Δ.1.1_ Διαφορικές_Εξισώσεις_α΄_τάξης

Παραδ. Να βρεθεί η μερική λύση της ΔΕ

$$y' = 2x,$$

με αρχική συνθήκη $y(1) = 4$.

Απ Έχουμε

$$y' = 2x \Rightarrow \int y'\,dx = \int 2x\,dx \Rightarrow \underbrace{y(x) = x^2 + c}_{\text{γενική λύση}}.$$

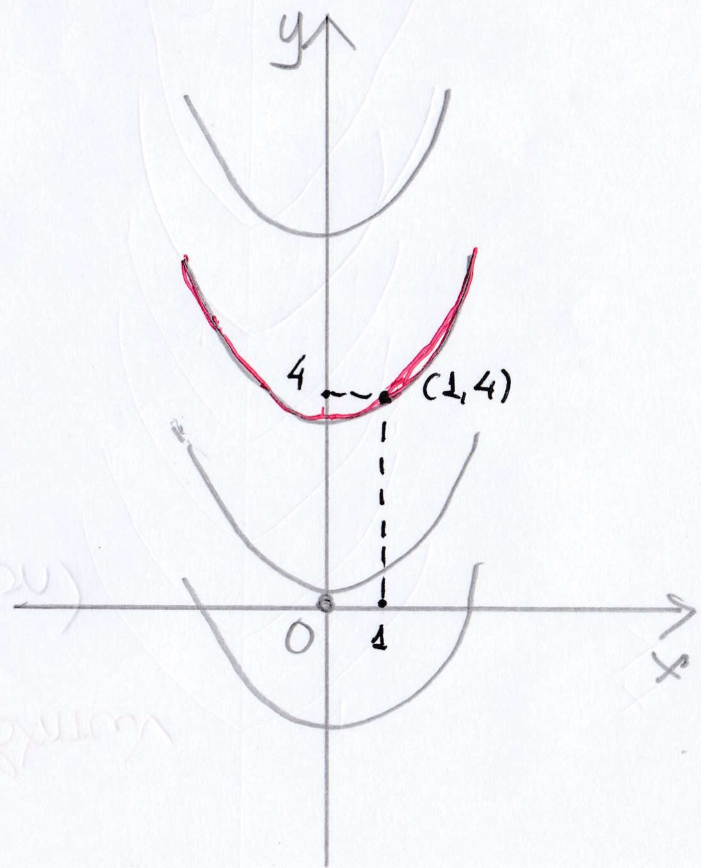
Όμως $y(1) = 4$. Οπότε

$$4 = 1^2 + c \Rightarrow c = 3.$$

Άρα

$$\underbrace{y(x) = x^2 + 3}_{\text{μερική λύση}}.$$

$\square$



Δ.1.2 _ Διαφορικές _ Εξισώσεις _ χωριζομένων _ μεταβλητών

Παραδ. Να λυθεί η ΔΕ (Διαφορική Εξίσωση)

$$y' = e^{x-y}.$$

Απ. Έχουμε

$$y' = e^{x-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \Rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx + c$$

$$\Rightarrow e^y = e^x + c \Rightarrow y = \ln(e^x + c).$$

$\square$

<u>Ασκ</u>. Να λυθεί το ΠΑΣΤ (Πρόβλημα Αρχικών - Συνοριακών Τιμών)

$$y' = -2y, \quad y(x) > 0, \quad y(0) = 5.$$

<u>Απ</u>. Η ΔΕ γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = -2y \Rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = -\int 2\, dx + c \Rightarrow \ln y = -2x + c.$$

Επειδή $y(0)=5$, έχουμε

$$\ln 5 = -2 \cdot 0 + c \Rightarrow c = \ln 5.$$

Άρα

$$\ln y = -2x + \ln 5 \Rightarrow \ln y - \ln 5 = -2x \Rightarrow \ln \frac{y}{5} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{5} = e^{-2x} \Rightarrow y(x) = 5e^{-2x}.$$

□

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{x+y-2}-1, \quad y(0)=3. \qquad y>x-2$$

Απ. Θέτοντας $\boxed{z=x+y-2}$

προκύπτει $\frac{dz}{dx}=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}-1=\frac{dy}{dx}}$$

Η ΔΕ γράφεται

$$\frac{dz}{dx}\cancel{-1}=\sqrt{z}\cancel{-1}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\sqrt{z}$$

η οποία είναι διαχωρίσιμη ΔΕ.

Οπότε

$$\int\frac{1}{\sqrt{z}}dz=\int dx+c\Rightarrow\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=x+c\Rightarrow 2\sqrt{z}=x+c.$$

Όμως για $x=0$ έχουμε $y=3$ και

$z=x+y-2=0+3-2=1$. Οπότε

$2\sqrt{1}=0+c\Rightarrow c=2.$

Άρα

$$2\sqrt{z}=x+2\Rightarrow 2\sqrt{x+y-2}=x+2\Rightarrow$$

$$\sqrt{x+y-2}=\frac{x+2}{2}\Rightarrow x+y-2=\left(\frac{x}{2}+1\right)^2\Rightarrow$$

$$\cancel{x}+y-2=\frac{x^2}{4}+\cancel{x}+1\Rightarrow y=\frac{x^2}{4}+3. \qquad \square$$

<u>Άσκ.</u> Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$y' = \frac{\cos x}{\cos y}, \quad y(0) = \frac{\pi}{6}$$

<u>Απ</u> Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\cos y} \Rightarrow \int \cos y \, dy = \int \cos x \, dx + c \Rightarrow \sin y = \sin x + c.$$

Όμως $y(0) = \frac{\pi}{6}$.

Οπότε $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 0 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$.

Άρα $\sin y = \sin x + \frac{1}{2}$. $\square$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$y' = \frac{(x^2+1)(y^2-1)}{xy}, \quad y(x)>1, \quad y(1)=\cancel{0}.$$

Απ. Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(y^2-1)}{xy} \Rightarrow$$

$$\int \frac{y}{y^2-1}\,dy = \int \frac{x^2+1}{x}\,dx + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \int\left(x+\frac{1}{x}\right) + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2-1) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln(y^2-1) = x^2 + 2\ln|x| + 2c \Rightarrow$$

$$\ln(y^2-1) = x^2 + \ln x^2 + c \Rightarrow$$

$$y^2-1 = e^{x^2+\ln x^2+c} \Rightarrow$$

$$y^2-1 = e^{x^2}\cdot e^{\ln x^2}\cdot e^{c} \Rightarrow$$

$$y^2-1 = e^{x^2}\cdot x^2\cdot e^{c}.$$

Όμως $y(1)=\sqrt{2}$. Οπότε

$$y(1)=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}^2-1 = e^1\cdot 1^2\cdot e^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = e^{1-c} \Rightarrow c = -1.$$

Άρα

$$y^2+1 = e^{x^2}x^2e^{-1} \Rightarrow y^2 = x^2e^{x^2-1}+1.$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕ $2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0$.

Απ. Έχουμε

$$2x(y+1)dx + (x^2-1)dy = 0 \Rightarrow \int \frac{1}{y+1}dy = -2\int \frac{x}{x^2-1}dx + c \Rightarrow$$

Για $x \neq \pm 1$ και $y \neq -1$, έχουμε

$$\ln|y+1| = -\ln|x^2-1| + c_1 \Rightarrow |y+1| = |x^2-1|^{-1} e^{c_1} \Rightarrow y+1 = \pm \frac{e^c}{x^2-1}$$

Άρα η

$$y = -1 \pm \frac{e^c}{x^2-1}$$

είναι η γενική λύση της ΔΕ, και η

$$y = -1$$

είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ. $\square$

Ασκ. Να λυθεί η ΔΕ

$$e^x \frac{dy}{dx} = xy^2 .$$

Απ. Έχουμε

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2}{e^x}$. Αν $y \neq 0$, τότε

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int x e^{-x} dx + c \Rightarrow$$

$$-y^{-1} = -\int x (e^{-x})' dx + c \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y} = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx + c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = xe^{-x} - (-e^{-x}) + c$$

$$\frac{1}{y} = xe^{-x} + e^{-x} + c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} = (x+1)e^{-x} + c \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{(x+1)e^{-x} + c}, \quad y \neq 0,$$

η οποία αποτελεί τη γενική λύση της ΔΕ, ενώ η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση της ΔΕ.

$\square$

<u>Ασκ</u>. Να λυθεί η ΔΕ $y' = \left(\frac{x+1}{x^3}\right)y^2$.

<u>Απ</u>. Εχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x+1}{x^3}\right)y^2 \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx + c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$\Rightarrow y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$

Αρα η γενική λύση της ΔΕ είναι η $y^{-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - c$, $y \neq 0$ και η ιδιάζουσα λύση της είναι η $y = 0$. $\square$

Δ.1.3_ Ομογενείς_ Διαφορικές_Εξισώσεις

Παραδ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$$

$x \geq 1$

Απ Είναι $y' = \dfrac{1}{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

δηλ. η ΔΕ είναι ομογενής.

Θέτουμε $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow$

$$y = xz \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

Οπότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\cancel{z} + x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + \cancel{z} \Rightarrow \int z\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx + c \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = \ln x + c \Rightarrow y^2 = 2x^2(\ln x + c) \Rightarrow$$

$y = \pm x\sqrt{2\ln x + 2c}$. Όμως $y(1) = 1$, οπότε η λύση

$y = -x\sqrt{2\ln x + 2c}$ απορρίπτεται. Και επομένως

$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{2c} \Rightarrow 1 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$. Άρα

$$y = x\sqrt{2\ln x + 1}.$$

$\square$

Άσκ Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$(x^2-2y^2)dx + xy\,dy = 0,\ y(1)=0.$

Απ. Έχουμε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2-x^2}{xy} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{\frac{y}{x}}$

δηλ. η ΔΕ είναι ομογενής.

Θέτουμε $\boxed{z=\dfrac{y}{x}} \Rightarrow y = xz \Rightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}}$

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$z + x\cdot\dfrac{dz}{dx} = 2z - \dfrac{1}{z} \Rightarrow x\cdot\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2-1}{z}.$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{z}{z^2-1}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx + c_1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln|z^2-1| = \ln|x| + \ln c$

$\overset{c>0}{\Rightarrow} \dfrac{1}{2}\ln|z^2-1| - \ln|x| = \ln c$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\ln|z^2-1| - \ln|x|^2\right) = \ln c$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{|z^2-1|}{x^2} = \ln c \Rightarrow \ln\sqrt{\dfrac{|z^2-1|}{x^2}} = \ln c$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{|z^2-1|}{x^2}} = c \Rightarrow |z^2-1| = c^2x^2$

$\Rightarrow \left|\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - 1\right| = c^2x^2 \Rightarrow \left|\dfrac{y^2-x^2}{x^2}\right| = c^2x^2$

$\Rightarrow |y^2-x^2| = c^2x^4.$ Όμως $y(1)=0$,

οπότε $|0^2-1^2| = c^2\cdot 1^4 \Rightarrow c = 1.$

Άρα $|y^2-x^2| = x^4.$ $\square$

Δ.1.3.γ

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$.

Απ. Έχουμε

$$f(ax, ay) = \frac{a^3x^3 + a^3y^3}{a x a^2 y^2} = \frac{\cancel{a^3}(x^3+y^3)}{\cancel{a^3} x y^2} = \frac{x^3+y^3}{xy^2} = f(x,y),$$ δηλ. η ΔΕ είναι ομογενής.

Θέτουμε $\boxed{z = \frac{y}{x}} \Rightarrow y = xz \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}}$. Οπότε

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{x^3 + x^3z^3}{x\,x^2z^2} \Rightarrow z + x\frac{dz}{dx} = \frac{\cancel{x^3}(1+z^3)}{\cancel{x^3}z^2} \Rightarrow z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^3}{z^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{z} + x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z^2} + \cancel{z} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \int z^2 dz = \int \frac{1}{x} dx + c \Rightarrow$$

$$\frac{z^3}{3} = \ln|x| + c \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\ln|x| + 3c \Rightarrow y^3 = 3x^3\ln|x| + 3cx^3 \Rightarrow$$

$$y = \sqrt[3]{3x^3\ln|x| + 3cx^3}.$$

□

Παραδ.: Να λυθεί το ΠΑΣΤ $y' = (y-x)^2$, $y(1) = 3$.

Απ. Θέτοντας $z = -x+y$ προκύπτει

$$\frac{dz}{dx} = -1 + \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -1 + (y-x)^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -1 + z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 - 1.$$

Αν $z \neq \pm 1$, δηλ. $y \neq x+1$ και $y \neq x-1$, τότε

$$\frac{dz}{dx} = z^2 - 1 \Rightarrow \int \frac{1}{z^2-1}\, dz = \int dx + c_1 \Rightarrow \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1} \right) dz = \int dx + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \ln|z-1| - \frac{1}{2} \ln|z+1| = x + c_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = x + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2x + 2c_1 \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = e^{2x+2c_1} \Rightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = c_2 e^{2x} \Rightarrow$$

$$\frac{z-1}{z+1} = \pm c_2 e^{2x} \Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = ce^{2x} \Rightarrow z-1 = ce^{2x}(z+1) \Rightarrow$$

$$z-1 = ce^{2x}z + ce^{2x} \Rightarrow z - ce^{2x}z = 1+ce^{2x} \Rightarrow z = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}} \Rightarrow$$

$$y-x = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}} \Rightarrow y = x + \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}.$$ Όμως $y(1)=3$. Οπότε

$$3 = 1 + \frac{1+ce^{2}}{1-ce^{2}} \Rightarrow \frac{1+ce^{2}}{1-ce^{2}} = 2 \Rightarrow 1+ce^{2} = 2-2ce^{2} \Rightarrow 3ce^{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}e^{-2}.$$

Άρα

$$y = x + \frac{1+\frac{1}{3}e^{-2}\cdot e^{2x}}{1-\frac{1}{3}e^{-2}e^{2x}} \Rightarrow y = x + \frac{1+\frac{1}{3}e^{2(x-1)}}{1-\frac{1}{3}e^{2(x-1)}}.$$

$\square$

Ασκ Να λυθεί το ΠΑΣΤ $(2x-6y+3)dx-(x-3y+1)dy=0,\ y(0)=0.$

Απ Η ΔΕ γράφεται

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-6y+3}{x-3y+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2(x-3y)+3}{x-3y+1}.$$

Θέτουμε $\boxed{z=x-3y} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=1-3\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)}.$

Οπότε η ΔΕ γράφεται πλέον ως εξής:

$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{dz}{dx}\right)=\frac{2z+3}{z+1} \Rightarrow 1-\frac{dz}{dx}=3\,\frac{2z+3}{z+1} \Rightarrow -\frac{dz}{dx}=-1+\frac{6z+9}{z+1} \Rightarrow$$

$$-\frac{dz}{dx}=\frac{6z+9-z-1}{z+1} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{5z+8}{z+1} \Rightarrow \int\frac{z+1}{5z+8}\,dz=-\int dx+c \quad (1)$$

Όμως

$$\frac{z+1}{5z+8}=\frac{1}{5}\,\frac{5z+5}{5z+8}=\frac{1}{5}\,\frac{5z+8-3}{5z+8}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\,\frac{1}{5z+8}.$$

Οπότε η ΔΕ (1) παίρνει τη μορφή

$$\int\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\,\frac{1}{5z+8}\right)dz=-\int dx+c \Rightarrow \frac{1}{5}z-\frac{3}{5}\,\frac{1}{5}\ln|5z+8|=-x+c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{5}(x-3y)-\frac{3}{25}\ln|5(x-3y)+8|=-x+c \Rightarrow 5(x-3y)-3\ln|5(x-3y)+8|+25x=c_1$$

Όμως $y(1)=0$. Συνεπώς $5(1-0)-3\ln|5(1-0)+8|+25=c_1 \Rightarrow c_1=30-3\ln 13$

Άρα, η ζητούμενη λύση, σε πεπλεγμένη μορφή, είναι

$$5(x-3y)-3\ln|5(x-3y)+8|+25x=30-3\ln 13.$$

$\square$

Ασκ Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

[1.3.26]

$$y' = \frac{2y - x + 5}{-2y + x - 4}.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{-2y + x - 4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 5}{-(2y - x) - 4}.$$

Θέτουμε

$$\boxed{z = 2y - x} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + z) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{dz}{dx}\right)}$$

Οπότε η ΔΕ γίνεται

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{dz}{dx}\right)=\frac{z+5}{-z-4} \Rightarrow 1+\frac{dz}{dx}=\frac{2z+10}{-z-4} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-\left(\frac{2z+10}{z+4}+1\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{3z+14}{z+4} \Rightarrow \int\frac{z+4}{3z+14}dz=-\int dx+c \Rightarrow \frac{1}{3}\int\frac{3z+12}{3z+14}dz=-\int dx+c$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{3z+14-2}{3z+14}dz=-\int dx+c \Rightarrow \frac{1}{3}\int\left(1-\frac{2}{3z+14}\right)dz=-\int dx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}\frac{1}{3}\ln|3z+14|=-x+c \Rightarrow \frac{1}{3}(2y-x)-\frac{2}{9}\ln|3(2y-x)+14|=-x+c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}(2y-x)-\frac{2}{9}\ln|6y-3x+14|=-x+c.$$

$\square$

Δ.1.4_Γραμμικές_Διαφορικές_Εξισώσεις_1ης_τάξης

<u>Παραδ.</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $xy' + 2y = x^2$, $x \neq 0$.

<u>Απ</u>. Η ΔΕ γράφεται

$$y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x}_{q(x)},$$

Άρα

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c + \int x \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right] =$$

$$= e^{-2\ln|x|}\left(c + \int x e^{2\ln|x|} dx\right) =$$

$$= e^{-\ln x^2}\left(c + \int x e^{\ln x^2} dx\right) =$$

$$= x^{-2}\left(c + \int x x^2 dx\right) = x^{-2}\left(c + \int x^3 dx\right)$$

$$= x^{-2}\left(c + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{c}{x^2}. \quad \square$$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ $y' = x + xy$, $y(0) = 1$.

[1.4.1]

Απ. Η ΔΕ γράφεται $y' - xy = x$. Συνεπώς

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$= e^{-\int(-x)dx}\left[c + \int x\cdot e^{-\int x dx}dx\right]$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(c + \int x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)$$

$$= ce^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}}(-1)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= ce^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Όμως $y(0) = 1$. Οπότε $1 = ce^0 - 1 \Rightarrow c = 2$.

Άρα $y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1$. $\square$

<u>Ασκ</u> Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = 3y + 4$.

<u>Απ</u> Η ΔΕ γράφεται $y' - 3y = 4$, δηλ. είναι γραμμική 1ης τάξης. Άρα

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

$$= e^{-\int(-3)dx}\left[c + \int 4 \cdot e^{\int(-3)dx} dx\right]$$

$$= e^{3x}\left[c + \int 4 e^{-3x} dx\right]$$

$$= e^{3x}\left[c - \frac{4}{3} e^{-3x}\right]$$

$$= ce^{3x} - \frac{4}{3}. \qquad \square$$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = 2y + e^{3x}$.

[1.4.2]

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y' - 2y = e^{3x}.$$

Άρα

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right]$$

$$= e^{-\int(-2)dx}\left[c + \int e^{3x}\cdot e^{\int(-2)dx}dx\right]$$

$$= e^{2x}\left[c + \int e^{3x}\cdot e^{-2x}dx\right]$$

$$= e^{2x}\left[c + \int e^{x}dx\right]$$

$$= e^{2x}\cdot\left[c + e^{x}\right]$$

$$= ce^{2x} + e^{3x}.$$

□

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(x+1)y' = 2y + (x+1)^4, \quad x > -1.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

Άρα

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[c + \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx\right]$$

$$= e^{-\int \frac{-2}{x+1}dx}\left[c + \int (x+1)^3 e^{\int \frac{-2}{x+1}dx} dx\right]$$

$$= e^{2\ln(x+1)}\left[c + \int (x+1)^3 e^{-2\ln(x+1)} dx\right]$$

$$= e^{\ln(x+1)^2}\left[c + \int (x+1)^3 e^{\ln(x+1)^{-2}} dx\right]$$

$$= (x+1)^2 \cdot \left[c + \int (x+1)^3 (x+1)^{-2} dx\right]$$

$$= (x+1)^2\left[c + \int (x+1) dx\right]$$

$$= (x+1)^2\left[c + \frac{(x+1)^2}{2}\right]$$

$$= \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2.$$

$\square$

<u>Ασκ</u>. Να λυθεί το ΠΑΣΤ $y=2e^{\frac{x^2}{2}}-1$,

$$y'(x^2+1)-4xy=x,\quad y(0)=1.$$

<u>Απ</u> Η ΔΕ γράφεται $y'-\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1}$. Άρα

$$y(x)=e^{-\int\frac{-4x}{x^2+1}dx}\left[c+\int\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{\int\frac{-4x}{x^2+1}dx}\right]=$$

$$=e^{2\ln(x^2+1)}\left[c+\int\frac{x}{x^2+1}e^{-2\ln(x^2+1)}dx\right]=e^{\ln(x^2+1)^2}\left[c+\int\frac{x}{x^2+1}e^{\ln(x^2+1)^{-2}}dx\right]$$

$$=(x^2+1)^2\left[c+\int\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}dx\right]=(x^2+1)^2\left[c+\int\frac{x}{(x^2+1)^3}dx\right]$$

$$=(x^2+1)^2\left[c+\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-2}}{-2}\right]=(x^2+1)^2\left[c-\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)^2}\right]=c(x^2+1)^2-\frac{1}{4}.$$

Όμως $y(0)=1$, οπότε $1=c(0+1)^2-\frac{1}{4}\Rightarrow c=\frac{5}{4}$. Άρα $y(x)=\frac{5}{4}(x^2+1)^2-\frac{1}{4}$. □

Δ.1.5_Διαφορικές_Εξισώσεις_Bernoulli

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

[1.5.5]

$$y' - \frac{1}{3x} y = \frac{1}{3} x y^{-1}, \quad x>0, \ y>0.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-(-1)} = y$.

προκύπτει $$yy' - \frac{1}{3x} y^2 = \frac{1}{3} x.$$

Θέτουμε $$u = y^{1-(-1)} \Rightarrow \boxed{u = y^2} \Rightarrow u' = 2yy' \Rightarrow \boxed{yy' = \frac{1}{2} u'}.$$

Οπότε $$\frac{1}{2} u' - \frac{1}{3x} u = \frac{1}{3} x \Rightarrow u' - \frac{2}{3x} u = \frac{2}{3} x.$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης.

Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int\left(-\frac{2}{3x}\right)dx}\left[c + \int \frac{2}{3} x e^{\int\left(-\frac{2}{3x}\right)dx} dx\right]$$

$$= e^{\frac{2}{3}\ln x}\left[c + \int \frac{2}{3} x e^{-\frac{2}{3}\ln x} dx\right]$$

$$= x^{\frac{2}{3}}\left[c + \int \frac{2}{3} x x^{-\frac{2}{3}} dx\right] = x^{\frac{2}{3}}\left[c + \int \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} dx\right]$$

$$= x^{\frac{2}{3}}\left[c + \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} x^{\frac{4}{3}}\right] = x^{\frac{2}{3}}\left[c + \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}}\right].$$

Άρα

$$u(x) = [y(x)]^2 \Rightarrow y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y(x) = x^{\frac{1}{3}}\left[c + \frac{1}{2} x^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

[1.5.1] $$y' = \frac{3}{x}y + x^4\sqrt[3]{y}, \quad x>0, \quad y>0.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{\frac{1}{3}}$$

οπότε είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-\frac{1}{3}}$

προκύπτει $$y^{-\frac{1}{3}}y' - \frac{3}{x}yy^{-\frac{1}{3}} = x^4$$

Θέτουμε $$u(x) = y^{1-n} \Rightarrow u = y^{1+(-\frac{1}{3})} \Rightarrow \boxed{u = y^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \boxed{u' = \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'}$$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$\frac{3}{2}u' - \frac{3}{x}u = x^4 \Rightarrow u' - \frac{2}{x}u = \frac{2}{3}x^4.$$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική ΔΕ $1^{η}$ τάξης. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}\left[c + \int \frac{2}{3}x^4 e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} dx\right]$$

$$= e^{2\ln x}\left[c + \int \frac{2}{3}x^4 e^{-2\ln x} dx\right] = x^2\left[c + \int \frac{2}{3}x^4 x^{-2} dx\right]$$

$$= x^2\left[c + \int \frac{2}{3}x^2 dx\right] = x^2\left[c + \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\right] = x^2\left[c + \frac{2}{9}x^3\right] = cx^2 + \frac{2}{9}x^5.$$

Άρα

$$u(x) = [y(x)]^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y(x) = [u(x)]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y(x) = \left[cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right]^{\frac{3}{2}}.$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

[1.5.2]

$$y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-2}$,

προκύπτει $\quad y^{-2}y' - y^{-2}y = x.$

Θέτουμε $\quad u(x) = y^{1-2} \Rightarrow \boxed{u(x) = y^{-1}} \Rightarrow \boxed{u'(x) = -y^{-2}y'}$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$-u' - u = x \Rightarrow u' + u = -x.$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int dx}\left[c + \int (-x) e^{\int dx} dx\right]$$

$$= e^{-x}\left[c - \int x e^{x} dx\right] =$$

$$= e^{-x}\left[c - xe^{x} + e^{x}\right]$$

$$= ce^{-x} - x + 1.$$

Επομένως $u(x) = [y(x)]^{-1} \Rightarrow y(x) = [u(x)]^{-1} = \dfrac{1}{ce^{-x} - x + 1}$

Όμως $y(0) = 1$. Οπότε $1 = \dfrac{1}{ce^{0} - 0 + 1} \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{c+1} \Rightarrow c = 0.$

Άρα

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ
[1.5.3]

$$y' = xy^3 + xy, \quad y(0) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται

$$y' - xy = xy^3$$

Επομένως είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-3}$

προκύπτει $y^{-3}y' - y^{-3}xy = y^{-3}xy^3 \Rightarrow y^{-3}y' - xy^{-2} = x.$

Θέτουμε $u(x) = y^{1-n} = y^{1-3} \Rightarrow \boxed{u(x) = y^{-2}} \Rightarrow u' = -2y^{-3}y' \Rightarrow \boxed{y^{-3}y' = -\frac{1}{2}u'}.$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$-\frac{1}{2}u' - xu = x \Rightarrow u' + 2xu = -2x$$

Η παραπάνω ΔΕ είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int 2x\,dx}\left[c + \int (-2x)e^{\int 2x\,dx}dx\right] = e^{-x^2}\left[c - \int 2xe^{x^2}dx\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[c - \int e^{x^2}(x^2)'dx\right] = e^{-x^2}\left[c - e^{x^2}\right] = ce^{-x^2} - 1.$$

Επομένως $u(x) = [y(x)]^{-2} \Rightarrow y(x) = [u(x)]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{ce^{-x^2} - 1}}$.

Όμως $y(0) = 1$. Οπότε $1 = \dfrac{1}{\sqrt{c-1}} \Rightarrow \sqrt{c-1} = 1 \Rightarrow c - 1 = 1 \Rightarrow c = 2$.

Άρα

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x^2} - 1}}.$$

$\square$

Ασκ. Να λυθεί το ΠΑΣΤ

[1.5.4]

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^3, \quad y(1) = 1.$$

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Bernoulli.

Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-3}$

προκύπτει $y^{-3} y' - y^{-3} \frac{1}{x} y = y^{-3} \frac{1}{x^2} y^3 \Rightarrow y^{-3} y' - \frac{1}{x} y^{-2} = \frac{1}{x^2}$.

Θέτουμε $u(x) = y^{1-n} \Rightarrow \boxed{u = y^{-2}} \Rightarrow u' = -2 y^{-3} y' \Rightarrow \boxed{y^{-3} y' = -\frac{1}{2} u'}$.

Οπότε η ΔΕ γίνεται $-\frac{1}{2} u' - \frac{1}{x} u = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u' + \frac{2}{x} u = -\frac{2}{x^2}$.

Καταλήξαμε σε μια γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[c + \int\left(-\frac{2}{x^2}\right)e^{\int\frac{2}{x}dx}\right] \overset{x>0}{=} e^{-2\ln x}\left[c+\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)e^{2\ln x}\right]$$

$$= x^{-2}\left[c-2\int \cancel{x}^{-2}x^2\,dx\right] = x^{-2}\left[c-2x\right].$$

Επομένως $u(x) = [y(x)]^{-2} \Rightarrow y^{-2} = x^{-2}(c-2x) \Rightarrow y^2 = x^2\frac{1}{c-2x} \Rightarrow y = \frac{x^2}{\sqrt{c-2x}}$

Όμως $y(1) = 1$. Οπότε $1 = \frac{1}{\sqrt{c-2}} \Rightarrow \sqrt{c-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c-2 = 1 \Rightarrow c = 3$

Άρα

$$y(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3-2x}}.$$

$\square$

Δ.1.6_ Διαφορικές_ Εξισώσεις_ Riccati

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' + \frac{1-x}{2x^2}y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{x-1}{2} = 0, \quad x>0,$$

αν αυτή έχει μια μερική λύση $y_1 = x$.

Απ. Η ΔΕ είναι τύπου Riccati. Έστω η λύση της $y_1 = x$.

Θέτουμε $y = y_1 + \frac{1}{u} \Rightarrow \boxed{y = x + \frac{1}{u}} \Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{1}{u^2}u'}$.

Οπότε η ΔΕ γράφεται

$$1 - \frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{2x^2}\left(x + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{2x^2}\left(x^2 + 2x\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2}\right) - \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{u}\right) + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{xu} + \frac{1-x}{2x^2u^2} - 1 - \frac{1}{x}\frac{1}{u} + \frac{x-1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1-x}{xu} + \frac{1-x}{2x^2u^2} - \frac{1}{xu} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{u^2}u' - \frac{1}{u} + \frac{1-x}{2x^2}\frac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow u' + u = \frac{1-x}{2x^2}$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int dx}\left[c + \int \frac{1-x}{2x^2} e^{\int dx} dx\right] = e^{-x}\left[c + \int \frac{1-x}{2x^2} e^{x} dx\right] = e^{-x}\left[c + \frac{1}{2}\int \frac{e^{x} - xe^{x}}{x^2} dx\right]$$

$$= e^{-x}\left[c + \frac{1}{2}\int \left(-\frac{e^{x}}{x}\right)' dx\right] = e^{-x}\left[c - \frac{1}{2}\frac{e^{x}}{x}\right] = ce^{-x} - \frac{1}{2x} = \frac{2cxe^{-x} - 1}{2x}.$$

Άρα η ζητούμενη λύση y θα είναι

$$y(x) = x + \frac{1}{u} = x + \frac{2x}{2cxe^{-x} - 1} = x + \frac{2x}{c_1xe^{-x} - 1} = \frac{c_1x^2e^{-x} - x + 2x}{c_1xe^{-x} - 1}$$

$$= \frac{c_1x^2e^{-x} + x}{c_1xe^{-x} - 1} = \frac{x\cancel{e^{-x}}(c_1x + e^{x})}{\cancel{e^{-x}}(c_1x - e^{x})} = \frac{x(c_1x + e^{x})}{c_1x - e^{x}}.$$

$\square$

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1, \quad x>0,$$

αν αυτή έχει μία μερική λύση $y_1 = -\frac{1}{x}$.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $y' - y^2 - \frac{1}{x} y - \frac{1}{x^2} = 0$

συνεπώς είναι τύπου Riccati.

Έστω $y_1 = -\frac{1}{x}$. Θέτουμε $\boxed{y = y_1 + \frac{1}{u}} \Rightarrow \boxed{y' = y_1' - \frac{1}{u^2} u'}$.

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$y_1' - \frac{1}{u^2} u' - \left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 - \frac{1}{x}\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x^2} = 0$$

Δ.1.6.8

$$\underbrace{y_1'} - \frac{1}{u^2}u' \underbrace{- y_1^2} - 2y_1\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \underbrace{- \frac{1}{x}y_1} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} \underbrace{- \frac{1}{x^2}}_{=0} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u^2}u' - 2y_1\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{u^2}u' + 2\frac{1}{x}\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{x}\frac{1}{u} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{u^2}u' + \frac{1}{x}\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = -1$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική ΔΕ $1^{ης}$ τάξης. Οπότε

$$u(x) = e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}\left[c + \int(-1)e^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx\right] = e^{\ln x}\left[c + \int(-1)e^{-\ln x}dx\right] =$$

$$= x\left[c - \int x^{-1}dx\right] = x\left[c - \ln x\right].$$

Άρα

$$y(x) = y_1 + \frac{1}{u} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(c-\ln x)} = \frac{1-c+\ln x}{x(c-\ln x)}. \qquad \square$$

Δ.1.7_Πλήρεις_Διαφορικές_Εξισώσεις

Παραδ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $(x^2-xy^2)dx+(y^2-x^2y)dy=0$,
[1.7.1] σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Ορίζουμε $\begin{cases} P(x,y) = x^2 - xy^2 \\ Q(x,y) = y^2 - x^2y \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2xy$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2xy$, δηλ. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Άρα η ΔΕ είναι πλήρης.

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο από τη θεωρία, έχουμε

$$\int_0^x P(t,y)\,dt + \int Q(c,y)\,dy = 0 \Rightarrow \int_0^x (t^2 - ty^2)\,dt + \int (y^2 - 0^2 y)\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}y^2\right]_{t=0}^{x} + \frac{y^3}{3} = c \Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{3} = c.$$

□

Β΄ Τρόπος:

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial x}=P(x,y)$ προκύπτει

$$\frac{\partial g}{\partial x}=x^2-xy^2 \Rightarrow g(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)$$

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial y}=Q(x,y)$ προκύπτει

$$\frac{\partial g}{\partial y}=y^2-x^2y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)\right]=y^2-x^2y \Rightarrow$$

$$-x^2y+\varphi'(y)=y^2-x^2y \Rightarrow \varphi'(y)=y^2 \Rightarrow \varphi(y)=\frac{y^3}{3}+c.$$

Άρα

$$g(x,y)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+c$$

<u>Ασκ.</u> [1.7.2] Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(x-y)dx + (-x+y+2)dy = 0.$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

<u>Απ.</u> Ορίζουμε $\begin{cases} P(x,y) = x-y \\ Q(x,y) = -x+y+2 \end{cases}$ Παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -1$, δηλ. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x} = x-y \Rightarrow g(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - xy + \varphi(y)$.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = -x+y+2 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{x^2}{2} - xy + \varphi(y)\right] = -x+y+2$

$\Rightarrow \underbrace{-x}_{} + \varphi'(y) = \underbrace{-x}_{} + y + 2 \Rightarrow \varphi'(y) = y+2 \Rightarrow \varphi(y) = \dfrac{y^2}{2} + 2y + c.$

Άρα

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy + 2y + c. \qquad \square$$

Ασκ [1.7.3] Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$(y+\cos x)dx + (x+\sin y)\,dy = 0.$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ Ορίζουμε $P(x,y) = y+\cos x$, $Q(x,y) = x+\sin y$. Παρατηρούμε ότι

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, δηλ. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial x} = P(x,y)$ προκύπτει $\frac{\partial g}{\partial x} = y+\cos x \Rightarrow g(x,y) = xy+\sin x+\varphi(y)$

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial y} = Q(x,y)$ προκύπτει $\frac{\partial g}{\partial y} = x+\sin y \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+\sin x+\varphi(y)\right) = x+\sin y \Rightarrow \cancel{x}+\varphi'(y) = \cancel{x}+\sin y \Rightarrow \varphi(y) = -\cos y + c.$$

Άρα

$$g(x,y) = xy+\sin x+\varphi(y) \Rightarrow g(x,y) = xy+\sin x-\cos y + c.$$

$\square$

Ασκ. [1.7.4] Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow (2xy)dx + (x^2+y^2)dy = 0.$

Ορίζουμε $P(x,y) = 2xy$, $Q(x,y) = x^2+y^2$. Παρατηρούμε ότι

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ και $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, δηλ. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ προκύπτει $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy \Rightarrow g(x,y) = x^2y + \varphi(y).$

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ προκύπτει $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2+y^2 \Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+\varphi(y)) = x^2+y^2 \Rightarrow x^2+\varphi'(y) = x^2+y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c.$

Άρα $g(x,y) = x^2 y + \varphi(y) \Rightarrow g(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3} + c.$

Β' Τρόπος Έχουμε $(2xy)\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0 \Rightarrow$

$$2xy\,dx + x^2\,dy + y^2\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\int d(x^2 y) + \int y^2\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 y + \frac{y^3}{3} = c.$$

$\square$

Δ.1.8_ Ολοκληρωτικοί_Παράγοντες

Ασκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = -\dfrac{y}{3+3x-y}$.
[1.8-1] σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{3+3x-y} \Rightarrow (y)dx + (3+3x-y)dy = 0$.

Ορίζουμε $P(x,y) = y$, $Q(x,y) = 3+3x-y$. Παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ ενώ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3$, δηλ. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Έχουμε

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{3+3x-y}(1-3) \neq F(x).$$

Όμως

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}(3-1) = \frac{2}{y} = F(y).$$

Συνεπώς $R(y) = e^{\int F(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με την $R(y)$, η ΔΕ γίνεται

$$(y)dx + (3x-y+3)dy = 0 \Rightarrow (y^3)dx + (3xy^2 - y^3 + 3y^2)dy = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y}(y^3) = 3y^2$ και $\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2 - 3y^3 + 3y^2) = 3y^2$.

Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = y^3$ προκύπτει $g(x,y) = xy^3 + \varphi(y)$.

Από τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 - y^3 + 3y^2$ προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3 + \varphi(y)\right) = 3xy^2 - y^3 + 3y^2 \Rightarrow 3xy^2 + \varphi'(y) = 3xy^2 - y^3 + 3y^2 \Rightarrow$$

$$\varphi'(y) = -y^3 + 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^4}{4} + y^3 + c.$$

Άρα $g(x,y) = xy^3 + \varphi(y) \Rightarrow g(x,y) = xy^3 - \frac{y^4}{4} + y^3 + c.$ □

Άσκ. Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $y' = \dfrac{3x^2y}{x^3+2y^2}$,

[1.8.2]

σε πεπλεγμένη μορφή.

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2y}{x^3+2y^2} \Rightarrow (3x^2y)dx + (-x^3-2y^2)dy = 0$.

Ορίζουμε $\begin{cases} P(x,y) = 3x^2y \\ Q(x,y) = -x^3-2y^2 \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$ ενώ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -3x^2$, δηλ. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{3x^2y}\left(-3x^2-3x^2\right) = -\frac{6x^2}{3x^2y} = -\frac{2}{y} = F(y).$$

Συνεπώς $R(y) = e^{\int F(y)dy} = e^{\int(-\frac{2}{y})dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με την $R(y)=\frac{1}{y^2}$, η ΔΕ γίνεται

$$\left(\frac{3x^2y}{y^2}\right)dx + \left(\frac{-x^3-2y^2}{y^2}\right)dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{3x^2}{y}\right)dx - \left(\frac{-x^3-2y^2}{y^2}\right)dy = 0.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y}\right) = -\frac{3x^2}{y^2}$ και $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^3-2y^2}{y^2}\right) = \frac{-3x^2}{y^2}$.

Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$ προκύπτει $g(x,y) = \frac{x^3}{y} + \varphi(y)$.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{-x^3-2y^2}{y^2}$ προκύπτει $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{y}+\varphi(y)\right) = -\frac{x^3}{y^2} - 2 \Rightarrow$

$$-\frac{x^3}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x^3}{y^2} - 2 \Rightarrow \varphi'(y) = -2 \Rightarrow \varphi(y) = -2y + c.$$

Άρα $g(x,y) = \frac{x^3}{y} + \varphi(y) \Rightarrow g(x,y) = \frac{x^3}{y} - 2y + c.$ □

<u>Ασκ</u> Να βρεθεί σε πεπλεγμένη μορφή η γενική λύση της ΔΕ

[1.8.3]
$$y(y^3+2x^4)dx + x(x^4-2y^3)dy = 0$$

<u>Απ.</u> Ορίζουμε $P(x,y)=y(y^3+2x^4)$, $Q(x,y)=x(x^4-2y^3)$

Παρατηρούμε $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3+2x^4$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 5x^4-2y^3$

δηλ. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{4y^3+2x^4-5x^4+2y^3}{x(x^4-2y^3)} = \frac{-3(x^4-2y^3)}{x(x^4-2y^3)} = \frac{-3}{x} = F(x)$

Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας με την $R(x)=e^{\int F(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

η ΔΕ γίνεται $\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx + \left(x^2-2\frac{y^3}{x^2}\right)dy = 0$

Δ.1.8.στ

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)=\frac{4y^3}{x^3}+2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-2\frac{y^3}{x^2}\right)=2x+4\frac{y^3}{x^3}$$

Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{y^4}{x^3}+2xy$ προκύπτει $g(x,y)=\frac{x^{-2}}{-2}y^4+x^2y+\varphi(y)$

Απ' τη ΔΕΜΠ $\frac{\partial g}{\partial y}=x^2-2\frac{y^3}{x^2}$ προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2x^2}y^4+x^2y+\varphi(y)\right)=x^2-2\frac{y^3}{x^2}\Rightarrow-\cancel{\frac{4y^3}{2x^2}}+\cancel{x^2}+\varphi'(y)=\cancel{x^2}-\cancel{2\frac{y^3}{x^2}}\Rightarrow\varphi(y)=c$$

Άρα $g(x,y)=-\frac{y^4}{x^2}+x^2y+\varphi(y)\Rightarrow g(x,y)=x^2y-\frac{y^4}{x^2}+c.$ □

Ασκ. Να βρεθεί σε πεπλεγμένη μορφή η γενική λύση της ΔΕ

[1.8.4]

$$y' = \frac{y^2+y}{x}$$

Απ. Η ΔΕ γράφεται $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+y}{x} \Rightarrow (y^2+y)dx + (-x)dy = 0.$

Ορίζουμε $P(x,y) = y^2+y$, $Q(x,y) = -x$.

Παρατηρούμε $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y+1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$, δηλ. $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{y^2+y}(-1-2y-1) = \frac{-2\cancel{(y+1)}}{y\cancel{(y+1)}} = -\frac{2}{y} = F(y).$

Συνεπώς πολλαπλασιάζοντας με την $R(y) = e^{\int F(y)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$,

η ΔΕ γίνεται $\left(1+\frac{1}{y}\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

Παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{1}{y^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{1}{y^2}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

Οπότε η ΔΕ είναι πλήρης.

Απ' τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g}{\partial x}=1+\dfrac{1}{y}$ προκύπτει

$$g(x,y)=x+\frac{x}{y}+\varphi(y).$$

Απ' τη ΔΕΜΠ $\dfrac{\partial g}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$ προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x+\frac{x}{y}+\varphi(y)\right)=-\frac{x}{y^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{y^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{y^2} \Rightarrow \varphi(y)=c.$$

Άρα

$$g(x,y)=x+\frac{x}{y}+c.$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$$(y^2+y)dx+(-x)dy=0 \Rightarrow$$

$$y^2dx+ydx-xdy=0 \Rightarrow$$

$$dx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0 \Rightarrow$$

$$dx+d\left(\frac{x}{y}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\int dx+\int d\left(\frac{x}{y}\right)=\int 0 \Rightarrow$$

$$x+\frac{x}{y}=c$$

□