

Δ.1.1_Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Για να λύσουμε ένα φυσικό ή τεχνολογικό πρόβλημα πρέπει αρχικά να το διατυπώσουμε μέσω μιας μαθηματικής έκφρασης που περιέχει μεταβλητές, συναρτήσεις και μεταξύ τους σχέσεις (εξισώσεις). Η μαθηματική αυτή διατύπωση λέγεται **μαθηματικό μοντέλο** του προβλήματος και η διαδικασία διατύπωσης (**μαθηματική μοντελοποίηση**).

Ένα φυσικό μοντέλο είναι μία εξίσωση που περιέχει παραγώγους μίας άγνωστης συνάρτησης. Ένα τέτοιο μοντέλο λέγεται **διαφορική εξίσωση**.

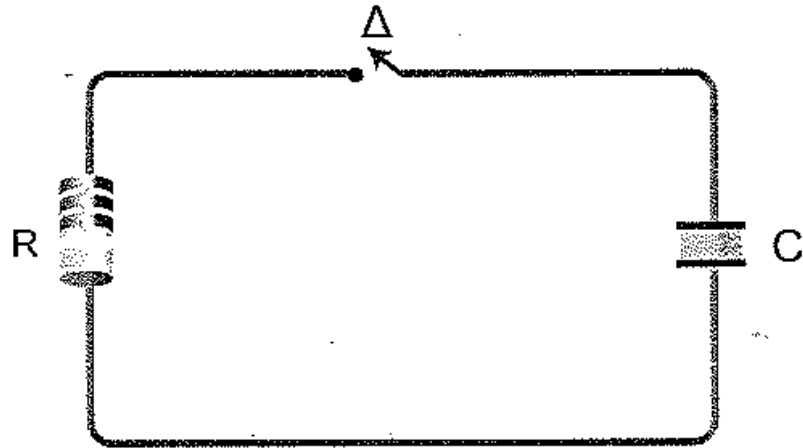
Δ.1.1_ Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Παράδειγμα (Εκφόρτιση ενός πυκνωτή)

Κατά την εκφόρτιση ενός πυκνωτή χωρητικότητας C μέσα από αντίσταση R , ισχύει

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} = 0,$$

όπου $q(t)$ το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t .



Η σχέση αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση από τη λύση της οποίας προκύπτει το φορτίο $q(t)$ του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t .

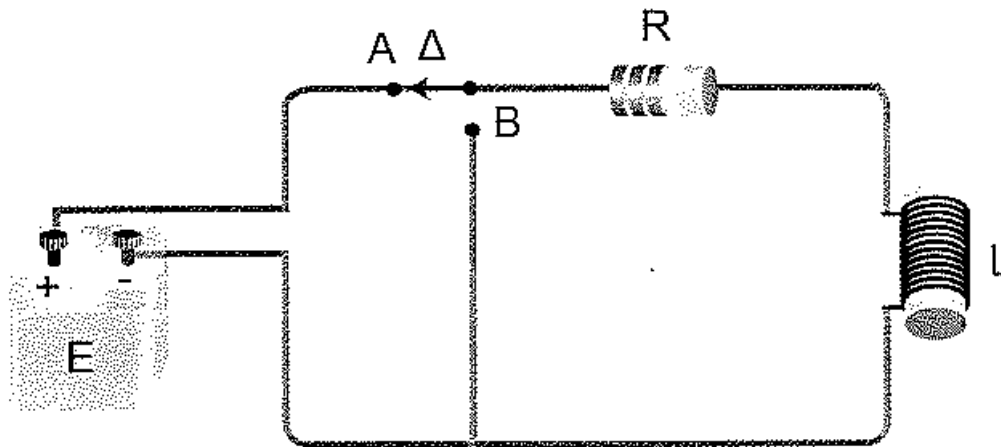
Δ.1.1_ Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Παράδειγμα (Ρεύμα σε ένα κύκλωμα RL)

Όταν ανοίξουμε το διακόπτη σε ένα κύκλωμα πηνίου αυτεπαγωγής L και αντίστασης R , ισχύει

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0,$$

όπου $i(t)$ η ένταση του ρεύματος τη χρονική στιγμή t .



Η σχέση αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση από τη λύση της οποίας προκύπτει η ένταση $i(t)$ του ρεύματος τη χρονική στιγμή t .

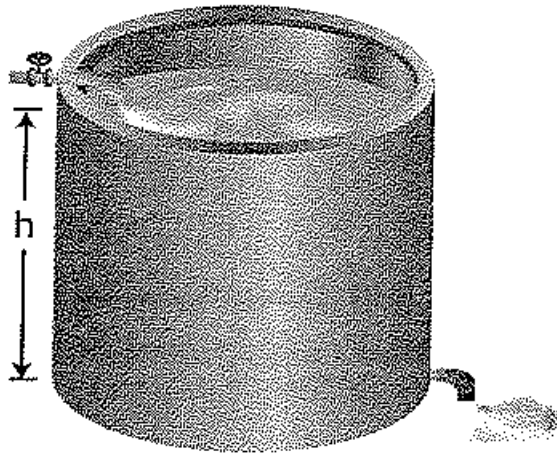
Δ.1.1_Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Παράδειγμα (Εκροή υγρού)

Για το ύψος $h(t)$ της στάθμης ενός υγρού που εκρέει από μία οπή στον πυθμένα μιας κυλινδρικής δεξαμενής, ισχύει

$$h'(t) = -k\sqrt{h(t)},$$

όπου k μία σταθερά.



Η σχέση αυτή είναι μία διαφορική εξίσωση από τη λύση της οποίας προκύπτει το ύψος $h(t)$ της στάθμης του υγρού τη χρονική στιγμή t .

Δ.1.1_Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Ορισμός

Διαφορική εξίσωση (ΔΕ) για μία συνάρτηση y λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει

$$x, y(x), y'(x), y''(x), \dots$$

Αν η y εξαρτάται από μία μεταβλητή x , τότε η ΔΕ λέγεται **συνήθους ΔΕ**.

Αν η y εξαρτάται από περισσότερες μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$, τότε η ΔΕ λέγεται **διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ΔΕΜΠ)**.

Π.χ. η $y'' + 3y' + 4y = 2x^3$ είναι μία ΔΕ,

ενώ η $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial u}{\partial x}$ είναι μία ΔΕΜΠ.

Τάξη της ΔΕ λέγεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου στη ΔΕ.

Βαθμός της ΔΕ λέγεται η μεγαλύτερη δύναμη παραγώγου στη ΔΕ.

Δ.1.1_Διαφορικές_Εξισώσεις - Ορισμοί

Λύση μιας ΔΕ λέγεται κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Γενική λύση μιας ΔΕ λέγεται το σύνολο των συναρτήσεων που την επαληθεύουν. Η γενική λύση μιας ΔΕ περιέχει μία ή περισσότερες αυθαίρετες σταθερές.

Μερική λύση μιας ΔΕ λέγεται μία λύση που προκύπτει από τη γενική εάν προσδιορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές με βάση δοθείσες αρχικές συνθήκες.

Μία ΔΕ μαζί με μία ή περισσότερες συνθήκες συνθέτουν ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**.

Ιδιάζουσα λύση ΔΕ λέγεται μία λύση που δεν προκύπτει από τη γενική.

Μία διαφορική εξίσωση α' τάξης γράφεται στη μορφή

$$\boxed{F(x, y, y') = c} \quad \text{ή} \quad \boxed{y' = f(x, y)} \quad \text{ή} \quad \boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0},$$

$$\text{αφού } P(x, y)dx = -Q(x, y)dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$