

Άσκηση 1.8.1

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = -\frac{y}{3+3x-y}$ σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{3+3x-y} \Rightarrow (y)dx + (3x - y + 3)dy = 0$.

Παρατηρούμε ότι $P(x, y) = y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

και $Q(x, y) = 3x - y + 3 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$

δηλαδή $\partial P / \partial y \neq \partial Q / \partial x$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1-3}{3x-y+3} \neq F(x)$,

ενώ $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y} = F(y)$.

Συνεπώς $R(y) = e^{\int F(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = y^2$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με την $R(y)$, η ΔΕ γίνεται

$$(y)dx + (3x - y + 3)dy = 0 \Rightarrow (y^3)dx + (3xy^2 - y^3 + 3y^2)dy = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $P(x, y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$

και $Q(x, y) = 3xy^2 - y^3 + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2$

δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = y^3$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = y^3 \Rightarrow g(x, y) = xy^3 + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 3y^2 + 3xy^2 - y^3$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 3y^2 + 3xy^2 - y^3 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (xy^3 + \varphi(y)) = 3xy^2 - y^3 + 3y^2 \Rightarrow$$

$$3xy^2 + \varphi'(y) = 3xy^2 - y^3 + 3y^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 - y^3 \Rightarrow \varphi(y) = y^3 - \frac{y^4}{4} + c.$$

$$\text{Άρα } g(x, y) = xy^3 + y^3 - \frac{y^4}{4} + c.$$

Άσκηση 1.8.2

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = \frac{3x^2 y}{x^3 + 2y^2}$ σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 y}{x^3 + 2y^2} \Rightarrow (3x^2 y)dx - (x^3 + 2y^2)dy = 0$.

Παρατηρούμε ότι $P(x, y) = 3x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$

και $Q(x, y) = -x^3 - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2$

δηλαδή $\partial P / \partial y \neq \partial Q / \partial x$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{3x^2 y} (-3x^2 - 3x^2) = -\frac{2}{y} = F(y)$.

Συνεπώς $R(y) = e^{\int F(y) dy} = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = y^{-2}$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με την $R(y)$, η ΔΕ γίνεται

$$\frac{3x^2 y}{y^2} dx - \frac{x^3 + 2y^2}{y^2} dy = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{y} dx - \frac{x^3 + 2y^2}{y^2} dy = 0$$

Παρατηρούμε ότι $P(x, y) = \frac{3x^2}{y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3x^2}{y^2}$

και $Q(x, y) = -\frac{x^3 + 2y^2}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3x^2}{y^2}$

δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{3x^2}{y} \Rightarrow g(x, y) = \frac{x^3}{y} + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -\frac{x^3 + 2y^2}{y^2}$ προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} &= -\frac{x^3 + 2y^2}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3}{y} + \varphi(y) \right) = -\frac{x^3 + 2y^2}{y^2} \Rightarrow \\ &-\frac{x^3}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x^3}{y^2} - 2 \Rightarrow \varphi'(y) = -2 \Rightarrow \varphi(y) = -2y + c. \end{aligned}$$

Άρα $g(x, y) = \frac{x^3}{y} - 2y + c$.

Άσκηση 1.8.3

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y(y^3 + 2x^4)dx + x(x^4 - 2y^3)dy = 0$ σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Παρατηρούμε $P(x, y) = y(y^3 + 2x^4) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3 + 2x^4$

και $Q(x, y) = x(x^4 - 2y^3) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 5x^4 - 2y^3$

δηλαδή $P(x, y) \neq Q(x, y)$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{4y^3 + 2x^4 - 5x^4 + 2y^3}{x(x^4 - 2y^3)} =$
 $= \frac{6y^3 - 3x^4}{x(x^4 - 2y^3)} = \frac{3(2y^3 - x^4)}{x(x^4 - 2y^3)} = -\frac{3}{x} = F(x)$

Συνεπώς $R(x) = e^{\int F(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3}$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με την $R(x)$, η ΔΕ γίνεται

$$\frac{1}{x^3} y(y^3 + 2x^4)dx + \frac{1}{x^3} x(x^4 - 2y^3)dy = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{y^4}{x^3} + 2xy \right) dx + \left(x^2 - \frac{2y^3}{x^2} \right) dy = 0$$

Παρατηρούμε ότι $P(x, y) = \frac{y^4}{x^3} + 2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4y^3}{x^3} + 2x$

και $Q(x, y) = x^2 - \frac{2y^3}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + \frac{4y^3}{x^3}$

δηλαδή $P(x, y) = Q(x, y)$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{y^4}{x^3} + 2xy$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{y^4}{x^3} + 2xy \Rightarrow g(x, y) = \frac{x^{-2}}{-2} y^4 + x^2 y + \varphi(y)$$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x^2 - \frac{2y^3}{x^2}$ προκύπτει

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = x^2 - \frac{2y^3}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^{-2}}{-2} y^4 + x^2 y + \varphi(y) \right) = x^2 - \frac{2y^3}{x^2} \Rightarrow$$
$$-\frac{2y^3}{x^2} + x^2 + \varphi'(y) = x^2 - \frac{2y^3}{x^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c.$$

Άρα $g(x, y) = \frac{x^{-2}}{-2} y^4 + x^2 y + c \Rightarrow g(x, y) = x^2 - \frac{y^4}{2x^2} + c.$

Άσκηση 1.8.4

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' = \frac{y^2 + y}{x}$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 + y}{x} \Rightarrow \\ xdy &= (y^2 + y)dx \Rightarrow \\ (y^2 + y)dx - xdy &= 0 \Rightarrow \\ y^2 dx + ydx - xdy &= 0 \Rightarrow \\ dx + \frac{ydx - xdy}{y^2} &= 0 \Rightarrow \\ dx + d\left(\frac{x}{y}\right) &= 0 \Rightarrow \\ \int dx + \int d\left(\frac{x}{y}\right) &= 0 \Rightarrow \\ x + \frac{x}{y} &= c.\end{aligned}$$