Δ.2.1._Γραμμικές_Διαφορικές_Εξισώσεις_ανώτερης_τάξης

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' = 0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι ομογενής γραμμική ΔΕ $3^{\eta\varsigma}$ τάξης. Άρα το σύνολο των λύσεων της είναι διαν. χώρος διάστασης 3.

Έχουμε $y''' = 0 \Rightarrow y'' = c \Rightarrow y' = cx + c_2$

$$\Rightarrow y = c\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3, \quad c, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

οι λύσεις $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, επομένως αποτελούν μια βάση του δ.χ. των λύσεων αυτής της ΔΕ. Άρα η γενική της λύση είναι

$$y(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Απ. Πρόκειται για ομογενή γραμμική ΔΕ $2^{ης}$ τάξης. Οπότε το σύνολο λύσεων της είναι δ.χ. διάστασης 2. Δοκιμάζουμε ως λύση την $y = e^{ax}$

Τότε $y' = ae^{ax}$

και $y'' = a^2 e^{ax}$.

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$a^2 e^{ax} - 3a e^{ax} + 2 e^{ax} = 0 \Rightarrow (a^2 - 3a + 2) e^{ax} = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = 1, \ a_2 = 2.$$

Συνεπώς βρήκαμε τις λύσεις $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$.

Επειδή

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0$$

οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Άρα η γενική της ΔΕ είναι

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \ \square$$

Ασκ Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

Απ. Πρόκειται για ομογενή γραμμική ΔΕ $2^{ης}$ τάξης.
Οπότε το σύνολο λύσεων της ΔΕ είναι δ.χ. διάστασης 2.
Δοκιμάζουμε ως λύση την $y = x^{\alpha}$.
Τότε $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ και $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.
Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + x\alpha x^{\alpha-1} - x^{\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$[\alpha(\alpha-1)+\alpha-1]x^{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha-1)+\alpha-1 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \cancel{-\alpha} \cancel{+\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1.$$

Συνεπώς βρήκαμε τις λύσεις $y_1 = x$, $y_2 = x^{-1}$.

Επειδή

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -x^{-1} - x^{-1} = -2x^{-1} \neq 0.$$

οι λύσεις y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

* Υποβιβασμός της τάξης

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2(x+1)y'' - 2xy' + 2y = x^3, \quad x > -1. \qquad (1)$$

γνωρίζοντας ότι η $y_1 = x$ είναι λύση της.

Απ. Θέτουμε $y = y_1 \cdot z \Rightarrow \boxed{y = xz} \Rightarrow \boxed{y' = z + xz'} \Rightarrow \boxed{y'' = 2z' + xz''}$.

Οπότε η ΔΕ (1) παίρνει τη μορφή

$$x^2(x+1)(2z' + xz'') - 2x(z + xz') + 2xz = x^3 \Rightarrow$$

$$\underline{2x^3z'} + \cancel{2x^2z'} + \underline{x^4z''} + \underline{x^3z''} - \cancel{2xz} - \cancel{2x^2z'} + \cancel{2xz} = x^3 \Rightarrow$$

$$(x^4 + x^3)z'' + 2x^3z' = x^3 \qquad (2)$$

Θέτουμε

$$u = z'. \qquad (3)$$

Οπότε η ΔΕ (2) παίρνει τη μορφή

$$(x^4+x^3)u'+2x^3u=x^3 \Rightarrow u'+\frac{2x^3}{x^3(x+1)}u=\frac{x^3}{x^3(x+1)} \Rightarrow u'+\underbrace{\frac{2}{x+1}}_{p(x)}u=\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{q(x)}$$

η οποία είναι γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης. Συνεπώς

$$u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]=e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int\frac{1}{x+1}e^{\int\frac{2}{x+1}dx}dx\right]=$$

$$=e^{-2\ln(x+1)}\left[\int\frac{1}{x+1}e^{2\ln(x+1)}dx\right]=e^{\ln(x+1)^{-2}}\left[\int\frac{1}{x+1}e^{\ln(x+1)^2}dx\right]=$$

$$=(x+1)^{-2}\left[\int\frac{1}{x+1}(x+1)^2dx\right]=\frac{1}{(x+1)^2}\int(x+1)dx=\frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{(x+1)^2}{2}+c\right]=\frac{1}{2}+\frac{c}{(x+1)^2}.$$

Οπότε, λόγω της (3),

$$z'=u=\frac{1}{2}+c(x+1)^{-2} \Rightarrow z=\frac{x}{2}+c\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c_2 \Rightarrow z=\frac{x}{2}+c_1\frac{1}{x+1}+c_2.$$

Άρα

$$y=xz \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+c_1\frac{x}{x+1}+c_2x, \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + y = 0$$

γνωρίζοντας ότι η $y = e^{-x}$ είναι λύση της.

Απ. Θέτουμε $y = ze^{-x} \Rightarrow y' = z'e^{-x} - ze^{-x} \Rightarrow$

$$y'' = z''e^{-x} - z'e^{-x} - z'e^{-x} + ze^{-x} = z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}$$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$(z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x}) + 2(z'e^{-x} - ze^{-x}) + ze^{-x} = 0 \Rightarrow$$

$$z''e^{-x} - 2z'e^{-x} + ze^{-x} + 2z'e^{-x} - 2ze^{-x} + ze^{-x} = 0 \Rightarrow$$

$$z''e^{-x} = 0 \Rightarrow z'' = 0 \Rightarrow z' = c_1 \Rightarrow z = c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι $y = ze^{-x} \Rightarrow y = (c_1 x + c_2)e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Δ.2.2 Ομογενείς γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - y' = 2y.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y'' - y' - 2y = 0$$

δηλ. είναι ομογενής γραμμική ΔΕ $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.
Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 - \omega - 2 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 2$.
Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

<u>Ασκ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

<u>Απ</u>. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^2 + 2\omega + 5 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_{1,2} = -1 \pm 2i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\omega^2 + 2\omega + 1 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = \omega_2 = -1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = (c_1 + c_2 x) \cdot e^{-x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - y = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^2 - 1 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

<u>Ασκ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

<u>Απ.</u> Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^2 - 4\omega + 5 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = 2 \pm i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

Ασκ Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y''+6y'+9y=0,$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=2.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^2+6\omega+9=0,$$

η οποία έχει ρίζες

$$\omega_1=\omega_2=-3.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y=(c_1+c_2x)e^{-3x}.$$

Επειδή $y(0)=0$, έχουμε

$$0=(c_1+c_2\cdot 0)\cdot e^{-3\cdot 0}\Rightarrow c_1=0.$$

Επίσης $y'(0)=2$, οπότε

$$y'=c_2e^{-3x}-3c_2xe^{-3x}\Rightarrow$$

$$2=c_2e^0-3\cdot c_2\cdot 0\cdot e^0\Rightarrow c_2=2.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση του ΠΑΤ είναι

$$y=2xe^{-3x}.$$

□

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^2 + 9 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = \pm 3i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Επειδή $y(0) = 0$, έχουμε

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

Επίσης $y'(0) = 1$. Οπότε

$$y' = 3 c_2 \cos 3x \Rightarrow$$

$$1 = 3 \cdot c_2 \cos 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση του ΠΑΤ είναι

$$y = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

□

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - y'' = y' - y$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^3 - \omega^2 - \omega + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^3 - \omega - \omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \omega(\omega^2 - 1) - (\omega^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$(\omega^2 - 1)(\omega - 1) = 0 \Rightarrow (\omega + 1)(\omega - 1)^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = -1, \omega_{2,3} = 1.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 x e^{x},$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^3 - 4\omega^2 + 9\omega - 10 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_1 = 2$, $\omega_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \cos 2x + c_3 e^{x} \sin 2x \Rightarrow$$

$$y = c_1 e^{2x} + e^{x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x),$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$(\omega - 1)^3 = 0,$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_{1,2,3} = 1$.

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x \Rightarrow$$

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cdot e^x,$$

όπου $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι

$$\omega^4 + 2\omega^2 + 1 = 0$$

$$(\omega^2 + 1)^2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_{1,2} = \omega_{3,4} = \pm i$

Άρα

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x \Rightarrow$$

$$y = (c_1 + c_3 x) \cdot \cos x + (c_2 + c_4 x) \cdot \sin x ,$$

όπου $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

$\square$

Δ.2.3_Μη_ομογενείς_γραμμικές_ΔΕ_με_σταθερούς_συντελεστές

* Μέθοδος προσδιορισμού των σταθερών

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + y' - 2y = e^{3x}.$$

Απ. Η γενική λύση της ΔΕ είναι της μορφής

$$y = y_{ομ} + y_{μ}$$

όπου $y_{ομ}$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της είναι

$$\omega^2 + \omega - 2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις

$$\omega_1 = -2 \quad \text{και} \quad \omega_2 = 1.$$

Συνεπώς

$$y_{o\mu} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 2° μέλος της ΔΕ είναι της μορφής $P_n(x)e^{kx}$ με $n=0$, $k=3$ και το 3 <u>δεν</u> είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = ae^{3x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Τότε έχουμε

$$y_\mu' = 3ae^{3x},$$

$$y_\mu'' = 9ae^{3x}.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ προκύπτει

$$9ae^{3x} + 3ae^{3x} - 2ae^{3x} = e^{3x} \Rightarrow$$

$$9a + 3a - 2a = 1 \Rightarrow 10a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10}.$$

Άρα

$$y_\mu = \frac{1}{10}e^{3x}$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ θα είναι

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} + \frac{1}{10}e^{3x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\square$

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}.$$

Απ. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις

$$\omega_1 = 1 \text{ και } \omega_2 = 2$$

Συνεπώς

$$y_{ομ} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.3.δ

Το 2ο μέλος της ΔΕ είναι της μορφής $P_n(x)e^{kx}$, με $n=1$, $k=2$ και το 2 και το 2 είναι ρίζα (πολλαπλότητας $\rho=1$) της χαρακτηριστικής εξίσ., οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = x(ax+\beta)e^{2x}, \quad a,\beta\in\mathbb{R}$$

ή

$$y_\mu=(ax^2+\beta x)e^{2x}.$$

Τότε έχουμε

$$y' = (2ax+\beta)e^{2x} + (ax^2+\beta x)\cdot 2e^{2x} = [2ax^2+2(a+\beta)x+\beta]\cdot e^{2x},$$

$$y'' = [4ax+2(a+\beta)]e^{2x} + [2ax^2+2(a+\beta)x+\beta]2e^{2x} = [4ax^2+4(2a+\beta)x+2a+4\beta]e^{2x}.$$

Άρα

$$[4ax^2+4(2a+\beta)x+2a+4\beta]e^{2x} + [-6ax^2-6(a+\beta)x-3\beta]e^{2x} + 2(ax^2+\beta x)e^{2x} = xe^{2x} \Rightarrow$$

$$\cancel{4ax^2}+8ax+\cancel{4\beta x}+2a+4\beta \cancel{-6ax^2}-6ax\cancel{-6\beta x}-3\beta+\cancel{2ax^2}+\cancel{2\beta x} = x \Rightarrow$$

$$2ax+2a+\beta = x \Rightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2a+\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ \beta=-1 \end{cases}.$$

Άρα

$$y_\mu = \left(\tfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}$$

και

$$y = y_{o\mu}+y_\mu = c_1e^{x}+c_2e^{2x}+\left(\tfrac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}. \quad \square$$

<u>Ασκ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 4y' + 5y = e^{-x}.$$

<u>Απ</u> Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ $y'' - 4y' + 5y = 0$, έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\omega^2 - 4\omega + 5 = 0$, η οποία έχει ρίζες $\omega_{1,2} = 2 \pm i$.

Συνεπώς $y_{ομ} = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 2° μέλος της ΔΕ είναι της μορφής $P_n(x)e^{kx}$ με $n=0$, $k=-1$ και το -1 <u>δεν</u> είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσ.. Οπότε ζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = a e^{-x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

2.3. στ

Υπολογίζουμε

$$y_\mu' = -\alpha e^{-x},$$

$$y_\mu'' = \alpha e^{-x}.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ προκύπτει

$$\alpha e^{-x} + 4\alpha e^{-x} + 5\alpha e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow$$

$$10\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10}.$$

Άρα

$$y_\mu = \frac{1}{10} e^{-x}$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ θα είναι

$$y = y_{o\mu} + y_\mu =$$

$$= e^{2x}(c_1\cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{10}e^{-x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

Άσκ. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - 4y' + 4y = e^x,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

Απ Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 4 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\omega_1 = \omega_2 = 2.$$

Συνεπώς

$$y_{o\mu} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Το 2^o μέλος της ΔΕ (το e^x) είναι της μορφής $P_n(x) \cdot e^{kx}$ με $n=0$, $k=1$ και το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε

$$y_\mu = a e^x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Υπολογίζουμε

$$y_\mu' = a e^x,$$

$$y_\mu'' = a e^x.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ προκύπτει

$$ae^x - \cancel{4ae^x} + \cancel{4ae^x} = e^x \Rightarrow$$

$$ae^x = e^x \Rightarrow a=1.$$

Άρα

$$y_\mu = e^x$$

και επομένως

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^x.$$

Επειδή $y(0)=0$

$$0 = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^0 + e^0 \Rightarrow$$

$$0 = c_1 + 1 \Rightarrow$$

$$c_1 = -1.$$

Υπολογίζουμε

$$y' = c_2 e^{2x} + (-1 + c_2 x)2e^{2x} + e^x \Rightarrow$$

$$y' = (-2 + c_2 + 2c_2 x)e^{2x} + e^x$$

Επειδή $y'(0)=2$, έχουμε

$$2 = (-2 + c_2 + 2c_2 \cdot 0)e^0 + e^0 \Rightarrow$$

$$2 = -2 + c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = 3.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση που ικανοποιεί τις δοθείσες συνθήκες είναι

$$y = (-1 + 3x)e^{2x} + e^x.$$

□

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - 4y' + 5y = \sin 3x$$

Απ. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 5 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\omega_{1,2} = 2 \pm i.$$

Συνεπώς

$$y_{o\mu} = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Το 2° μέλος της ΔΕ ($\sin 3x$) είναι της μορφής

$$e^{kx}(P_{n_1} \cos mx + P_{n_2} \sin mx)$$

με $n = 0$, $k = 0$, $m = 3$

και το $k \pm im = \pm 3i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσ.

Οπότε

$$y_\mu = \alpha \sin 3x + \beta \cos 3x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε

$$y_\mu' = 3a\cos 3x - 3b\sin 3x,$$

$$y_\mu'' = -9a\sin 3x - 9b\cos 3x.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ προκύπτει

$$-9a\sin 3x - 9b\cos 3x - 12a\cos 3x + 12b\sin 3x + 5a\sin 3x + 5b\cos 3x = \sin 3x$$

$$(-4a+12b)\sin 3x + (-12a-4b)\cos 3x = \sin 3x \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -4a+12b &= 1 \\ -12a-4b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -4a+12b &= 1 \\ -36a-12b &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -1/40, \\ b &= 3/40. \end{aligned}$$

Άρα

$$y_\mu = -\frac{1}{40}\sin 3x + \frac{3}{40}\cos 3x$$

και επομένως

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x) - \frac{1}{40}\sin 3x + \frac{3}{40}\cos 3x. \quad \square$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + y = x\cos x.$$

Απ. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' + y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 + 1 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\omega_{1,2} = \pm i.$$

Συνεπώς

$$y_{ομ} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 2° μέλος της ΔΕ $(x\cos x)$ είναι της μορφής

$$e^{kx}\left(P_{n_1}(x)\cos mx + P_{n_2}(x)\sin mx\right)$$

με $n_1 = 1$, $k = 0$, $m = 1$ και το $k + mi = i$ <u>είναι</u> ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε

$$y_\mu = x(\alpha + \beta x)\cos x + x(\gamma + \delta x)\sin x$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Υπολογίζουμε την 1η και 2η παράγωγο:

$$y_\mu' = [\delta x^2 + (2\beta+\gamma)x + \alpha]\cos x + [-\beta x^2 + (2\delta-\alpha)x + \gamma]\sin x,$$

$$y_\mu'' = [-\beta x^2 + (4\delta-\alpha)x + 2(\beta+\gamma)]\cos x + [-\delta x^2 + (-4\beta-\gamma)x + 2(\delta-\alpha)]\sin x.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ προκύπτει (μετά από πράξεις)

$$2(\beta+\gamma)\cos x + 2(\delta-\alpha)\sin x - 4\beta x\sin x + 4\delta x\cos x = x\cos x \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 2(\beta+\gamma) &= 0 \\ 2(\delta-\alpha) &= 0 \\ -4\beta &= 0 \\ 4\delta &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \beta+\gamma &= 0 \\ \alpha-\delta &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \delta &= 1/4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha &= \tfrac{1}{4} \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Άρα $$y_\mu = \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x$$

και επομένως

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{4}x^2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x. \qquad \square$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση: Αν το δεύτερο μέλος της ΔΕ είναι άθροισμα όρων της μορφής

$$e^{kx}\left(P_{n_1}(x)\cos mx + P_{n_2}(x)\sin mx\right),$$

τότε ζητάμε λύση αθροίσματος των αντίστοιχων μερικών λύσεων.

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 9y = e^{x} - 1.$$

Απ. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' + 9y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 + 9 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι

$$\omega_{1,2} = \pm 3i.$$

Συνεπώς

$$y_{o\mu} = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x.$$

Το 2^{o} μέλος της ΔΕ $(e^{x}-1)$ είναι άθροισμα όρων

$$e^{kx}\left(P_{n_1}(x)\cos mx + P_{n_2}(x)\sin mx\right),$$

Οπότε ζητούμε λύσεις της μορφής

$$y_\mu = ae^x + \beta, \quad a, \beta \in \mathbb{R}.$$

Υπολογίζουμε

$$y_\mu' = ae^x,$$

$$y_\mu'' = ae^x.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ, προκύπτει

$$ae^x + 9(ae^x + \beta) = e^x - 1 \Rightarrow$$

$$10ae^x + 9\beta = e^x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10a = 1 \\ 9\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10}, \\ \beta = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Άρα

$$y_\mu = \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{9}$$

και επομένως

$$y = y_{o\mu} + y_\mu$$

$$= c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{10}e^x - \frac{1}{9}.$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$\square$

* Μέθοδος μεταβολής των σταθερών

Παραδ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + y = \tan x.$$

Απ. Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ είναι

$$\omega^2 + 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\omega_{1,2} = \pm i$.

Συνεπώς

$$y_{ομ} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

όπου οι $y_1(x) = \cos x$ και $y_2(x) = \sin x$ είναι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ.

Ζητούμε μερική λύση y_μ της μορφής $y_\mu = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$

$\Rightarrow \quad y_\mu = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$

όπου οι c_1 και c_2 προσδιορίζονται από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} c_1'\cos x + c_2'\sin x &= 0 \quad (i) \\ -c_1'\sin x + c_2'\cos x &= \tan x \quad (ii) \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} c_1'\sin x\cdot\cos x + c_2'\sin^2 x &= 0 \\ -c_1'\cos x\sin x + c_2'\cos^2 x &= \cos x\tan x \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$c_2'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x\tan x \Rightarrow c_2' = \cancel{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \Rightarrow c_2' = \sin x \Rightarrow c_2 = -\cos x.$$

$$(i) \rightsquigarrow c_1'\cos x = -c_2'\sin x \Rightarrow c_1'\cos x = -\sin^2 x \Rightarrow c_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$c_1 = -\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = -\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int\cos x\,dx - \int\frac{1}{\cos x}dx = \sin x - \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right).$$

Οπότε $y_\mu = c_1(x)\cdot\cos x + c_2(x)\sin x = \cancel{\sin x\cos x} - \cos x\ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) - \cancel{\cos x\sin x}$

Άρα $y = y_{o\mu} + y_\mu = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x\ln\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right).$ $\square$

<u>Παραδ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

αν γνωρίζουμε δύο λύσεις $y_1(x) = x$ και $y_2(x) = x^2$.

της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ.

<u>Απ.</u> Επειδή $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0.$

Ζητούμε μερική λύση y_μ της μορφής

$$y_\mu = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \Rightarrow$$

$$y_\mu = c_1(x)\, x + c_2(x)\, x^2$$

όπου οι c_1 και c_2 προσδιορίζονται απ' την επίλυση του συστήματος

2.3.ρ

$$\left.\begin{aligned} c_1' x + c_2' x^2 &= 0 \\ c_1' + c_2' 2x &= \frac{\ln x}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \frac{\ln x}{x} & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{-x\ln x}{2x^2 - x^2} = \frac{-x\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \frac{\ln x}{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \frac{\ln x - 0}{2x^2 - x^2} = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Ολοκληρώνοντας την $1^η$ σχέση

$$c_1' = -\frac{\ln x}{x} \Rightarrow c_1(x) = -\int \frac{\ln x}{x}\,dx = -\int \ln x (\ln x)'\,dx = -\frac{(\ln x)^2}{2}.$$

Ολοκληρώνοντας τη $2^η$ σχέση

$$c_2' = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\int \ln x \left(\frac{1}{x}\right)'dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1+\ln x}{x}.$$

Άρα $y = c_1 x + c_2 x^2 - \frac{(\ln x)^2}{2} x - \frac{1+\ln x}{\cancel{x}} x^{\cancel{2}}$. $\square$