

Τυπολόγιο Μιγαδικών Συναρτήσεων

A. Σημαντικά Θεωρήματα

Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συναφές ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική στο U .

Θεώρημα Cauchy. Για οποιοδήποτε απλό κλειστό μονοπάτι γ σε αυτό, είναι $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy. Έστω $D = \{z: |z - z_0| \leq r\} \subseteq U$ και έστω γ το μονοπάτι ∂D , θετικά προσανατολισμένο. Τότε, για κάθε $\alpha \in D^\circ = \{z: |z - z_0| < r\}$ ισχύει:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz, \quad f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz, \quad n \geq 1.$$

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα. Αν $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$, $0 < |z - z_0| < r$, τότε $\text{Res}(f, z_0) = \alpha_{-1}$.

Αν z_0 είναι πόλος της f τάξης m , τότε $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων. Έστω $f: U - \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$, αναλυτική και γ είναι ένα κλειστό θετικά προσανατολισμένο μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε: α) Το εσωτερικό του γ περιέχεται στο U .

β) Τα $z_1, \dots, z_n$ περιέχονται στο εσωτερικό του γ . Τότε $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, z_k)$

B. Σειρές Fourier

Ορισμός Σειρών Fourier: Αν f περιοδική με περίοδο $T = 2L$, τότε

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

όπου $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- Αν f : **άρτια** τότε $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$, με $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$.
- Αν f : **περιττή** τότε $f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$, με $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$, $n \in \mathbb{N}$.

Συνθήκες Dirichlet: Λέμε ότι μία συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet όταν:

- α) είναι τμηματικά συνεχής, β) έχει τμηματικά συνεχή παράγωγο, γ) έχει πεπερασμένου πλήθους ακρότατα.

Κριτήριο του Dirichlet

Για κάθε $2L$ -περιοδική συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο $(-L, L)$, η σειρά Fourier της f συγκλίνει σε αυτήν σε όλα τα σημεία x στα οποία η f είναι συνεχής.

Δηλαδή, αν η $2L$ -περιοδική συνάρτηση f είναι συνεχής στο x , τότε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

Περαιτέρω, για κάθε σημείο ασυνέχειας x_0 , είναι:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Ταυτότητα του Parseval

Έστω f είναι συνεχής στο $(-L, L)$ και $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$. Τότε

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Γ. Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η παράσταση $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$, $\omega \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier** της f . Αν $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται καλώς.

- Αν f : **άρτια** τότε $\hat{f}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx$
- Αν f : **περιπτή** τότε $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$

Ιδιότητες: Ισχύουν τα εξής:

- $F(c_1 f + c_2 g)(\omega) = c_1 F(f)(\omega) + c_2 F(g)(\omega)$
- $F(f(x - \alpha))(\omega) = e^{-i\omega \alpha} F(f)(\omega)$
- $F(e^{-i\lambda x} f(x))(\omega) = F(f)(\omega - \lambda)$
- $F(f(cx)) = \frac{1}{|c|} F(f)\left(\frac{\omega}{c}\right)$
- Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση και υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier της f' , τότε
(α) $\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$ (β) $\widehat{f''}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega)$ (γ) $\widehat{xf(x)}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$

Ορισμός Συνέλιξης

Έστω δύο συναρτήσεις f, g . Η συνέλιξη (convolution) των f, g ορίζεται να είναι:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy. \text{ Αποδεικνύεται ότι } \widehat{f * g}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

Δ. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Αν $\hat{f}$ ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης, τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως:

$$F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Σε κάθε σημείο συνέχειας της f είναι: $F^{-1}(F(f))(x) = f(x)$ ή $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$.

- Αν f : **άρτια** τότε $F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \cos(\omega x) d\omega$.
- Αν f : **περιπτή** τότε $F^{-1}(f)(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\omega) \sin(\omega x) d\omega$.

Ε. Χρήσιμα Αποτελέσματα

1. $(z + w)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2. Αν μία συνάρτηση f ορίζεται στο $(0, +\infty)$, τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε στο $(-\infty, 0)$ ως συνάρτηση:

$$(α) \text{ περιπτή } g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \quad (β) \text{ άρτια } g(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

3. $\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a} x \sin(ax) + \frac{1}{a^2} \cos(ax) + c, \quad \int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax) + c$

4. $\int e^{-x} \sin(ax) dx = -\frac{e^{-x}}{a^2 + 1} (a \cos(ax) + \sin(ax)) + c, \quad \int e^{-x} \cos(ax) dx = \frac{e^{-x}}{a^2 + 1} (\cos(ax) + a \sin(ax)) + c$