

Άσκηση 2.1.1

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' = 0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 3^{ης} τάξης, επομένως το σύνολο των λύσεων της είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 3.

Έχουμε

$$y''' = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = c \Rightarrow$$

$$y' = cx + c_2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{cx^2}{2} + c_2x + c_3 \Rightarrow$$

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

Επειδή η ορίζουσα του *Wronski* των λύσεων $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, είναι

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της ΔΕ αυτής.

Άρα η γενική της λύση είναι

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3, \text{ όπου } c_1, c_2, c_3 \text{ σταθερές.}$$

Άσκηση 2.1.2

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης, επομένως το σύνολο των λύσεων της είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 2

Δοκιμάζουμε ως λύσεις συναρτήσεις της μορφής

$$y = e^{\omega x}$$

Τότε

$$y' = \omega e^{\omega x}$$

και

$$y'' = \omega^2 e^{\omega x}.$$

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$$\omega^2 e^{\omega x} - 3\omega e^{\omega x} + 2e^{\omega x} = 0 \Rightarrow$$

$$(\omega^2 - 3\omega + 2)e^{\omega x} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 - 3\omega + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = 2$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$$

είναι λύσεις της ΔΕ.

Επειδή η ορίζουσα του *Wronski* των λύσεων $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$, είναι

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0,$$

οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της ΔΕ αυτής.

Άρα η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \text{ όπου } c_1, c_2 \text{ σταθερές.}$$

Άσκηση 2.1.3

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης, επομένως το σύνολο των λύσεων της είναι διανυσματικός χώρος διάστασης 2.

Δοκιμάζουμε ως λύσεις συναρτήσεις της μορφής

$$y = x^a$$

Τότε

$$y' = ax^{a-1}$$

και

$$y'' = a(a-1)x^{a-2}.$$

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$$x^2 a(a-1)x^{a-2} + xax^{a-1} - x^a = 0 \Rightarrow$$

$$[a(a-1) + a - 1]x^a = 0 \Rightarrow$$

$$a(a-1) + a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(a-1)(a+1) = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 = 1, a_2 = -1$$

Συνεπώς οι συναρτήσεις

$$y_1 = x, y_2 = x^{-1}$$

είναι λύσεις της ΔΕ.

Επειδή η ορίζουσα του *Wronski* των λύσεων $y_1 = x, y_2 = x^{-1}$ είναι

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -2x^{-2} \neq 0,$$

οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε αποτελούν μία βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων της ΔΕ αυτής.

Άρα η γενική της λύση είναι

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}, \text{ όπου } c_1, c_2 \text{ σταθερές.}$$