

Δ.1.8_Ολοκληρωτικοί_Παράγοντες

Σε ορισμένες περιπτώσεις μία μη πλήρης ΔE

$$P(x, y)dx = Q(x, y)dy,$$

μπορεί, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με μία κατάλληλη συνάρτηση $R(x, y)$, να μετατραπεί στην πλήρη ΔE

$$RPdx = RQdy.$$

Η συνάρτηση $R(x, y)$ λέγεται **ολοκληρωτικός παράγοντας** της ΔE .

Δ.1.8_Ολοκληρωτικοί_Παράγοντες

Αναζητούμε συνάρτηση R τέτοια ώστε $\frac{\partial}{\partial y}(RP) = \frac{\partial}{\partial x}(RQ)$

ή ισοδύναμα
$$P \frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial P}{\partial y} = Q \frac{\partial R}{\partial x} + R \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (1)$$

Αν $R=R(x)$, τότε
$$\frac{\partial R}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial R}{\partial x} = R'.$$

Οπότε η (1) γίνεται
$$R \frac{\partial P}{\partial y} = QR' + R \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Διαιρώντας με RQ προκύπτει

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{R} R' + \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{1}{R} R' = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Αν $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x)$, τότε $\frac{1}{R} R' = F(x)$ κι επομένως $R(x) = e^{\int F(x) dx}$

Δ.1.8_Ολοκληρωτικοί_Παράγοντες

Πρόταση

Αν η έκφραση $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = F(x)$ εξαρτάται μόνο από το x , τότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μη πλήρους ΔΕ $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$ είναι ο

$$R(x) = e^{\int F(x)dx}.$$

Πρόταση

Αν η έκφραση $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = F(y)$ εξαρτάται μόνο από το y , τότε ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μη πλήρους ΔΕ $P(x, y)dx = Q(x, y)dy$ είναι ο

$$R(x) = e^{\int F(y)dy}.$$