

Άσκηση 2.2.1

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - y' = 2y .$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y'' - y' - 2y = 0 .$$

δηλαδή είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 - \omega - 2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 2$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} ,$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.2

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 2\omega + 5 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x),$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.3

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 2\omega + 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = \omega_2 = -1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.4

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - y = 0.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 - 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.5

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 - 4\omega + 5 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = 2 \pm i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.6

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 6\omega + 9 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = \omega_2 = -3$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}.$$

Επειδή $y(0) = 0$, έχουμε

$$0 = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^{-3 \cdot 0} \Rightarrow c_1 = 0.$$

Επίσης επειδή $y'(0) = 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} y' &= c_2 e^{-3x} + c_2 x(-3e^{-3x}) \Rightarrow \\ 2 &= c_2 e^{-3 \cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot (-3e^{-3 \cdot 0}) \Rightarrow c_2 = 2. \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση του ΠΑΤ είναι

$$y = 2xe^{-3x},$$

Άσκηση 2.2.7

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 9 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Επειδή $y(0) = 0$, έχουμε

$$0 = c_1 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Επίσης επειδή $y'(0) = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} y' &= 3c_2 \cos 3x \Rightarrow \\ 1 &= 3c_2 \cos 3 \cdot 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση του ΠΑΤ είναι

$$y = \frac{1}{3} \sin 3x,$$

Άσκηση 2.2.8

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - y'' = y' - y.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y''' - y'' - y' + y = 0$$

δηλ. είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = -1$, $\omega_{2,3} = 1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x,$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.9

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0.$$

Απ. Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^3 - 4\omega^2 + 9\omega - 10 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 2$, $\omega_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{2x} + e^x (c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x),$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.10

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Απ. Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1 = 0 \Rightarrow (\omega - 1)^3 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2,3} = 1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \\ \Rightarrow y &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x, \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.2.11

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

Απ.

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 4^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^4 + 2\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\omega^2 + 1)^2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = \omega_{3,4} = \pm i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x,$$

όπου $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.