

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Ορισμός Ένα σύνολο n ΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \\y_2' &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x) \\\vdots &= \vdots \\y_n' &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x)\end{aligned}$$

καλείται **σύστημα ΔΕ** 1ης τάξης ως προς τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Λύση του συστήματος λέμε οποιοσδήποτε σύνολο συναρτήσεων ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Ορισμός Ένα σύνολο n γραμμικών ΔΕ της μορφής

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + \beta_1(x) \\y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + \beta_2(x) \\\vdots &= \vdots \\y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + \beta_n(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

καλείται **σύστημα n γραμμικών ΔΕ** ή **γραμμικό σύστημα ΔΕ**

1ης τάξης ως προς τις συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$,

όπου $a_{ij}(x), i, j = 1, 2, \dots, n, \beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)$,

συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κοινό διάστημα I .

Αν $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x) = 0$, τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές**.

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Ένα τέτοιο σύστημα με τη βοήθεια πινάκων γράφεται στη μορφή

$$Y' = AY + B$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1(x) \\ \beta_2(x) \\ \vdots \\ \beta_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα υπό μορφή πινάκων γράφεται

$$Y' = AY.$$

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Γενική λύση του συστήματος (3.1) λέμε το σύνολο των διανυσμάτων Y που το ικανοποιεί.

Ένα σύστημα ΔΕ μαζί με μία ή περισσότερες συνθήκες

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}, \text{ όπου } Y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

συνθέτουν ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**. Σε αυτήν την περίπτωση αναζητούμε το διάνυσμα συναρτήσεων Y που ικανοποιεί το σύστημα $Y' = AY$ και τις συνθήκες $Y(x_0) = Y_0$.

Θεώρημα (*Αρχή της υπέρθεσης ή αρχή της επαλληλίας*)

Αν τα διανύσματα $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, είναι λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος ΔΕ $Y' = AY$, τότε και οποιαδήποτε διάνυσμα

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ σταθερές,}$$

είναι λύση του.

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Θεώρημα Τα n διανύσματα

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad Y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν η ορίζουσα

$$W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Η ορίζουσα αυτή ονομάζεται **ορίζουσα Wronski** των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Δ.3.1_Συστήματα_γραμμικών_ΔΕ

Θεώρημα Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος n ΔΕ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n , οπότε η γενική λύση του είναι

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \text{ σταθερές,}$$

όπου $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του.