

Άσκηση 1.6.1

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' + \frac{1-x}{2x^2} y^2 - \frac{1}{x} y + \frac{x-1}{2} = 0, \quad x > 0,$$

αν αυτή έχει μία μερική λύση $y_1 = x$.

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Riccati.

Έστω μία λύση της $y_1 = x$.

Θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y = x + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{u^2} u'.$

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{u^2} u' + \frac{1-x}{2x^2} \left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} &= 0 \Rightarrow \\ 1 - \frac{1}{u^2} u' + \frac{1-x}{2x^2} \left(x^2 + 2x \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} &= 0 \Rightarrow \\ 1 - \frac{1}{u^2} u' + \frac{1-x}{2x^2} x^2 + 2 \frac{1-x}{2x^2} x \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2} \frac{1}{u^2} - 1 \frac{1}{xu} + \frac{x-1}{2} &= 0 \Rightarrow \\ \cancel{1} - \frac{1}{u^2} u' + \cancel{\frac{1-x}{2x^2} x^2} + 2 \frac{1-x}{2x^2} x \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2} \frac{1}{u^2} - \cancel{1} \frac{1}{xu} + \cancel{\frac{x-1}{2}} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{u^2} u' + 2 \frac{1-x}{2x^2} x \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{xu} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{u^2} u' + \frac{1-x}{x} \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2} \frac{1}{u^2} - \frac{1}{xu} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{u^2} u' - \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2} \frac{1}{u^2} &= 0 \Rightarrow \\ u' + u &= \frac{1-x}{2x^2} \end{aligned}$$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς $u(x) = \frac{cxe^{-x} - 1}{2x}$ και τελικά

$$y(x) = x + \frac{2x}{ce^{-x} - 1} = \frac{cxe^{-x} - x + 2x}{cxe^{-x} - 1} = \frac{cxe^{-x} + x}{cxe^{-x} - 1} = \frac{x(c + xe^x)}{cx - e^x}.$$

Άσκηση 1.6.2

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1, \quad x > 0.$$

Αν αυτή έχει μία μερική λύση $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $y' - y^2 - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2} = 0$,

συνεπώς είναι τύπου Riccati.

Έστω μία λύση της $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u'$.

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{u^2}u' - \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x^2} &= 0 \Rightarrow \\ y_1' - \frac{1}{u^2}u' - y_1^2 - 2y_1\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}y_1 - \frac{1}{xu} - \frac{1}{x^2} &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{u^2}u' - 2y_1\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{xu} &= 0 \Rightarrow -\frac{1}{u^2}u' + 2\frac{1}{xu} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{xu} = 0 \Rightarrow \\ -\frac{1}{u^2}u' + \frac{1}{xu} - \frac{1}{u^2} &= 0 \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u + 1 = 0 \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -1 \Rightarrow \end{aligned}$$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική. Συνεπώς

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} \left[c + \int (-1)e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} dx \right] \Rightarrow \\ &= e^{\ln x} \left[c + \int (-1)e^{-\ln x} dx \right] \Rightarrow \\ &= x \left[c + \int (-1)x^{-1} dx \right] \Rightarrow \\ &= x[c - \ln x]. \end{aligned}$$

Άρα

$$y = y_1 + \frac{1}{u} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x[c - \ln x]} = \frac{1 - c + \ln x}{x[c - \ln x]}.$$