| < r$, τότε:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \alpha_{-1},$$

καθώς, $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz = 0, n \neq -1.$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Η αναζήτηση ενός ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

ή από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που το ορίζει $\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$

μπορεί να είναι δύσκολη ή/και ασύμφορη. Στις περιπτώσεις των πόλων υπάρχει το εξής θεώρημα που αντικαθιστά τον εντοπισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου με τον υπολογισμό ενός ορίου.

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

Απόδειξη: Από το ανάπτυγμα Taylor της αναλυτικής $(z - z_0)^m f(z)$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θεώρημα

Αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε
$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

Ειδικές Περιπτώσεις

$$m = 1: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

$$m = 2: \text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)]$$

$$m = 3: \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^2}{dz^2} [(z - z_0)^3 f(z)]$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παρατήρηση

Για $m = 1$, είναι $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο όριο είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίζουμε για να αναγνωρίσουμε το σημείο z_0 ως απλό πόλο.

Δηλαδή, στην περίπτωση όπου, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ και $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lambda \neq 0$, τότε μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι το z_0 είναι απλός πόλος και ότι $\text{Res}(f, z_0) = \lambda$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 1

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow z_0 : \text{πόλος}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 2

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = e^{1/z}$, στο $z_0 = 0$.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 3

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, στο $z_0 = 1$.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 4

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ στα σημεία ανωμαλίας.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 5

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{z^{10}}{(z-1)^2(z+2)}$, στα σημεία ανωμαλίας.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση I

Έστω f, g δύο μιγαδικές συναρτήσεις. Τότε $\text{Res}(f + g, z_0) = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$.

Απόδειξη

Πράγματι, αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$,

τότε $f(z) + g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_n + b_n) (z - z_0)^n$.

Συμπεραίνουμε ότι: $\text{Res}(f + g, z_0) = \alpha_{-1} + b_{-1} = \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(g, z_0)$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Τρεις χρήσιμες προτάσεις

Πρόταση II

Έστω f συνάρτηση με πόλο 1ης τάξης στο z_0 και g αναλυτική στο $D(z_0, r)$, για κάποιο $r > 0$.
τότε $\text{Res}(f \cdot g, z_0) = g(z_0) \text{Res}(f, z_0)$.

Απόδειξη

Φανερά, το z_0 είναι πόλος 1ης τάξης και για την fg . Άρα,

$$\begin{aligned}\text{Res}(f \cdot g, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) g(z) \\ &= g(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= g(z_0) \text{Res}(f, z_0).\end{aligned}$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Ορισμός

Ένας αριθμός z_0 ονομάζεται ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση $h(z)$ αν

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{(z - z_0)^m} \neq 0, \infty.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση $h(z) = 1 - \cos(z)$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πριν την 3η πρόταση:

Αποδεικνύεται ότι:

Ένας αριθμός z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για τη συνάρτηση $h(z)$ αν

$$h(z_0) = 0, h'(z_0) = 0, \dots, h^{(m-1)}(z_0) = 0, \text{ αλλά } h^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Άσκηση

Να βρεθεί η πολλαπλότητα του $z_0 = 0$ για τη συνάρτηση $h(x) = z \sin(z)$.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Πρόταση III

Αν $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0) \neq 0$, και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας m για την $h(z)$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης m για την f .

Δηλαδή:

- Αν $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ $\rightarrow z_0$ πόλος 1^{ης} τάξης για την f .
- Αν $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 0$, $h^{(2)}(z_0) \neq 0$ $\rightarrow z_0$ πόλος 2^{ης} τάξης για την f .

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \tan z$, στο $\pi/2$.

Λύση

Είναι $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$. Παρατηρούμε ότι

Αριθμητής: $\sin \pi/2 = 1 \neq 0$.

Παρονομαστής: $\cos \pi/2 = 0$, $(\cos z)'|_{\pi/2} = (-\sin \pi/2) = -1 \neq 0$.

Το $\pi/2$ είναι ρίζα 1^{ης} τάξης για τον παρονομαστή, χωρίς να μηδενίζει τον αριθμητή, άρα είναι πόλος 1^{ης} τάξης για την $\tan z$. Υπολογίζουμε:

$$\text{Res}(f, \pi/2) = \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \tan z = \lim_{z \rightarrow \pi/2} (z - \pi/2) \sin z / \cos z = -1.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 7

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος. Αξιοποιείτε την Πρόταση III.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 8

Να βρεθεί το είδος της ανωμαλίας της $f(z) = \frac{1 - z^5}{1 - \cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος. Αξιοποιείτε την Πρόταση III.

Λύση

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - z^5}{1 - \cos z} \stackrel{\left(\frac{1}{0}\right)}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow z=0: \text{πόλος}.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cdot (1 - z^5)}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 - z^5) \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1 - \cos z} = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sin z} = \infty.$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \cdot f(z) = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 \neq 0, \infty \Rightarrow z=0: \text{πόλος 2ης τάξης}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 \cdot f(z))' = \dots$$

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 9

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$, στο σημείο ανωμαλίας.

Λύση

$z=0$: ανωμαλία. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^3} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{3z^2} = \infty$: Πόλος.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos z}{z^3} = \frac{1}{2!} \frac{1}{z} - \frac{z}{4!} + \frac{z^3}{6!} - \dots \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2}.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \dots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Evaluatricka,

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty \Rightarrow z=0 \text{ n\u00f3 es } 1^{\text{er}} \text{ t\u00e9rmino}$$

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = \frac{1}{2}.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 10

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{z^2}{1 - \cos z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z}{\sin z} = 2 \Rightarrow z=0 \text{ αποτελεί ψευδή ανωμαλία} \\ \Rightarrow \text{Res}(f, 0) = 0.$$

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 11

Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$, στο $z_0 = 0$.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου από το ανάπτυγμα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι δύσκολος.

Λύση

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Άσκηση 12

Να βρεθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της $f(z) = \frac{1+z}{z(2-z)}$, στα σημεία ανωμαλίας.

Σημείωση

Προσέξτε ότι ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων από τα αναπτύγματα Laurent στην περίπτωση αυτή είναι ασύμφορος.

Λύση

$z=0, z=2$: συνεία ανωμαλίας. $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} f(z) = \infty \Rightarrow$ Πόλοι

$$\left. \begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1+z}{2-z} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty \\ \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{-1-z}{z} = -\frac{3}{2} \neq 0, \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0, 2 : \text{πόλοι 1ης τάξης.}$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}, \operatorname{Res}(f, 2) = -\frac{3}{2}.$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων



Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Έστω, ότι η συνάρτηση f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0 και

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

το ανάπτυγμα Laurent της f γύρω από το z_0 . Είδαμε ότι,

$$\alpha_{-1} = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

όπου γ ο κύκλος $|z - z_0| = r$, διαγεγραμμένος κατά τη θετική φορά. Παρατηρούμε, ότι η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0).$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Αναδεικνύεται μία νέα μεθοδολογία που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων και γενικεύει ως προς το σκοπό αυτό το Θεώρημα του Cauchy. Πιο συγκεκριμένα, αν πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} f(z) dz$, και η f δεν είναι αναλυτική στο εσωτερικό του κλειστού μονοπατιού γ αλλά έχει μία ανωμαλία στο z_0 , τότε αρκεί να βρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f στο z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

και να εντοπίσουμε τον όρο α_{-1} . Σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα είναι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \alpha_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Ωστόσο, συμβαίνει πολλές φορές η f στο εσωτερικό της γ να έχει περισσότερες από μία ανωμαλίες. Προς αυτήν την κατεύθυνση αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα που προσαρμόζει την παραπάνω παρατήρηση στην περίπτωση αυτή.

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Θεώρημα

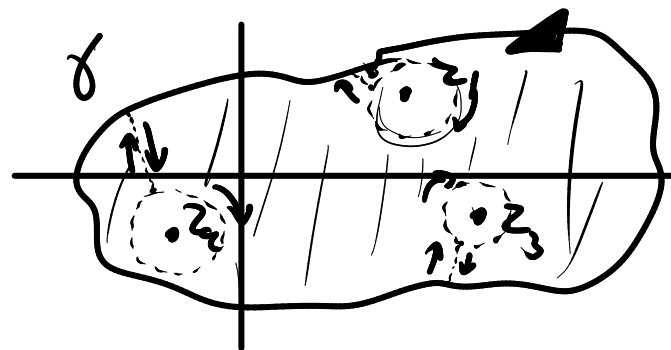
Έστω $U \subset \mathbb{C}$, ένα ανοιχτό σύνολο, $z_1, z_2, \dots, z_n \in U$, και $f : U - \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$, μια αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα κλειστό θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε:

α) Το εσωτερικό του γ περιέχεται στο U .

β) Τα $z_1, \dots, z_n$ περιέχονται στο εσωτερικό του γ .

Τότε:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) + \dots + \operatorname{Res}(f, z_n)]$$



Παρατήρηση

Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ: https://proofwiki.org/wiki/Residue_Theorem

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Σύνοψη

Έστω f αναλυτική στο $0 < |z - z_0| < r$. Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 :

- Είναι ίσο με 0, αν το z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία ($\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lambda \neq \infty$).
- Μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$ αν το z_0 είναι πόλος της f τάξης m .
- Υπολογίζεται από τον ορισμό του, ως ο συντελεστής του όρου $1/(z - z_0)$ στο ανάπτυγμα Laurent της f στον δίσκο $0 < |z - z_0| < r$, αν το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f .
- Ο εντοπισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ολοκληρώματα:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, z_k)$$

όπου $z_1, z_2, \dots, z_n$, είναι οι ανωμαλίες της f που βρίσκονται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ .

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}$ όπου γ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2, θετικά προσανατολισμένος.

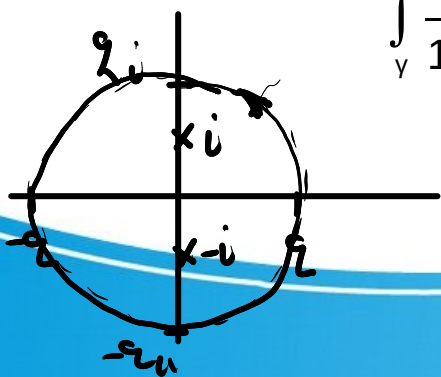
Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Αυτή, έχει πόλους τάξης 1 στα σημεία $-i$, i και αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{1}{2i}, \quad \text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i)f(z) = -\frac{1}{2i}$$

Συμπεραίνουμε, ότι:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \text{Res}(f, i) + 2\pi i \text{Res}(f, -i) = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right) = 0.$$



$$1+z^2=0 \Leftrightarrow z=\pm i$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

$$z = x + iy = r e^{i\varphi}$$

Άσκηση 1

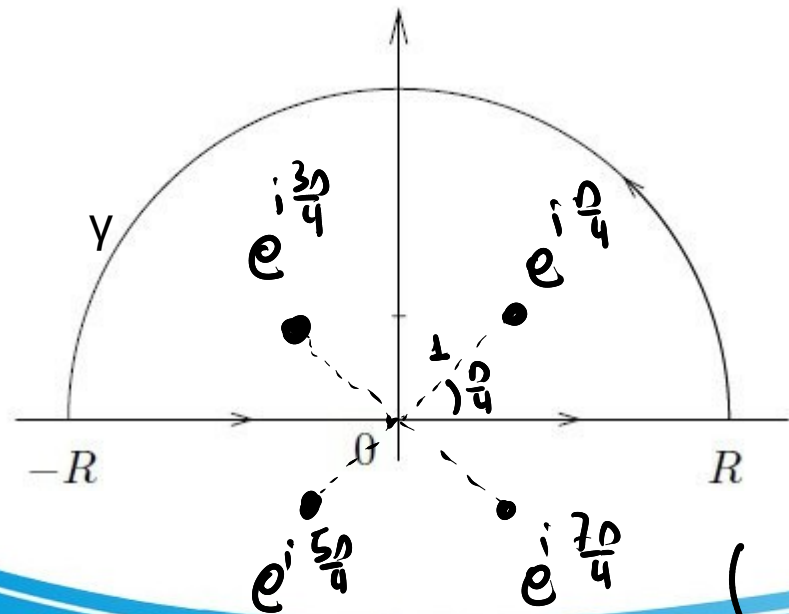
Να υπολογιστεί το $\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz$ όπου γ το μονοπάτι του σχήματος ($R > 1$).

Λύση

$$1 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow z^4 = e^{i\pi + 2k\pi i} \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4})}$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}, \quad k=0,1,2,3.$$



$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) \right]$$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z^2}{1+z^4} = \infty \quad \Bigg| \quad \frac{z^2}{1+z^4} = \frac{z^2}{(z-e^{i\frac{\pi}{4}})(z-e^{i\frac{3\pi}{4}})(z-e^{i\frac{5\pi}{4}})(z-e^{i\frac{7\pi}{4}})}$$

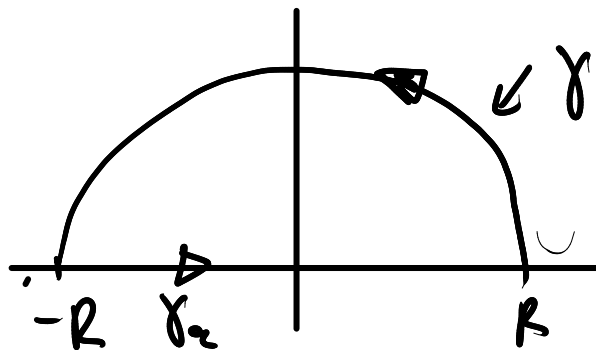
$$\begin{aligned} \text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \underbrace{(z-e^{i\frac{\pi}{4}})}_{\cancel{\phantom{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}}} \cdot \frac{z^2}{\underbrace{1+z^4}_{\cancel{}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{3\pi}{4}}) = e^{i\frac{3\pi}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{3\pi}{4}}}{1+z^4} = e^{i\frac{3\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4(e^{i\frac{3\pi}{4}})^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz &= 2\pi i \left[\frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4}i} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4} \right] \\ &= \frac{\pi i}{2} \cdot (-i\sqrt{2}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z^2}{1+z^4} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z^2}{1+z^4} dz = \int_0^n \frac{(Re^{i\theta})^2}{1+R^4 e^{i4\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta$$

$$+ \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$



$$\gamma_1(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\gamma_2(x) = x, \quad -R \leq x \leq R.$$

Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_{\gamma} \frac{e^z}{\cosh z} dz$, όπου γ ο κύκλος $|z| = 2$, θετικά διαγεγραμμένος.

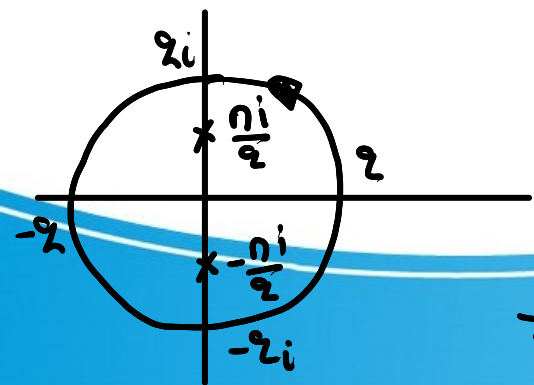
Λύση

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^z = -e^{-z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^z = e^{n\pi i - z} \Leftrightarrow z = n\pi i - z + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow 2z = n\pi i + 2k\pi i \Leftrightarrow z = \left(\frac{n}{2} + k\pi\right)i, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{\cosh z} dz$$



$$\text{Θ.Ο.Υ: } \int_{\gamma} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 2\pi i \left[\text{Res}\left(f, \frac{\pi i}{2}\right) + \text{Res}\left(f, -\frac{\pi i}{2}\right) \right]$$

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \left(z - \frac{\pi i}{2}\right) \cdot \frac{e^z}{\cosh z} = e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi i}{2}} \frac{z - \frac{\pi i}{2}}{\cosh z} =$$

$$= e^{\frac{ni}{2}} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{ni}{2}} \frac{1}{\sinh z} = e^{\frac{ni}{2}} \cdot \frac{1}{i} = i \cdot \frac{1}{i} = 1 = \text{Res}(f, \frac{ni}{2})$$

$$\sinh \frac{ni}{2} = \frac{e^{\frac{ni}{2}} - e^{-\frac{ni}{2}}}{2} = \frac{i - (-i)}{2} = i.$$

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{ni}{2}} (z + \frac{ni}{2}) \frac{e^z}{\cosh z} = e^{-\frac{ni}{2}} \cdot \frac{1}{\sinh(-\frac{ni}{2})} = (-i) \cdot \frac{1}{-i} = 1 = \text{Res}(f, -\frac{ni}{2})$$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{\cosh z} dz = 2\pi i [1 + 1] = 4\pi i.$$

Εφαρμογές στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων



1^η Κατηγορία

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

Διαδικασία

Αναγνωρίζουμε το ολοκλήρωμα ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Επιλέγουμε ως μονοπάτι το μοναδιαίο κύκλο: $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Για $z = e^{i\theta}$, είναι

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Αντικαθιστώντας, όπου $\cos \theta$, $\sin \theta$, όπως παραπάνω, το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε

$$\int_0^{2\pi} f(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_{\gamma} \overbrace{g(z)} dz$$

$$d\theta = \frac{1}{ie^{i\theta}} dz = \frac{1}{iz}$$

όπου g είναι μία μιγαδική συνάρτηση και $d\theta = dz/(iz)$. Μετά, αρκεί:

1. Να εντοπίσουμε τους πόλους στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου.
2. Να υπολογίσουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε αυτούς.
3. Να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

1^η Κατηγορία

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$.

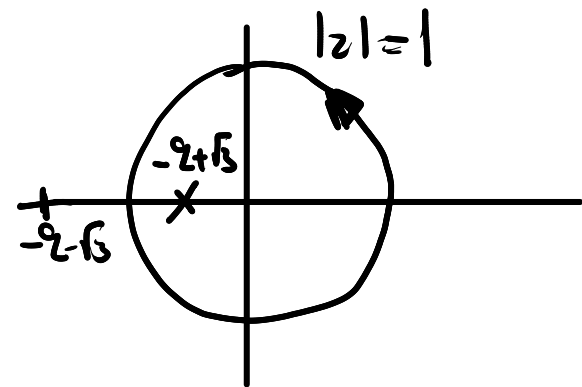
Λύση

$$\text{Αν } z = e^{i\theta} \text{ τότε } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \cdot \frac{1}{i \cdot e^{i\theta}} i \cdot e^{i\theta} d\theta \quad \underline{\underline{z = e^{i\theta}}}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz.$$

$$z^2 + 4z + 1 = 0, \quad \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$



$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 4z + 1}, \underbrace{-2 + \sqrt{3}}_{z_0}\right) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} (z + 2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{z^2 + 4z + 1} = \frac{2\pi i}{(-2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})} \\ &= 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Tedira:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

z_0 : nodus $1/z$ zai h

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

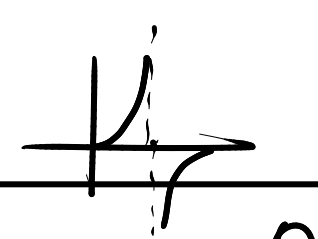
Εvaluation:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz = \int_{|z|=1} \left\{ \frac{1}{z - (-2 - \sqrt{3})} \right\} dz \stackrel{\text{T.C.}}{=} 2\pi i \frac{1}{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})}$$

$\swarrow f(z)$

$$= \frac{2\pi i}{2\sqrt{3}}$$

$0 \leq \theta < 2\pi \Rightarrow 0 \leq \frac{\theta}{2} < \pi$



$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$dt = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{d\theta}{2} = \frac{1}{2(1 + t^2)} d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{1}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot 2 \cdot (1 + t^2) dt = \dots \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos \theta} d\theta \stackrel{\theta = w - \pi}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2 + \cos w} dw \right.$$

1^η Κατηγορία

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin\theta} d\theta$.

Λύση

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad \underline{\underline{z = e^{i\theta}}} \quad \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3\sin\theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 3 \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)} \frac{1}{iz} dz =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{2}{-3z^2 + 10iz + 3} dz$$

$$-3z^2 + 10iz + 3 = 0 \quad \Delta = (10i)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 3 = -100 + 36 = -64.$$

$$z_{1,2} = \frac{-10i \pm 8i}{-6} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{i}{3} \\ z_2 = 3i \end{cases}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{-3z^2 + 10iz + 3} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{2}{-3z^2 + 10iz + 3}, \frac{i}{3}\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{i}{3}} \left(z - \frac{i}{3} \right) \cdot \frac{2}{-3(z - \frac{i}{3})(z - 3i)} = 2\pi i \cdot \frac{2}{-3(\frac{i}{3} - 3i)} = \frac{4\pi}{-3(-\frac{8}{3})} = \frac{\pi}{2}.$$

1^η Κατηγορία

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$.

Λύση

1^η Κατηγορία

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5 + 3\cos x)} dx$.

Λύση