

Μιγαδικές Συναρτήσεις

Διδάσκων: Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος (Ε.ΔΙ.Π.)
Επικοινωνία: epdiaman@ee.duth.gr



Ολόμορφη συνάρτηση



Ολόμορφη συνάρτηση

Ορισμός

Μια μιγαδική συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται **ολόμορφη (ή αναλυτική)** στο $z_0 \in A$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη για όλα τα σημεία που ανήκουν στον ανοικτό $D(z_0, \varepsilon)$.

Η f ονομάζεται ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο U αν είναι ολόμορφη σε κάθε σημείο του U .

Η f ονομάζεται ολόμορφη στο κλειστό σύνολο U αν είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό υπεрсύνολο του U .

Σημείωση: Μία συνάρτηση μπορεί να είναι παραγωγίσιμη μόνο σε ένα σημείο και πουθενά αναλυτική. Ένα παράδειγμα είναι η $f(z) = |z|^2$.

Εξισώσεις Cauchy – Riemann



Εξισώσεις Cauchy – Riemann

Θεώρημα

Αν μια μιγαδική συνάρτηση $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι ολόμορφη στο U , τότε το u και το v έχουν πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τα x και y , και

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (\text{ή } u_x = v_y, u_y = -v_x)$$

Αντίστροφα, αν οι συναρτήσεις $u(x, y)$, $v(x, y)$ είναι παραγωγίσιμες στο U ως πραγματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών, έχουν συνεχείς παραγώγους και ισχύει ότι $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, τότε η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη και

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -i(u_y(x, y) + iv_y(x, y)).$$

Άσκηση

$$f = u + iv \quad \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$$

Βρείτε ποια από τις παρακάτω μιγαδικές συναρτήσεις είναι αναλυτική:

$$f(x + iy) = (-2x^2 - 10xy + 6x + 2y^2 + 15y) + i(5x^2 - 4xy - 15x - 5y^2 + 6y)$$

$$g(x + iy) = (x - 2y) + i(-2x - y).$$

$$\bullet f = u + iv, \text{ δηλ } u(x, y) = -2x^2 - 10xy + 6x + 2y^2 + 15y$$

$$v(x, y) = 5x^2 - 4xy - 15x - 5y^2 + 6y.$$

$$\left. \begin{matrix} u_x = -4x - 10y + 6, & u_y = -10x + 4y + 15 \\ v_x = 10x - 4y - 15, & v_y = -4x - 10y + 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix} \right\} \text{ ισχύουν οι C.R.}$$

Ισχύουν οι C.R. και οι v_x, v_y, u_x, u_y είναι συνεχείς $\Rightarrow f = u + iv$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

$$\bullet g = u + iv, \quad u(x, y) = x - 2y$$

$$v(x, y) = -2x - y$$

$$u_x = 1, u_y = -2, v_x = -2, v_y = -1.$$

Συνέχεια παραγώγων 2^{ης} τάξης

Οι ολόμορφες συναρτήσεις έχουν πολύ καλές ιδιότητες.

Ειδικότερα, αν $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, αποδεικνύεται πως

Οι u, v , είναι παραγωγίσιμες άπειρες φορές (δηλαδή $u, v \in C^\infty$).

Ειδικότερα, οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης είναι συνεχείς και ισχύει

$$u_{xy} = u_{yx}, v_{xy} = v_{yx}.$$

Αρμονικές συναρτήσεις



Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Μια συνάρτηση $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται αρμονική αν είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (\text{ή } f_{xx} + f_{yy} = 0).$$

για κάθε $z \in U$. Η συνθήκη της αρμονικότητας γράφεται και $\Delta f = 0$ ή $\nabla^2 f = 0$, όπου Δ είναι ο τελεστής του Laplace, ∇ είναι το διάνυσμα της κλίσεως της f :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

και $\nabla \cdot \nabla$ υποδηλώνει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων.

Σημειώσεις

Κάθε αρμονική συνάρτηση είναι λύση της δ.ε. του Laplace $\nabla^2 f = 0$

Κάθε γραμμικός συνδυασμός αρμονικών συναρτήσεων είναι αρμονική συνάρτηση.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Αρμονικές συναρτήσεις

Θεώρημα

Αν $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, μία αναλυτική μιγαδική συνάρτηση τότε οι $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Απόδειξη

Άμεση συνέπεια των C-R με την επισήμανση πως οι u, v έχουν συνεχείς δεύτερες παράγωγους..

$$f = u + iv \text{ αναλυτική} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{array} \right\} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Θεώρημα

Αν $u(x, y)$ είναι αρμονική συνάρτηση στο απλά συναφές χωρίο A , τότε η $u = \operatorname{Re} f$, για κάποια αναλυτική συνάρτηση f .

Απόδειξη

Δεν είναι προφανής. Μία απόδειξη είναι διαθέσιμη εδώ (Theorem 5.3.):

https://ocw.mit.edu/courses/18-04-complex-variables-with-applications-spring-2018/2e739bb156efb0bc7103fc43d0897dda_MIT18_04S18_topic5.pdf

Αρμονικές συναρτήσεις

Άσκηση

Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $u(x, y) = x^3 - kxy^2 + 12xy - 12x$, να αποτελεί πραγματικό μέρος μίας αναλυτικής συνάρτησης.

Υπόδειξη: Αν $u = \operatorname{Re}(f)$ και f αναλυτική, τότε πρέπει η u να είναι αρμονική.

$$u(x, y) = x^3 - kxy^2 + 12xy - 12x$$

$$u = \operatorname{Re} f \text{ για κάποια αναλυτική } f \Leftrightarrow \Delta u = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 6x - 2kx = 0 \Leftrightarrow (6 - 2k)x = 0 \Rightarrow 6 - 2k = 0 \Rightarrow \boxed{k=3}$$

$$u_x = 3x^2 - ky^2 + 12y - 12, \quad u_{xx} = 6x.$$

$$u_y = -2kxy + 12x, \quad u_{yy} = -2kx$$

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 12xy - 12x.$$

Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω u μία αρμονική συνάρτηση στο $U \subset \mathbb{R}^2$. Κάθε συνάρτηση $v: U \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $\underline{u + iv}$ να είναι αναλυτική στο U , ονομάζεται αρμονική συζυγής της u στο U .

Άσκηση

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ και $u(x, y) = -5x^4y + 10x^2y^3 - y^5$. Δείξτε ότι η u είναι αρμονική και βρείτε την αρμονική συζυγής $v(x, y)$ για την οποία $v(1, 0) = 2$.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \exists \text{ αναλ. } f = u + iv.$$

$$u_x = -20x^3y + 20xy^3, \quad u_{xx} = -60x^2y + 20y^3$$

$$u_y = -5x^4 + 30x^2y^2 - 5y^4, \quad u_{yy} = 60x^2y - 20y^3.$$

$$\begin{aligned} \text{C.R. } v_y &= -20x^3y + 20xy^3 \Rightarrow v(x,y) = -20x^3 \frac{y^2}{2} + 20x \frac{y^4}{4} + c(x). \\ v_x &= -u_y = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \quad \Bigg| \quad = -10x^3y^2 + 5xy^4 + c(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eival, } v_x(x,y) &= -30x^2y^2 + 5y^4 + c'(x) \\ \text{Otwos, } v_x(x,y) &= 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Eival, } v_x(x,y) &= -30x^2y^2 + 5y^4 + c'(x) \\ \text{Otwos, } v_x(x,y) &= 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow c'(x) = 5x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c(x) = x^5 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Apra, } v(x,y) = -10x^3y^2 + 5xy^2 + x^5 + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$v(1,0) = 1 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Teđira: } \boxed{v(x,y) = -10x^3y^2 + 5xy^2 + x^5 + 1.}$$

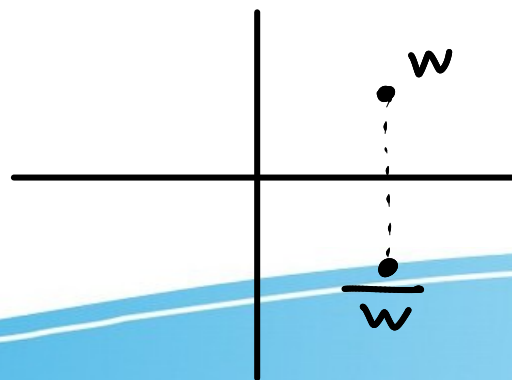
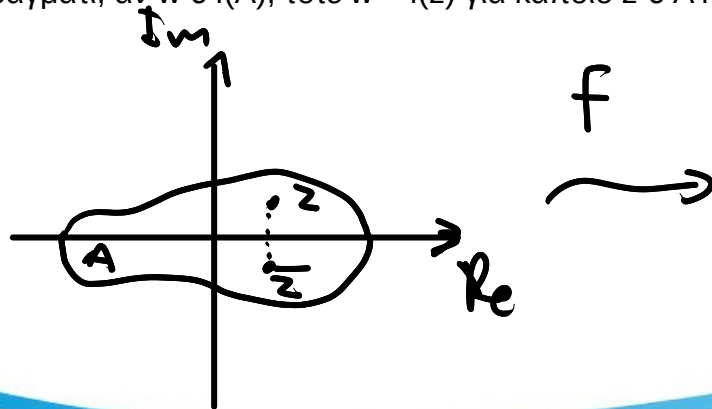
Συμμετρίες της $f(A)$

Συμμετρίες της $f(A)$

Στην πραγματική ανάλυση υπάρχει δυνατότητα “ερμηνείας” αλγεβρικών σχέσεων με γεωμετρικό τρόπο (όπως π.χ. στις άρτιες και στις περιττές συναρτήσεις). Για τις μιγαδικές συναρτήσεις μπορούμε να διατυπώσουμε αντίστοιχες προτάσεις:

1. Έστω χωρίο A συμμετρικό ως προς τον $x'x$, και $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. Αν $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ τότε η εικόνα $f(A)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$.

Πράγματι, αν $w \in f(A)$, τότε $w = f(z)$ για κάποιο $z \in A$ και $\bar{w} = \overline{f(z)} = f(\bar{z}) \in f(A)$.



$$w \in f(A) \Rightarrow w = f(z)$$

$$\Rightarrow \bar{w} = \overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

$$\Rightarrow \bar{w} \in f(A).$$

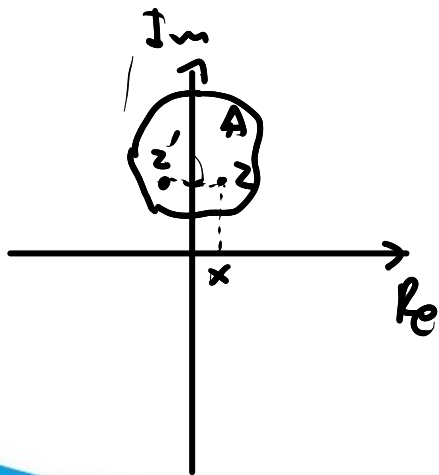
$$\bar{w} = Re w - i Im w$$

Συμμετρίες της $f(A)$

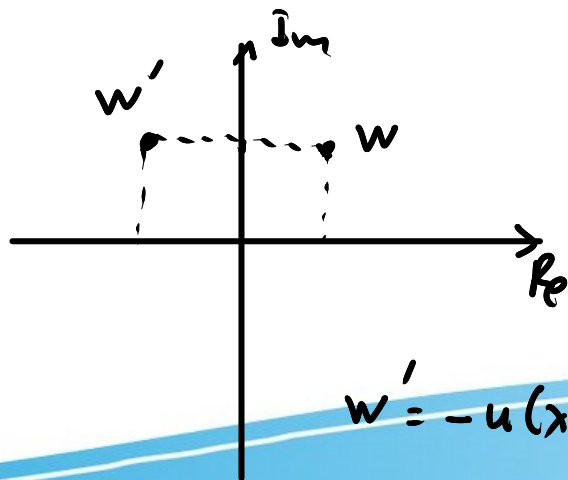
2. Έστω χωρίο A συμμετρικό ως προς τον $y'y$, και $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y): A \rightarrow \mathbb{C}$.

Αν η u είναι περιττή ως προς x και η v είναι άρτια ως προς $\bar{x}$, ($u(-\bar{x}, y) = -u(x, y)$ και $v(-x, y) = v(x, y)$) τότε το $f(A)$ είναι συμμετρικό ως προς τον $y'y$.

Πράγματι, αν $w \in f(A)$, τότε $w = f(z)$ για κάποιο $z \in A$ και παρατηρούμε ότι το συμμετρικό του w ως προς τον Im ανήκει και αυτό στο $f(A)$:
 $w' = -\text{Re } w + i \text{Im } w = -u(x, y) + iv(x, y) = u(-x, y) + iv(-x, y) = f(-x + iy) \in f(A)$.



f



$$u(-x, y) = -u(x, y)$$

$$v(-x, y) = v(x, y).$$

$$w \in f(A) \Rightarrow w = f(z)$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$$

$$w' = -u(x, y) + iv(x, y) =$$

$$= u(-x, y) + iv(-x, y) = f(-x + iy)$$

$$\Rightarrow w' \in f(A)$$

Μετασχηματισμοί Möbius



Μετασχηματισμοί Möbius

Ορισμός

Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad \underline{ad - bc \neq 0},$$

ονομάζεται μετασχηματισμός Möbius ή απλά διγραμμικός μετασχηματισμός.

Τυπικά, το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{C} - \{-d/c\}$, ωστόσο, ορίζοντας $f(-d/c) = \infty$ και $f(\infty) = b/d$, μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως μία απεικόνιση στο επεκταμένο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (το οποίο αναπαριστάται γραφικά με την σφαίρα του Riemann).

Σημείωση

Η υπόθεση $ad - bc \neq 0$, είναι ουσιαστική και απαραίτητη. Αν $ad - bc = 0$, τότε $f'(z) = 0$ και $f(z) = \text{σταθερή}$.

Μετασχηματισμοί Möbius

Οι μετασχηματισμοί Möbius έχουν μεγάλη εφαρμογή σε πρακτικά προβλήματα όπως για παράδειγμα στην επεξεργασία ψηφιακών σημάτων.

Στα πλαίσια του μαθήματος, θα ασχοληθούμε με την απεικόνιση απλών σχημάτων (ευθεία και κύκλος) από μετασχηματισμούς αυτής της μορφής.

Στην προσπάθειά μας αυτή θα μας βοηθήσει το εξής:

Θεώρημα

Η εικόνα μίας ευθείας ή κύκλου μέσω ενός μετασχηματισμού Möbius είναι πάντα ευθεία ή κύκλος.

Απόδειξη: <https://math.stackexchange.com/questions/460548/a-m%C3%B6bius-transformation-maps-circles-and-lines-to-circles-and-lines-what-exactl>

Προσοχή: Όχι απαραίτητα ευθεία σε ευθεία και κύκλος σε κύκλο.

Μετασχηματισμοί Möbius

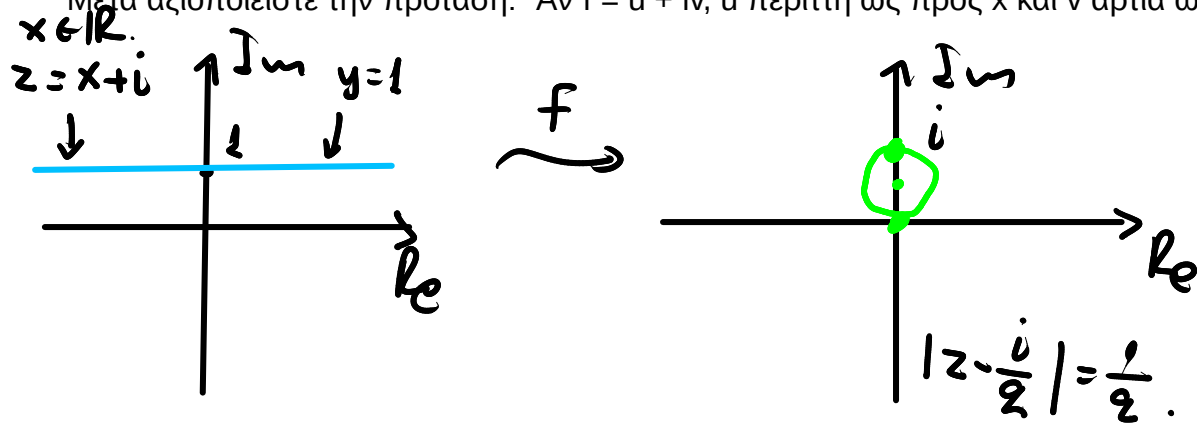
Άσκηση

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y = 1$ μέσω της $f(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$

Υποδείξεις

Πρώτα αποφασίστε αν η εικόνα $w = f(z)$ ανήκει σε ευθεία ή κύκλο.

Μετά αξιοποιείστε την πρόταση: "Αν $f = u + iv$, u περιττή ως προς x και v άρτια ως προς x , τότε το $f(A)$ συμμετρικό ως προς $y'y$."



$$f(x+i) = \frac{x+i-i}{-i(x+i)+1} = \frac{x}{2-ix}$$

$$= \frac{x(2+ix)}{4+x^2} = \frac{2x}{4+x^2} + i \frac{x^2}{4+x^2}$$

$$u(x,y) = \frac{2x}{4+x^2}, \quad v(x,y) = \frac{x^2}{4+x^2}$$

Παρατηρούμε, ότι u, v γραμμικά, άρα $f(x+i)$: κύκλος.

Είπαμε $u(-x, y) = -u(x, y)$, $v(-x, y) = v(x, y) \Rightarrow$ ο κώδικας είναι

συμμετρικός ως προς y' .
Για $x=0$: $f(i) = \frac{2 \cdot 0}{4+0^2} + i \frac{0^2}{4+0^2} = 0$. Για $x \rightarrow +\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x+i) = i$

Ενδιαφέροντα: $u(x, y) = \frac{2x}{4+x^2}$, $v(x, y) = \frac{x^2}{4+x^2}$.

$$(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2 = r^2$$

$$v = \frac{x^2}{4+x^2} \Leftrightarrow 4v + vx^2 = x^2 \Leftrightarrow (v-1)x^2 = -4v \Leftrightarrow x^2 = \frac{-4v}{v-1}$$

$$u = \frac{2x}{4+x^2} \Rightarrow u^2 = \frac{4 \frac{-4v}{v-1}}{\left(4 + \frac{-4v}{v-1}\right)^2} \Leftrightarrow u^2 = \frac{\frac{-16v}{v-1}}{\left(\frac{-4}{v-1}\right)^2} \Leftrightarrow u^2 = \frac{\frac{-v}{1}}{\frac{1}{(v-1)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 = -v(v-1) \Leftrightarrow u^2 + v^2 - v = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^2 + v^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} v + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow u^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ κύκλος με κέντρο $O(0, \frac{1}{2})$ και $r = \frac{1}{2}$.

Μετασχηματισμοί Möbius

Άσκηση

Ναδειχθεί ότι η εικόνα του πραγματικού άξονα μέσω της $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Υπόδειξη

Αναλογιστείτε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η εικόνα.

Μετασχηματισμοί Möbius

Αν οι συντελεστές του μετασχηματισμού Möbius είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα

Αν $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, τότε $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ και

η εικόνα κάθε κύκλου με κέντρο στο $x'x$ είναι κύκλος με κέντρο στο $x'x$ ή ευθεία κάθετη στο $x'x$.

Στην περίπτωση αυτή, αν C μία ευθεία ή ένας κύκλος, για να βρούμε την $f(C)$, αρκεί να βρούμε τα δύο αντιδιαμετρικά σημεία του πάνω στον πραγματικό άξονα.

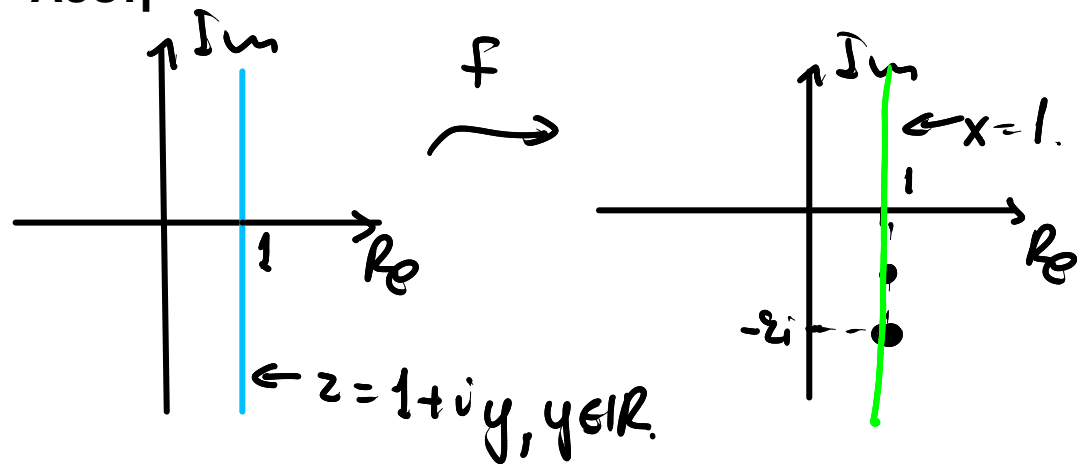
Μετασχηματισμοί Möbius

Άσκηση

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $x = 1$ μέσω της $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$.

Υπόδειξη: Η f έχει πραγματικούς συντελεστές.

Λύση



$$\begin{aligned} f(1+iy) &= \frac{1+iy+1}{1+iy-1} = \frac{2+iy}{iy} = \\ &= -i \frac{2+iy}{y} = 1 - i \frac{2}{y}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η $f(1+iy)$ απεικονίζει για $y \neq 0$, άρα η εικόνα είναι ευθεία.

Για $y=1 \Rightarrow f(1+i) = 1-2i$, Για $y=2 \Rightarrow f(1+2i) = 1-i \Rightarrow$ Εικόνα: $x=1$.



Μετασχηματισμοί Möbius

Άσκηση

Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y = 0$ μέσω της $f(z) = \frac{z - i}{z + 2i}$.

Λύση

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C



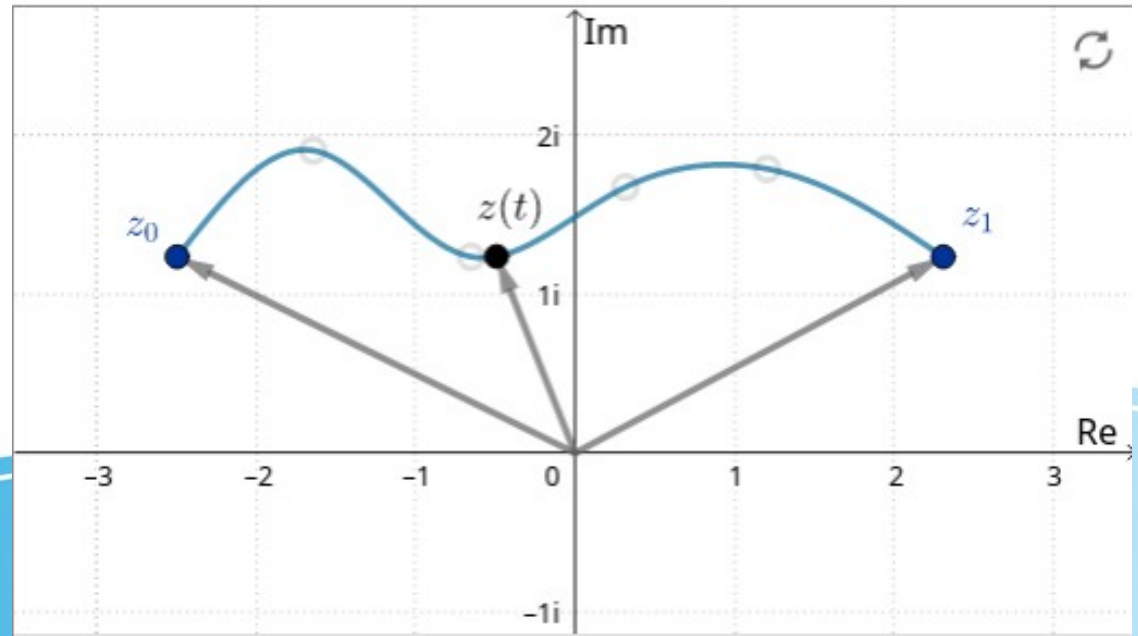
Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Κάθε καμπύλη στο C μπορεί να αναπαρασταθεί από μία εξίσωση της μορφής $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, όπου $x(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$, $y(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$, οι πραγματικές συναρτήσεις που αποδίδουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε σημείου αντίστοιχα.

Το $z_0 = z(\alpha) = x(\alpha) + iy(\alpha)$, λέγεται αρχικό σημείο της καμπύλης και το $z_1 = z(\beta) = x(\beta) + iy(\beta)$, τελικό σημείο. Αν $z(\alpha) = z(\beta)$ τότε η καμπύλη λέγεται **κλειστή**. Αν η καμπύλη δεν τέμνει τον εαυτό της τότε ονομάζεται **απλή**.

Παράδειγμα ανοικτής, απλής καμπύλης:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο $\mathbb{C}$

Παράδειγμα 1

Μία παραμετρική εξίσωση του κύκλου $C: |z| = 1$, είναι η



$$z(t) = \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi],$$

ή πιο απλά $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

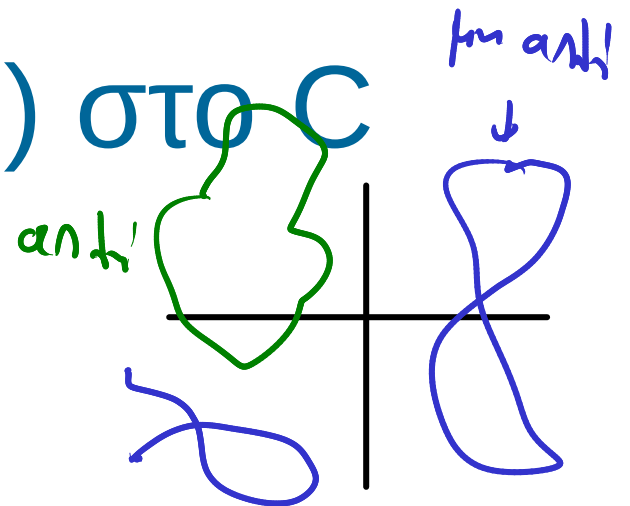
Δεν υπάρχει μοναδική παραμετροποίηση για μία καμπύλη. Ο ίδιος κύκλος ($|z| = 1$) θα μπορούσε να παραμετροποιηθεί με την εξίσωση

$$z(t) = e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t), t \in [0, 1],$$

ή με την εξίσωση

$$z(t) = e^{\pi it/2} = \cos(\pi t/2) + i \sin(\pi t/2), t \in [0, 4].$$

Παρατηρήστε ότι σε όλες τις παραπάνω παραμετροποιήσεις, ο κύκλος διαγράφεται με τη “θετική” φορά, δηλαδή τη φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Φανερά, η έννοια της φοράς έχει νόημα μόνο για κλειστές καμπύλες.

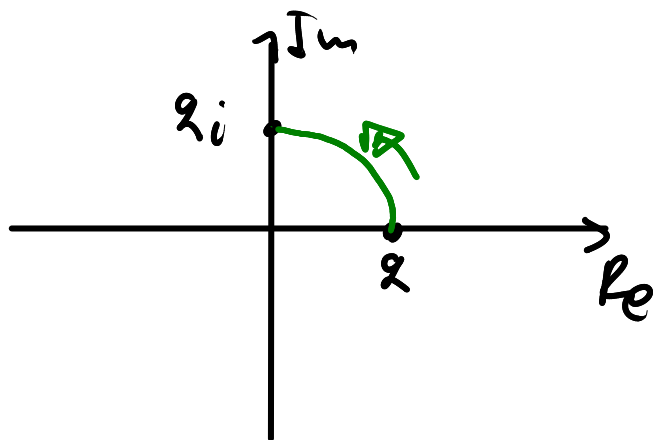


Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Άσκηση

(α) Να σχεδιαστεί το τόξο C του κύκλου $K(0, 2)$, μεταξύ 2 και $2i$.

(β) Να βρεθεί παραμετρική εξίσωση για το C.



$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{ή } z(t) = e^{i\frac{\pi}{2}t}, \quad t \in [0, 1].$$

$$\text{ή } z(t) = e^{i(\frac{\pi}{2}-t)}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

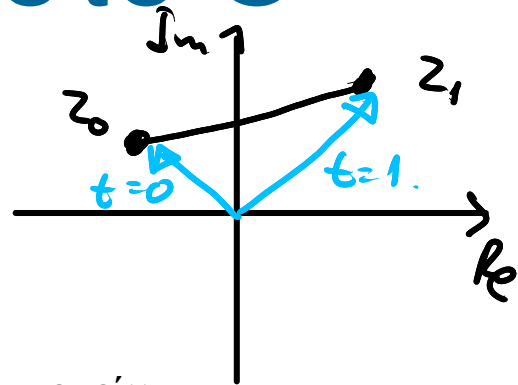
$$z(t) = e^{-it}, \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$$

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο C

Παράδειγμα 2

Μία παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος $[z_0, z_1]$, είναι η

$$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0), t \in [0, 1].$$



Άσκηση

Να βρεθεί μία παραμετρική εξίσωση των ευθυγράμμων τμημάτων μεταξύ των σημείων

α) $1, 1 + i$

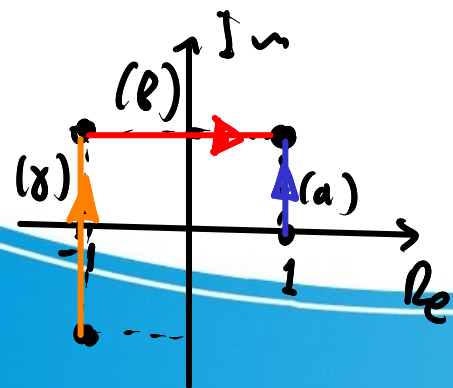
β) $-1 + i, 1 + i$

γ) $-1 - i, 1 + i$

$$(a) \quad z(t) = 1 + t(1+i-1) = 1 + ti, t \in [0, 1]$$

$$(b) \quad z(t) = -1 + i + t \cdot (1+i - (-1+i)) = -1 + i + 2t = -1 + 2t + i, t \in [0, 1]$$

$$(γ) \quad z(t) = -1 - i + t \cdot (1+i - (-1-i)) = -1 - i + 2ti = -1 + (2t-1)i, t \in [0, 1]. \text{ άλυτη}$$



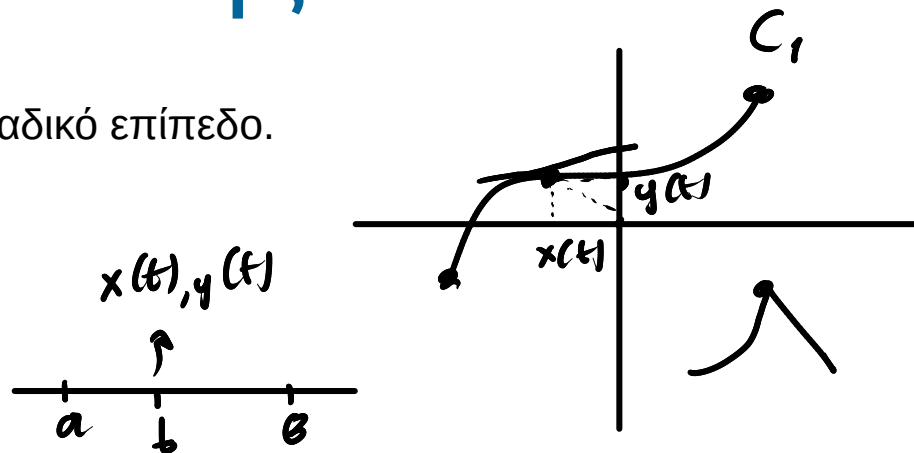
Εφαπτομένη καμπύλης στο C

Ορισμός

Έστω $C_1: z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, μία καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο.

Η καμπύλη C_1 ονομάζεται **λεία**, αν ισχύουν τα εξής:

- 1) $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$, $t \in (\alpha, \beta)$.
- 2) $z'(t)$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.
- 3) $z(t)$: 1-1 συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ (η C_1 είναι απλή).



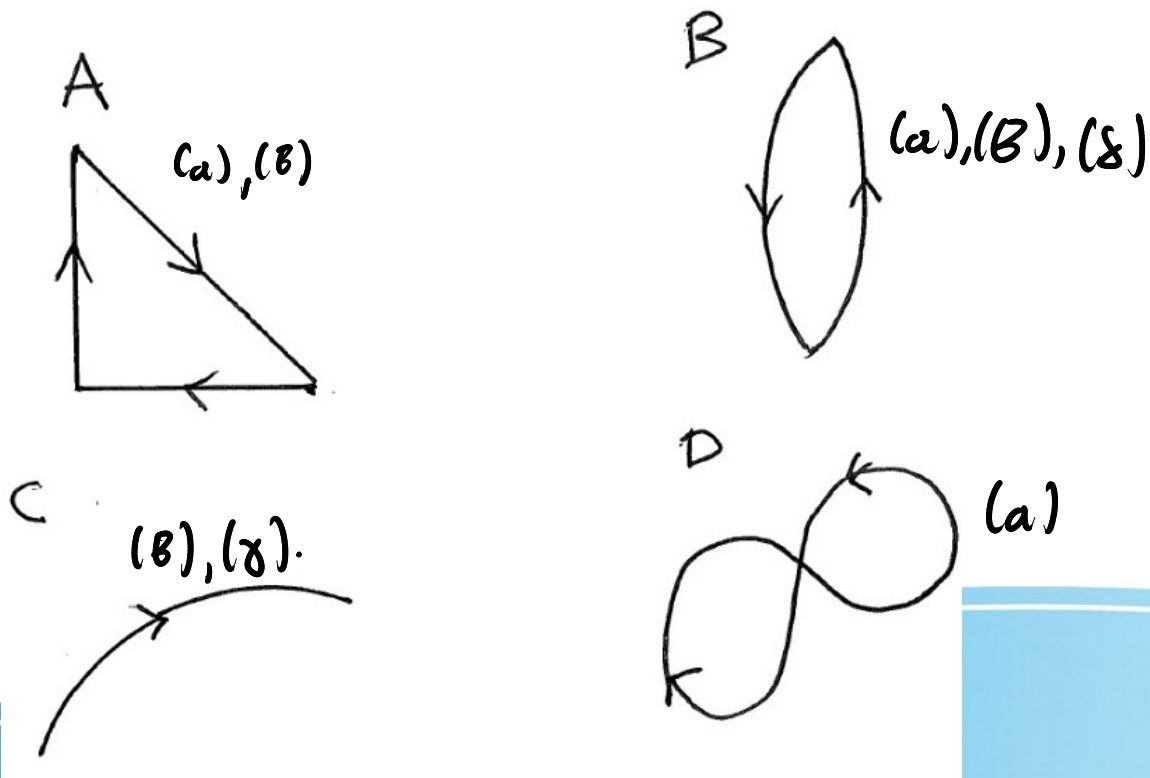
Αν $C_1: z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, είναι μία λεία καμπύλη, τότε σε κάθε σημείο $z_0 = z(t_0)$ της καμπύλης ορίζεται εφαπτομένη ευθεία, η οποία έχει εξίσωση

$$\varepsilon: l(t) = z(t_0) + \lambda z'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται ευκολότερα κατανοητή αν οι μιγαδικές ποσότητες ερμηνευθούν ως διανύσματα. Στο πλαίσιο αυτό το $z'(t_0)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης και η $l(t)$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του σημείου που κινείται στην καμπύλη C .

Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο $\mathbb{C}$

Ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι (α) κλειστές, (β) απλές, (γ) λείες, (δ) με θετική φορά;



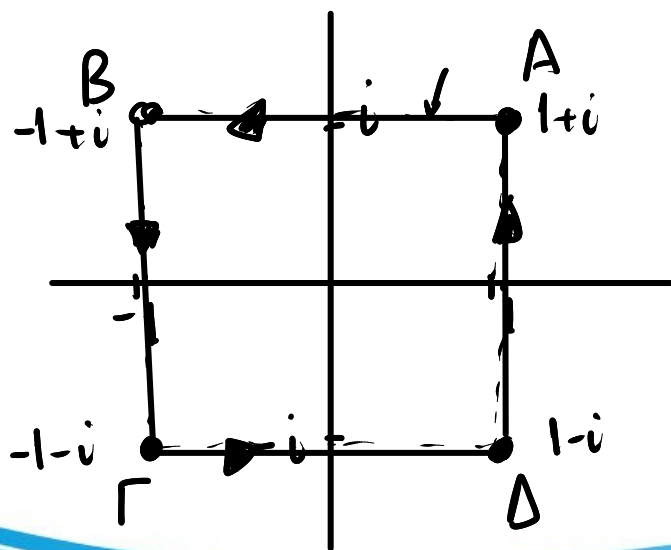
Καμπύλες (ή μονοπάτια) στο $\mathbb{C}$

Άσκηση 2

(α) Να σχεδιαστεί το μονοπάτι C που διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία

$1 - i, 1 + i, -1 + i, -1 - i$.

(β) Να βρεθεί παραμετρική εξίσωση για το C .



$$A \rightarrow B: z(t) = 1 + i + t \cdot (-1 + i - (1 + i)) = 1 - 2t + i,$$

$$B \rightarrow \Gamma: z(t) = -1 + i + t \cdot (-1 - i - (-1 + i)) = -1 + (1 - 2t)i,$$

$$\Gamma \rightarrow \Delta: z(t) = -1 - i + t \cdot (1 - i - (-1 - i)) = -1 + 2t - i.$$

$$\Delta \rightarrow A: z(t) = 1 - i + t \cdot (1 + i - (1 - i)) = 1 + (2t - 1)i.$$

$$z(t) = \begin{cases} 1 - 2t + i, & t \in [0, 1] \\ -1 + (1 - 2(t-1))i, & t \in [1, 2] \\ -1 + 2(t-2) - i, & t \in [2, 3] \\ 1 + (2(t-3) - 1)i, & t \in [3, 4] \end{cases}, \quad t \in [0, 4].$$

$$1 \leq t' \leq 2$$

$$0 \leq t' \leq 1$$

$$t \in [0, 1]$$

Σύμμορφες απεικονίσεις



Σύμμορφες απεικονίσεις

Ορισμός

Μια ολόμορφη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται **σύμμορφος μετασχηματισμός** ή **σύμμορφη απεικόνιση** (conformal mapping) στο $D \subset A$, αν $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D$.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι σύμμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$.
2. Η συνάρτηση $f(z) = z^2$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.
3. Η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ είναι σύμμορφη στο $\mathbb{C} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
4. Κάθε μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, είναι σύμμορφος στο $\mathbb{C} - \{-d/c\}$.

Σύμμορφες απεικονίσεις

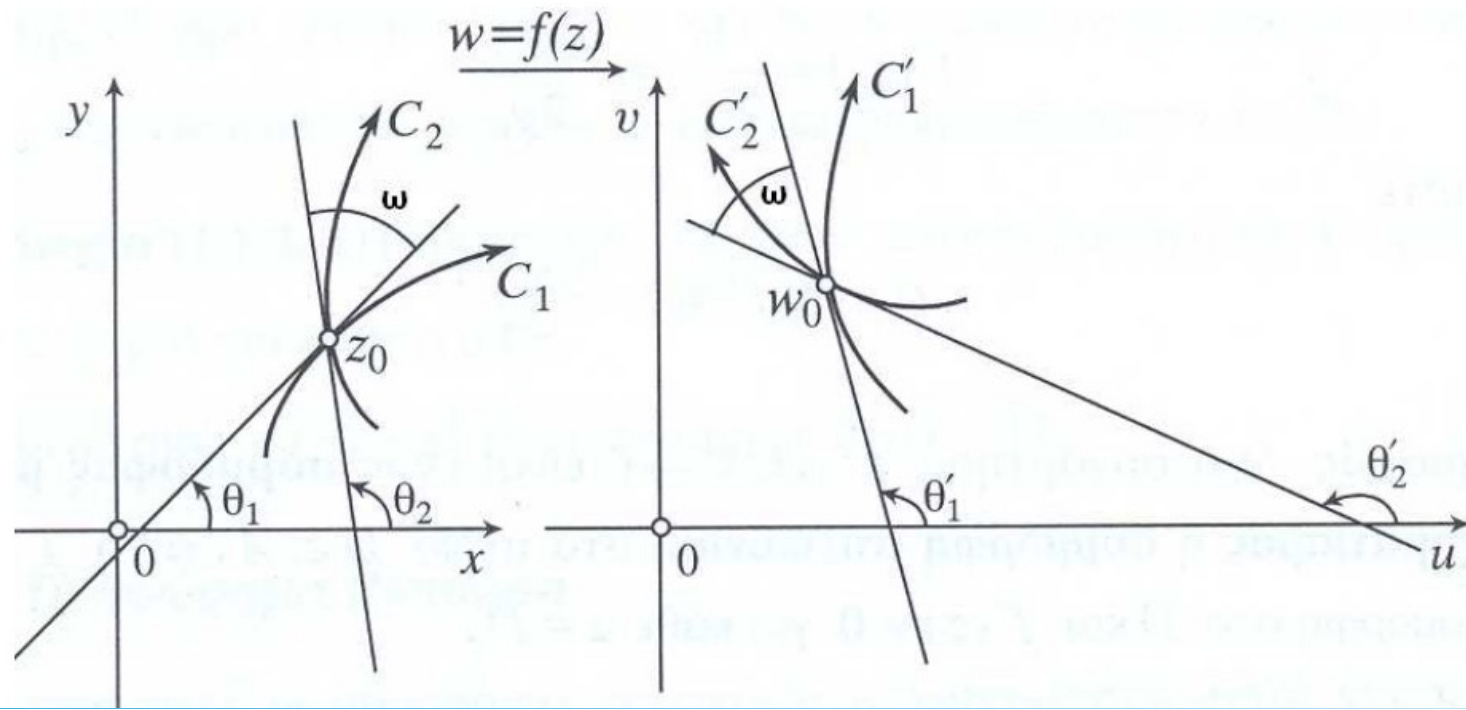
Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μία αξιοσημείωτη γεωμετρική ιδιότητα.

Κάθε σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.

$$C_1: z_1(t) = x_1(t) + y_1(t)i$$

$$C_2: z_2(t) = x_2(t) + y_2(t)i$$

$$\theta'_2 - \theta'_1 = \theta_2 - \theta_1 = \omega$$



Σύμμορφες απεικονίσεις

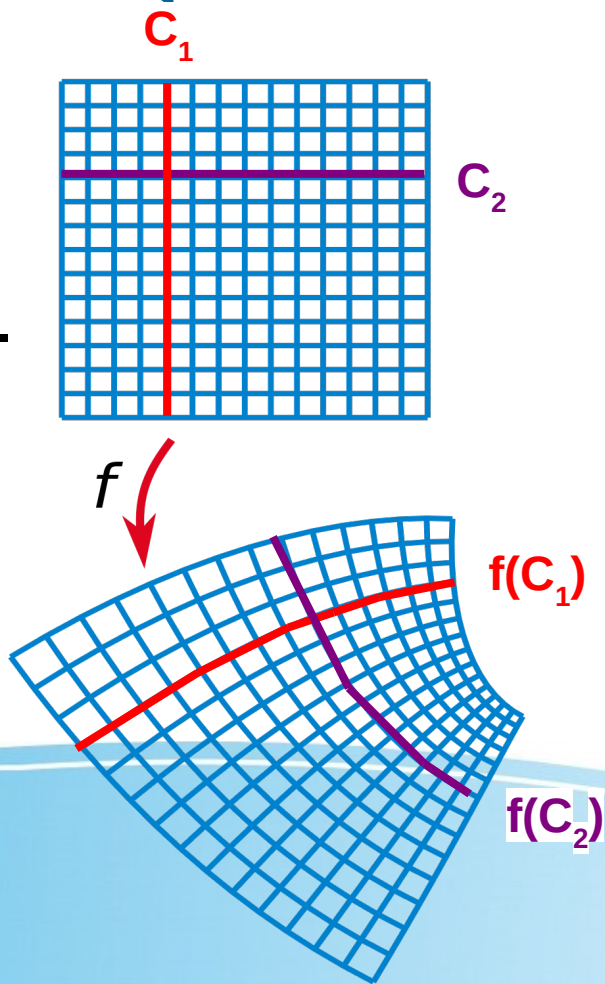
Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν μία αξιοσημείωτη γεωμετρική ιδιότητα.

Κάθε σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί την γωνία τομής μεταξύ δύο καμπυλών κατά μέτρο και προσανατολισμό.

$$C_1: z_1(t) = x_1 + ti \text{ (ή } C_1: \operatorname{Re} z = x_1)$$

$$C_2: z_2(t) = iy_1 + t \text{ (ή } C_2: \operatorname{Im} z = y_1)$$

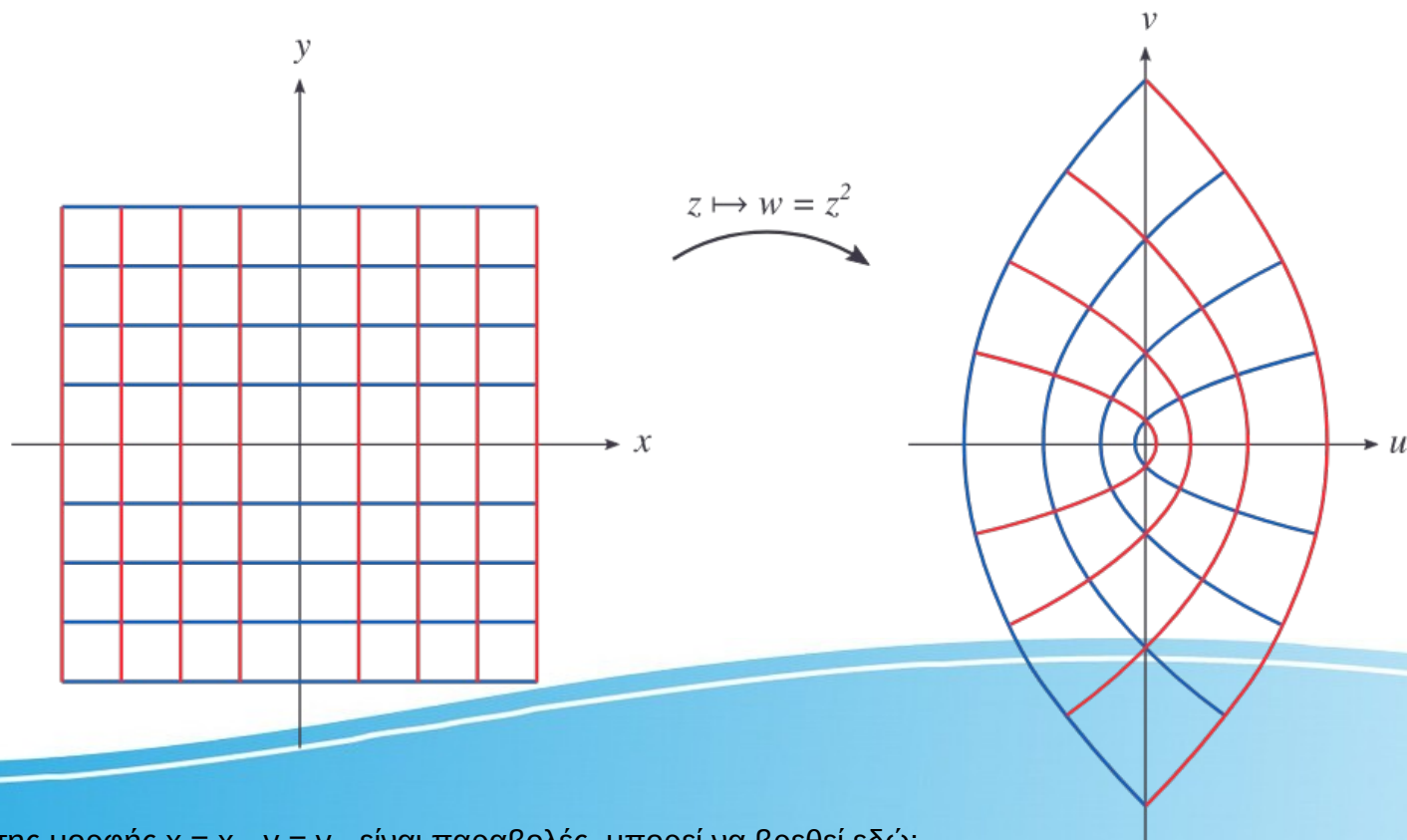
$$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow f(C_1) \perp f(C_2)$$



$$C_1: z_1(t) = x_1 + ti \text{ (ή } C_1: \operatorname{Re} z = x_1)$$

$$C_2: z_2(t) = iy_1 + t \text{ (ή } C_2: \operatorname{Im} z = y_1)$$

$$C_1 \perp C_2 \Leftrightarrow f(C_1) \perp f(C_2), \text{ όπου } f(z) = z^2.$$



Μία απόδειξη πως η εικόνα ευθειών της μορφής $x = x_0$, $y = y_0$, είναι παραβολές, μπορεί να βρεθεί εδώ:

<https://math.stackexchange.com/questions/959949/find-the-sketch-of-y-1-under-the-mapping-fz-z2>

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Μία παραμετρική εξίσωση ενός μονοπατιού στο μιγαδικό επίπεδο δεν είναι παρά μία μιγαδική συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής:

$$w(t) = u(t) + iv(t), t \in \Delta \subseteq \mathbb{R}.$$

Καθώς, τόσο η παράγωγος όσο και το ολοκλήρωμα έχει την αθροιστική ιδιότητα, ισχύουν για τις συναρτήσεις αυτές, όλα τα γνώριμα συμπεράσματα από την πραγματική ανάλυση.

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

$$\operatorname{Re} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(w(t)) dt$$

$$\operatorname{Im} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im}(w(t)) dt$$

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$$

Μιγαδικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $w_1(t) = 1 + it^2$, $w_2(t) = e^{3it}$. Να βρεθούν τα εξής:

$$(α) w_1'(t) = (1 + it^2)' = 2it.$$

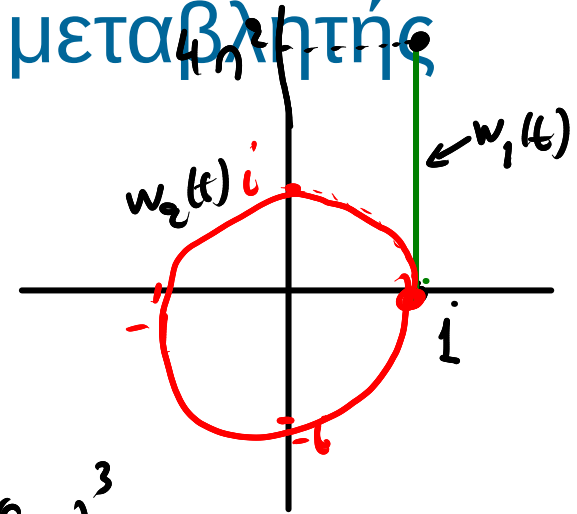
$$(β) w_2'(t) = (e^{3it})' = e^{3it} \cdot (3it)' = 3ie^{3it}.$$

$$(γ) \int_0^{2\pi} w_1(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + it^2) dt = t + i \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi + i \frac{(2\pi)^3}{3}.$$

$$(δ) \int_0^{2\pi} w_2(t) dt = \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{1}{3i} \int_0^{2\pi} (3it)' e^{3it} dt = \frac{1}{3i} e^{3it} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3i} (e^{6\pi i} - 1) = 0.$$

(ε) Να σχεδιαστούν οι καμπύλες $w_1(t)$, $w_2(t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$3t \in [0, 6\pi]$



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

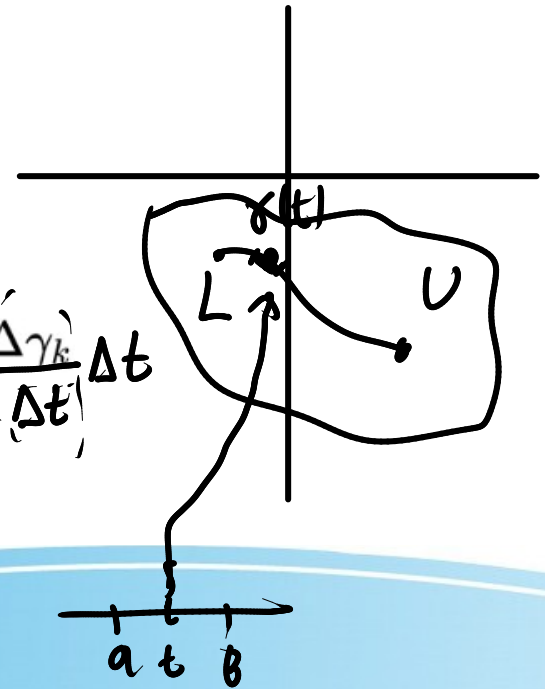
Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ και $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Έστω επίσης $L \subset U$ μία καμπύλη πεπερασμένου μήκους, παραμετροποιημένη από τη συνάρτηση $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow L$, με $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_L f(z) dz$$

ορίζεται να είναι το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$, του αθροίσματος

$$\sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\gamma_k) \frac{(\Delta \gamma_k)}{(\Delta t)} \Delta t$$

όπου $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ είναι μία διαμέριση του $[\alpha, \beta]$.



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Ο υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος με χρήση του ορισμού είναι επίπονος. Στην περίπτωση όπου η παραμετροποίηση $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow L$, με $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή να υπάρχουν οι x' , y' και να είναι συνεχείς συναρτήσεις), (ισοδύναμα η καμπύλη να είναι λεία) τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί ως ένα ολοκλήρωμα μιας συναρτήσεως πραγματικής μεταβλητής ως εξής:

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Στην περίπτωση που το αρχικό και το τελικό σημείο της L συμπίπτουν, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται συχνά με το σύμβολο

$$\oint_L f(z) dz,$$

Σημειώσεις

1. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα το συμβολίζουμε είτε $\int_L f(z) dz$ είτε $\int_\gamma f(z) dz$

2. Φανερά: $\int_\gamma (af(z) + bg(z)) dz = a \int_\gamma f(z) dz + b \int_\gamma g(z) dz$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z) = 1/z$ πάνω στον κύκλο $L: |z| = 1$, οποίος διαγράφεται κατά τη θετική φορά.

$$A = \mathbb{C}^*$$

$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

Λύση

Επιλέγουμε την παραμετροποίηση $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow L$, με $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $x(t) = \cos t$ και $y(t) = \sin t$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, άρα μπορούμε να εκφράσουμε άμεσα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως ένα απλό ολοκλήρωμα Riemann. Επιπλέον,

$$\gamma'(t) = (\cos t + i \sin t)' = (\cos t)' + i (\sin t)' = -\sin t + i \cos t = ie^{it}.$$

Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned} \oint_L \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} dt = i(2\pi - 0) = \underline{2\pi i}. \end{aligned}$$

$$\oint_L f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot (e^{it})' dt$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

$$\gamma(t) = e^{i(\xi_1 - t)}$$

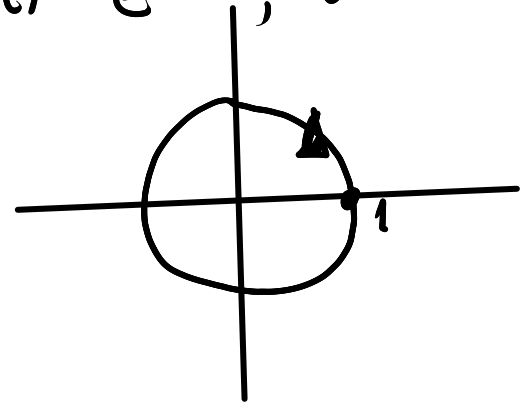
Παράδειγμα (συνέχεια)

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z) = 1/z$ πάνω στον κύκλο $L: |z| = 1$, οποίος διαγράφεται κατά την αρνητική φορά. Τι παρατηρείτε;

$$\gamma(t) = e^{-it}, \quad t \in [0, \xi_1]$$

Λύση

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_0^{\xi_1} f(e^{-it}) \cdot (e^{-it})' dt \\ &= \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\cancel{e^{-it}}} (-i) \cancel{e^{-it}} dt = -\xi_1 i. \end{aligned}$$



Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

α) Βρείτε μία παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος μεταξύ 1 και $1 + i$

I) με φορά $1 \rightarrow 1 + i$.

II) με φορά $1 + i \rightarrow 1$.

β) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z) = z$ και στις δύο περιπτώσεις. Τι παρατηρείτε;

Ανεξαρτησία επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την παραμετροποίηση του μονοπατιού

Θεώρημα (ανεξαρτησία από παραμετροποίηση)

Έστω $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, ένα μονοπάτι και $\omega: [\kappa, \lambda] \rightarrow [\alpha, \beta]$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$\omega(\kappa) = \alpha$ και $\omega(\lambda) = \beta$. Τότε $\int_{\gamma \circ \omega} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$, για κάθε συνάρτηση f συνεχής στο $\gamma([\alpha, \beta])$.

Απόδειξη

Είναι $\gamma \circ \psi: [\kappa, \lambda] \rightarrow \mathbb{C}$ και $\int_{\gamma \circ \omega} f(z) dz = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma \circ \omega(t)) (\gamma \circ \omega)'(t) dt = \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t))) \gamma'(\omega(t)) \omega'(t) dt$
 $= \int_{\kappa}^{\lambda} f(\gamma(\omega(t))) \gamma'(\omega(t)) d\omega(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz.$

Παρατηρήσεις

1. Η συνθήκη $\omega(\gamma) = \alpha$ και $\omega(\delta) = \beta$ διασφαλίζει ότι οι γ και $\gamma \circ \psi$ αποτελούν δύο παραμετροποιήσεις που διατρέχουν την ίδια καμπύλη **με την ίδια φορά**.

2. Από το θεώρημα συμπεραίνουμε ότι κάθε μονοπάτι περιγράφεται πλήρως από τις εξής τρεις πληροφορίες:

(α) Το ίχνος του ως ένα γεωμετρικό σχήμα,

(β) Τη φορά με την οποία διαγράφεται.

(γ) Το πλήθος των περιστροφών που κάνει (αν είναι κλειστό μονοπάτι).

Πράξεις με μονοπάτια 1/2

Ελεύθερη επιλογή πεδίου ορισμού

Το θεώρημα ανεξαρτησίας παραμετροποίησης επιτρέπει να θεωρούμε ως διάστημα ορισμού της παραμετροποίησης ενός μονοπατιού όποιο διάστημα $[κ, λ]$ επιθυμούμε. Πράγματι, αν $γ: [α, β] \rightarrow C$, ένα μονοπάτι, ορίζοντας τη συνάρτηση $ω: [κ, λ] \rightarrow [α, β]$, με

$$ω(t) = α + \frac{β - α}{λ - κ}(t - κ),$$

Τότε $ω(κ) = α$, $ω(λ) = β$, και η $γ \circ ω: [κ, λ] \rightarrow C$, είναι μία παραμετροποίηση του ίδιου μονοπατιού (που αποδίδει το ίδιο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για κάθε συνεχή συνάρτηση που ολοκληρώνεται).

Πρόσθεση μονοπατιών

Αν $γ_1, γ_2$ είναι δύο διαδοχικά μονοπάτια, τότε μπορεί να οριστεί το άθροισμα $γ_1 + γ_2$ ως ένα νέο μονοπάτι με κοινή παραμετροποίηση ως εξής: Αν $γ_1: [α, β] \rightarrow C$, επιλέγουμε για το $γ_2$, μία παραμετροποίηση της μορφής $γ_2: [β, λ] \rightarrow C$, για κάποιο κατάλληλο $λ \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $γ: [α, λ] \rightarrow C$, ως

εξής:

$$γ(t) = \begin{cases} γ_1(t), & t \in [α, β] \\ γ_2(t), & t \in [β, λ] \end{cases}$$

Φανερά, η $γ$ περιγράφει την ένωση των δύο ιχνών στο επίπεδο. Γράφουμε $γ = γ_1 + γ_2$.

Πράξεις με μονοπάτια 2/2

Αντίθετο μονοπάτι

Αν $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, τότε το μονοπάτι $-\gamma: [\beta, \alpha] \rightarrow \mathbb{C}$, με

$$-\gamma(t) = \gamma(\alpha + \beta - t),$$

διατρέχει τα ίδια σημεία του μιγαδικού επιπέδου, αλλά με την αντίθετη φορά.

Αναφορικά με τις πράξεις των μονοπατιών, εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

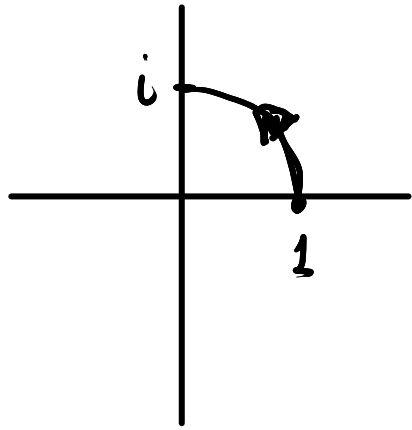
$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρείτε το $\int_{\gamma} z^2 dz$ όπου γ είναι το μέρος του κύκλου $|z| = 1$, που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. (από $z = 1 \rightsquigarrow i$) $\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{it})^2 \cdot (e^{it})' dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2it} \cdot i \cdot e^{it} dt = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3it} dt = \\ &= \frac{i}{3i} e^{3it} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot (e^{\frac{3\pi}{2}i} - 1) = - \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} - 1) = \frac{1}{3} (0 + i \cdot (-1) - 1) = -\frac{1}{3} (1 + i).$$

$$(i+t)^2 = i^2 + 2it + t^2 = t^2 - 1 + 2it$$

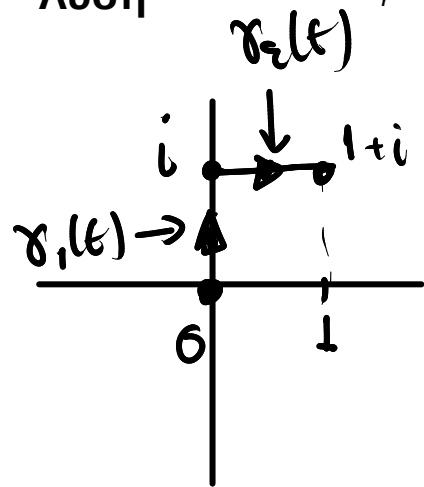
Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

(α) Να βρεθεί ευθύγραμμο μονοπάτι γ που να συνδέει το 0 με το i και το i με το $1+i$ (με αυτήν την σειρά).

(β) Να βρείτε το $\int_{\gamma} z^2 dz$ πάνω στο μονοπάτι γ του (α) ερωτήματος.

Λύση



$$\int_{\gamma} z^2 dz = \int_{\gamma_1} z^2 dz + \int_{\gamma_2} z^2 dz =$$

$$= \int_0^1 (ti)^2 \cdot (ti)' dt + \int_0^1 (i+t)^2 \cdot (i+t)' dt$$

$$= -i \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (t^2 - 1 + 2it) dt$$

$$= -i \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 + \left. \left(\frac{t^3}{3} - t + it^2 \right) \right|_0^1 = -\frac{i}{3} + \frac{1}{3} - 1 + i = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\gamma_1(t) = t \cdot i, t \in [0, 1]$$

$$\gamma_2(t) = i + t, t \in [0, 1]$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

(α) Να βρεθεί μονοπάτι γ που να διατρέχει το τρίγωνο με κορυφές $0, 1, i$ με τη θετική φορά.

(β) Να βρείτε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z) = z^*$ πάνω στο μονοπάτι γ του (α) ερωτήματος.

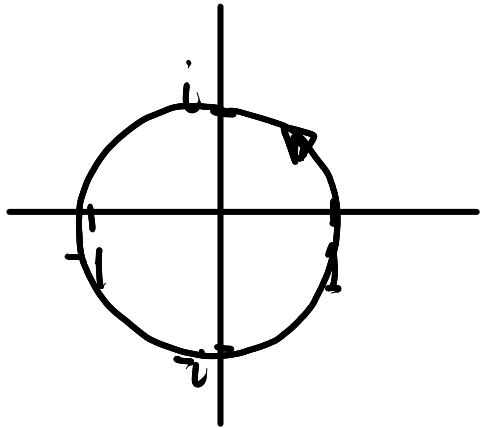
Λύση

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ όπου γ το μονοπάτι με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 4\pi]$

Λύση



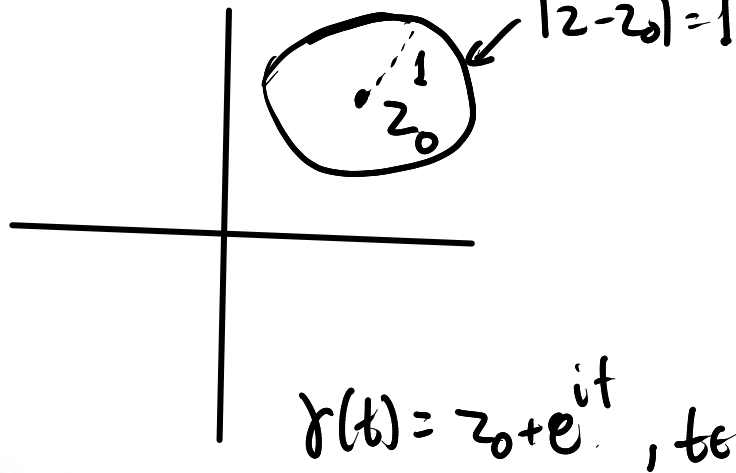
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{4\pi} \frac{1}{e^{it}} (e^{it})' dt = \\ &= i \int_0^{4\pi} \frac{1}{e^{it}} e^{it} dt = 4\pi i \end{aligned}$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$ όπου γ η περίμετρος του κύκλου με εξίσωση $|z - z_0| = 1$ (θετική φορά).

Λύση



$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} (z_0 + e^{it})' dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i \cdot e^{it} dt = 1. \end{aligned}$$

$$\gamma(t) = z_0 + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

(α) Να βρεθεί μονοπάτι γ που να διατρέχει το τετράγωνο με κορυφές $0, 1, 1 + i, i$ με τη θετική φορά.

(β) Να βρεθεί το $\int_{\gamma} z \, dz$ όπου γ το μονοπάτι του ερωτήματος (α).

Λύση

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Να βρεθεί το $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

$$(e^{int})' = i \cdot n e^{int}$$

Λύση

$$n \neq 0: \int_0^{2\pi} e^{int} dt = \frac{1}{i \cdot n} \int_0^{2\pi} (e^{int})' dt = \frac{1}{i \cdot n} e^{int} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{i \cdot n} (e^{2\pi n i} - 1) = 0.$$

$$n = 0: \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi.$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Άσκηση

Δείξτε ότι $\int_{\gamma} P(z) dz = 0$, για κάθε πολυώνυμο $P(z)$, όπου γ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Λύση

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} P(z) dz = \int_0^{2\pi} [a_n e^{int} + a_{n-1} e^{i(n-1)t} + \dots + a_0] \cdot (e^{it})' dt = 0.$$

Μήκος μονοπατιού

Μήκος μονοπατιού

Αν $\gamma(t): [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, είναι ένα μονοπάτι στο $\mathbb{C}$, τότε το μήκος της καμπύλης που περιγράφεται από αυτό είναι

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Παράδειγμα

Επαληθεύστε ότι ο παραπάνω τύπος αποδίδει το σωστό μήκος περιφέρειας για τον κύκλο $|z - z_0| = r$.

$$|z - z_0| = r : \gamma(t) = z_0 + e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma(t) = x_0 + \cos t + i(y_0 + \sin t) \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \cos t \Rightarrow x'(t) = -\sin t \\ y(t) &= y_0 + \sin t \Rightarrow y'(t) = \cos t \end{aligned}$$

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = 2\pi.$$

Μήκος μονοπατιού

Θεώρημα

Έστω $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, ένα μονοπάτι και f συνεχής συνάρτηση σε ένα σύνολο που περιέχει το $\gamma([\alpha, \beta])$. Αν $|f(z)| \leq M$, για κάθε $z \in \gamma([\alpha, \beta])$, τότε:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot l(\gamma).$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = M \ell(\gamma). \end{aligned}$$

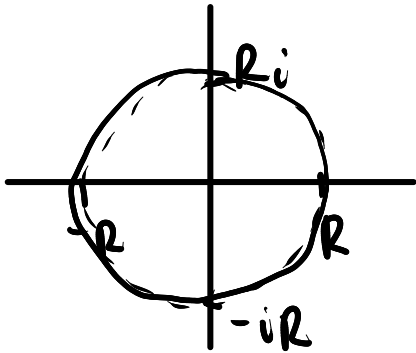
$$|Re^{it})'| = |Rie^{it}| = R|i||e^{it}| = R \cdot 1 \cdot 1 = R$$

Μήκος μονοπατιού

Πόρισμα

Έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, συνεχής και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq M$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Αν $\gamma_R(z) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, τότε, για κάθε $w \in \mathbb{C}$ είναι: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz = 0$



$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{|z - Re^{it}|^2} |Re^{it})'| dt =$$

$$= R \int_0^{2\pi} \frac{M}{|z - Re^{it}|^2} dt \leq R \int_0^{2\pi} \frac{M}{(|z| - R)^2} dt$$

$$\text{Άρα, } \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R \cdot M}{(|z| - R)^2} = 0.$$

Συναφή και Απλά συναφή χωρία



Συναφή και Απλά συναφή χωρία

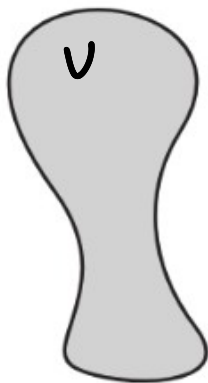
Ορισμός

Ένα υποσύνολο U του C , ονομάζεται **συναφές** αν δεν μπορεί να διαχωριστεί σε δύο (ή παραπάνω) μη κενά σύνολα τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους.

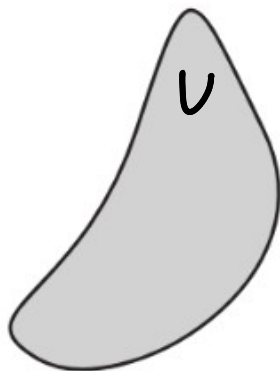
Σημείωση

Δύο σύνολα ονομάζονται ξένα, όταν το κάθε ένα, δεν περιέχει εσωτερικό ή σημείο συσσώρευσης του άλλου.

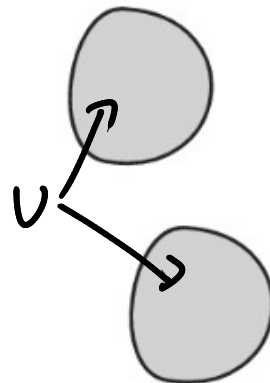
Παράδειγμα



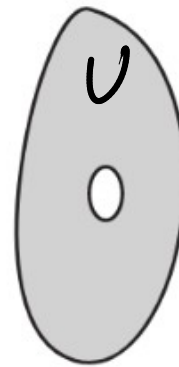
Συναφές



Συναφές



Όχι Συναφές



Συναφές

Συναφή και Απλά συναφή χωρία

Ορισμός

Ένα υποσύνολο U του C , ονομάζεται **απλά συναφές** αν

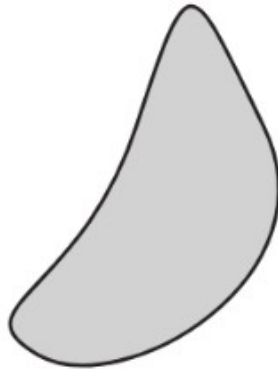
α) Κάθε δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με μία κλειστή καμπύλη.

β) Κάθε κλειστή καμπύλη, μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο με συνεχή τρόπο.

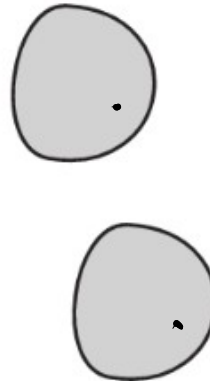
Παράδειγμα



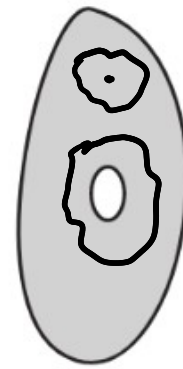
Απλά Συναφές



Απλά Συναφές



Όχι Απλά Συναφές



Όχι Απλά Συναφές

Συναφή και Απλά συναφή χωρία

Ορισμός

Ένα υποσύνολο U του C , ονομάζεται **κυρτό** αν για κάθε $z, w \in U$, είναι και $tz + (1 - t)w \in U$, για κάθε $t \in [0, 1]$.

Παρατήρηση

Κάθε κυρτό υποσύνολο του C είναι απλά συναφές. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Δραστηριότητα

Βρείτε ένα απλά συναφές υποσύνολο U του C που να είναι μη κυρτό.



Συναφή και Απλά συναφή χωρία

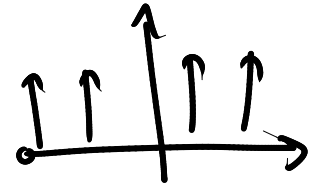
Δραστηριότητα

Εντοπίστε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι (1) Συναφή, (2) Απλά συναφή:

α) $\mathbb{C}$

β) $\mathbb{C}^*$

γ) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

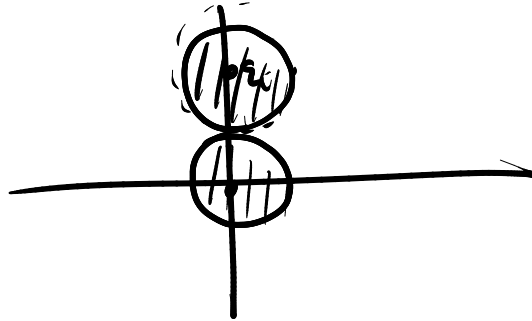


δ) $D(0, 1)$

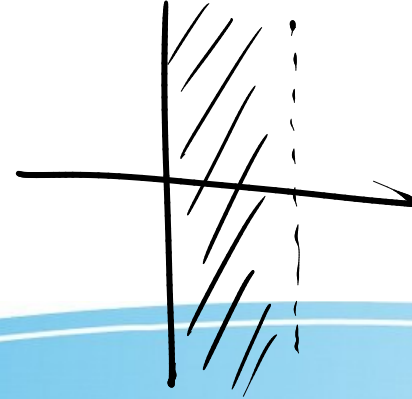
$|z| < 1$

ε) $D(0, 1) \cup D(2i, 1)$

$|z - 2i| < 1$



στ) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$



Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy



Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Θεώρημα

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συναφές, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναλυτική στο U , τότε για οποιοδήποτε απλό κλειστό μονοπάτι γ σε αυτό, είναι

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Σημείωση:

Κλειστό μονοπάτι σημαίνει ότι για οποιαδήποτε παραμετροποίηση του της μορφής $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, είναι $\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)$.

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Απόδειξη ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u + iv)(dx + i dy) = \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy)$$

$$\oint_{\gamma} (u dx - v dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Θεώρημα Green})$$

$$\oint_{\gamma} (v dx + u dy) = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \quad (\text{Θεώρημα Green})$$

$$\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{Εξισώσεις Cauchy - Riemann})$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (\text{Εξισώσεις Cauchy - Riemann})$$

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

Παρατηρήσεις

1. Κάθε πολυώνυμο $P(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$. Άρα, $\int_{\gamma} P(z) dz = 0$, για κάθε απλό κλειστό μονοπάτι γ στο $\mathbb{C}$.

2. Αντίστοιχα, το ίδιο συμβαίνει για κάθε συνάρτηση αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$.

$$\int_{\gamma} e^z dz = 0, \int_{\gamma} \cos z dz = 0, \int_{\gamma} \sin z dz = 0, \int_{\gamma} \cosh z dz = 0, \int_{\gamma} \sinh z dz = 0.$$

3. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z}$, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}^*$. Αν γ είναι μία καμπύλη που περιβάλλει

το 0, τότε το Θεώρημα Cauchy ΔΕΝ μπορεί να εφαρμοστεί. Ωστόσο, το Θ. Cauchy εφαρμόζεται όταν η καμπύλη γ δεν περιβάλλει το 0. Για παράδειγμα, αν γ το μονοπάτι που διατρέχει την περίμετρο του κύκλου $|z - 2| = 1$, τότε

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 0, \int_{\gamma} \ln z dz = 0.$$

Ολοκληρωτικό Θεώρημα Cauchy

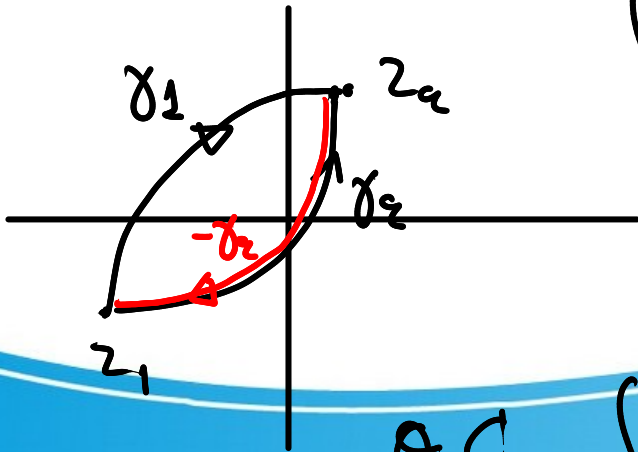
Πόρισμα

Έστω U απλά συναφές χωρίο και $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, αναλυτική συνάρτηση. Τότε, για κάθε $z_1, z_2 \in U$, το ολοκλήρωμα

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz,$$

είναι ανεξάρτητο από το δρόμο ολοκλήρωσης, δηλαδή έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το μονοπάτι που θα επιλεγθεί για να διατρέξει τη διαδρομή από το σημείο z_1 στο σημείο z_2 .

Απόδειξη



$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

$$\gamma_1 + (-\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 \Rightarrow \text{κλειστό μονοπάτι}$$

$$\text{Θ. C}_1 \quad \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0.$$

Ερμηνεία του ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy 1/2

Το συμπέρασμα του ολοκληρωτικού θεωρήματος φαίνεται κάπως παράδοξο σε σχέση με την έννοια της ολοκλήρωσης στις πραγματικές συναρτήσεις, όπου η βασική ερμηνεία ενός ολοκληρώματος ήταν αυτή του εμβαδού ενός χωρίου, που στη γενική του περίπτωση είναι διάφορο του μηδενός. Η κατάσταση διαφωτίζεται αν κάποιος αναγνωρίσει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως τη “μετατόπιση” στο πεδίο της εικόνας $F(U)$, (F η αντιπαράγωγος της f) που προκύπτει από τη μετατόπιση κατά μήκος της καμπύλης γ στο πεδίο ορισμού U . Δηλαδή, αν $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, ένα μονοπάτι, τότε

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) = \text{μετατόπιση μεταξύ } F(\gamma(\alpha)) \text{ και } F(\gamma(\beta)).$$

Έτσι, είναι ρεαλιστικό να περιμένει κανείς ότι αν κάνει “κύκλο” η καμπύλη στο πεδίο ορισμού ($\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$), τότε θα κάνει “κύκλο” και η αντίστοιχη καμπύλη στην εικόνα f και η μετατόπιση στο πεδίο της αντιπαραγώγου θα είναι 0: $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ερμηνεία του ολοκληρωτικού θεωρήματος Cauchy 2/2

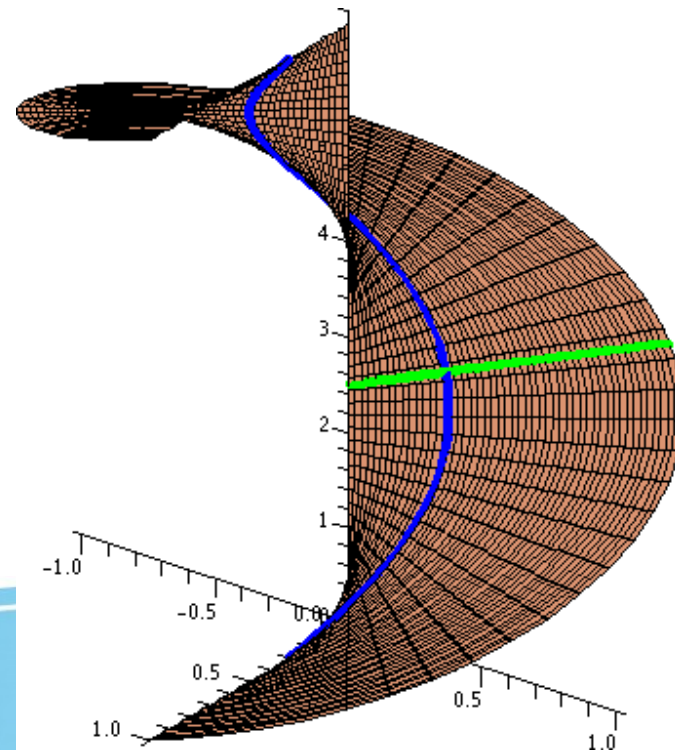
Αν η συνάρτηση f δεν είναι αναλυτική, τότε δεν υπάρχει αντιπαράγωγος που να είναι με βεβαιότητα συνεχής συνάρτηση και το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

έχει συμπεριφορά που προσδιορίζεται από την “τοπική” μορφή της αντιπαράγωγου, όπου αυτή υπάρχει. Ενδεικτικά, αν θεωρήσουμε την $f(z) = 1/z$, τον κύκλο $C: |z| = 1$, και τις καμπύλες $\gamma_{\varepsilon}: [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \rightarrow C$ με $\gamma_{\varepsilon}(t) = e^{i(t-\pi)}$, τότε ο κύκλος $|z| = 1$, είναι το όριο των γ_{ε} καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Υπολογίζουμε

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{1}{z} dz = \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{\gamma'_{\varepsilon}(t)}{\gamma_{\varepsilon}(t)} dt = 2\pi i - 2\varepsilon.$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε αυτήν τη διαφορά ως τη “μετατόπιση” που προκύπτει στις τιμές της αντιπαράγωγου της $1/z$ στο $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, η οποία δεν είναι άλλη παρά ο λογάριθμος $\ln z$ στο $C - (-\infty, 0]$.



Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

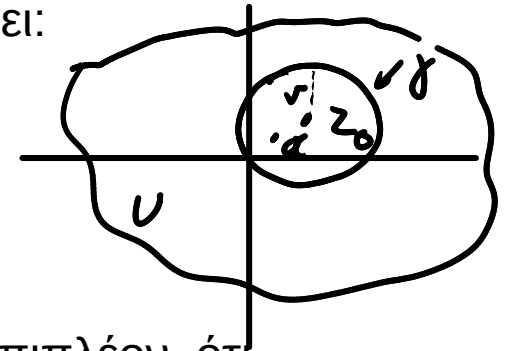


Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Θεώρημα

Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου C και έστω ότι $D \subseteq U$, όπου $D = \{z: |z - z_0| \leq r\}$. Έστω $f: U \rightarrow C$ μια αναλυτική συνάρτηση και έστω γ το μονοπάτι ∂D , θετικά προσανατολισμένο. Τότε, για κάθε $a \in D^\circ = \{z: |z - z_0| < r\}$ ισχύει:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$



Πόρισμα

Με τις ίδιες προϋποθέσεις του ολοκληρωτικού τύπου, αποδεικνύεται επιπλέον, ότι υπάρχουν οι παράγωγοι n – τάξης και ισχύει:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz.$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Απόδειξη ολοκληρωτικού τύπου Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z-a} dz = 1.$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(z(t)) - f(a)}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i \right) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z(t)) - f(a)|}{\varepsilon} \varepsilon dt \\ &\leq \max_{|z-a|=\varepsilon} |f(z) - f(a)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα 1

Αν C ο κύκλος με κέντρο 2 και ακτίνα 3, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz$

Λύση
Είναι
$$\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = \int_C \frac{1}{z-2} dz + \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = I_1 + I_2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = 1$, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αναλυτική σε όλο το C , άρα και στο εσωτερικό του δίσκου C . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$I_1 = \int_C \frac{1}{z-2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i.$$

$$f(a) = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

και

$$I_2 = \int_C \frac{1}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(2) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι
$$\int_C \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} \right) dz = 2\pi i.$$

$$n! f^{(n)}(a) = \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα 2

Αν $C: |z| = 1$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz$

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(a)$$

Λύση
Είναι $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^4/8$, και παρατηρούμε ότι αυτή

είναι αναλυτική σε όλο το C , άρα και στο εσωτερικό του δίσκου C . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz = \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \pi i f^{(2)}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

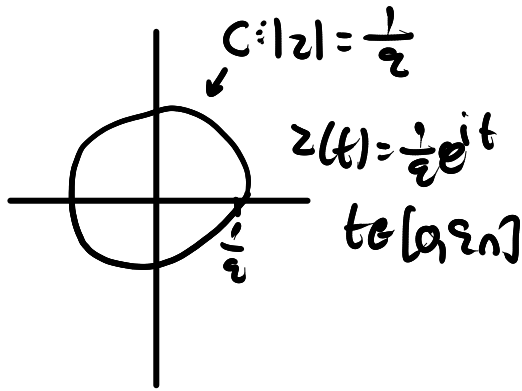
Είναι $f'(z) = z^3/2$, $f^{(2)}(z) = 3z^2/2$, άρα $f^{(2)}(-1/2) = 3(-1/2)^2/2 = 3/8$, και $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \frac{3\pi i}{8}$.

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{z+1}{z-1} dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα $\frac{1}{2}$.

Λύση



$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$\int_C \frac{z+1}{z-1} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i.$$

$$f(z) = z+1 : \text{αναλυτική } \mathbb{C}$$

Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\int_C \frac{e^z + z}{z^2} dz$, όπου C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

Λύση

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad f(z) = e^z + z : \text{αναλ. } \mathbb{C}$$
$$f'(z) = e^z + 1$$

$$\int_C \frac{e^z + z}{(z-0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot (e^0 + 1) = 4\pi i.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα 1/2

$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$
$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
$(ax^2 + bx + c)^k$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}, k = 1, 2, 3, \dots$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}$$

$$\frac{3x + 11}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A(x + 2) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)}$$

$$3x + 11 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα 2/2

$$\frac{x^2 + 4}{x(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-2}$$

$$\frac{x^2 - 29x + 5}{(x-4)^2(x^2+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 3x + 36}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

1. Αν γ η περίμετρος του κύκλου $|z| = 1/2$, που διαγράφεται μία φορά, με θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

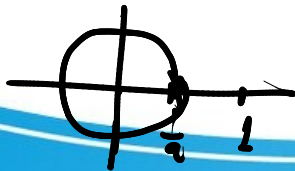
$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = 2\pi i.$$

Λύση

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{2z-1}{z \cdot (z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+Bz}{z \cdot (z-1)} = \frac{(A+B)z-A}{z \cdot (z-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=2 \\ -A=-1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A=1 \\ B=1 \end{array}$$

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz \quad \text{(and O.C.)}$$



$$r(t) = \frac{1}{2} e^{it} : \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{1}{2} e^{it}} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{it} \right)' dt = 2\pi i.$$

Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

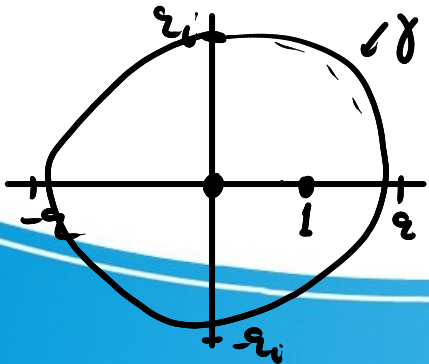
2. Αν γ ο κύκλος με κέντρο 0 και ακτίνα 2 που διαγράφεται μία φορά κατά τη θετική φορά, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$.

Λύση

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$\int_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{1}{z-1} dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

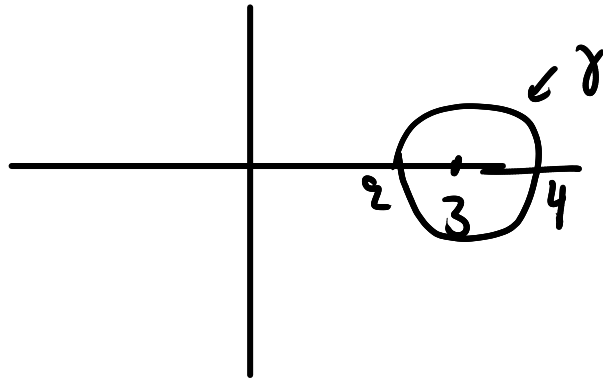
T.C.



Ασκήσεις στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

3. Αν γ ο κύκλος $(x - 3)^2 + y^2 = 1$, που διαγράφεται μία φορά με θετική φορά, να υπολογιστεί το $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$.

Λύση



$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} \stackrel{\text{θ.σ.}}{=} 0 \quad \left(\frac{1}{z} \text{ είναι αναλυτικό στο} \right. \\ \left. \text{εσωτερικό του } |z-3|=1 \right)$$