

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ.: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2025 στο μάθημα:
“ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ”

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = -1. \quad (1,5 \mu)$$

β) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης τύπου Bernoulli

$$y' - y = xy^2. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Να βρεθεί, σε πεπλεγμένη μορφή, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(y + \cos x)dx + (x + \sin y)dy = 0.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι $e^z = 1$ αν και μόνο αν $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Σημείωση: Δίνεται ότι, αν $z = x + iy$, τότε $e^z = e^x e^{iy}$ (1 μ)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = z^4/(2z + 1)^3$. Να αποδείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f πάνω στο μονοπάτι $\gamma: |z| = 1$ (θετική φορά) είναι ίσο με $3\pi i/8$.

(1,5 μ)

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ -e^x, & x < 0 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της g είναι
$$\hat{g}(\omega) = -2i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(1,5 μ)

Σημείωση: Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού, να χρησιμοποιηθεί το νέο Τυπολόγιο Μιγαδικών Συναρτήσεων.

β) Να δείξετε ότι:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0.$$

(1 μ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, οπότε

$$y' = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}.$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c}$$

Όμως $y(0) = -1$.

Οπότε $c = 1$.

Άρα $y(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$.

β) Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-2}$

προκύπτει $y^{-2}y' - y^{-2}y = x$.

Θέτουμε $u(x) = y^{1-2} \Rightarrow u(x) = y^{-1} \Rightarrow u'(x) = -y^{-2}y'$.

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$-u' - u = x \Rightarrow u' + u = -x.$$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int dx} \left[c + \int (-x)e^{\int dx} dx \right] = e^{-x} \left[c - \int xe^x dx \right] = e^{-x} [c - xe^e + e^x] = ce^{-x} - x + 1$$

Άρα γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{ce^{-x} - x + 1}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Ορίζουμε

$$\begin{cases} P(x, y) = y + \cos x \\ Q(x, y) = x + \sin y \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \text{ και } \frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \text{ δηλαδή } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \text{ Οπότε η } \Delta E \text{ είναι πλήρης.}$$

$$\text{Από τη ΔΕΜΠ } \frac{\partial g}{\partial x} = P(x, y) \text{ προκύπτει } \frac{\partial g}{\partial x} = y + \cos x \Rightarrow g(x, y) = xy + \sin x + \varphi(y).$$

$$\text{Από τη ΔΕΜΠ } \frac{\partial g}{\partial y} = Q(x, y) \text{ προκύπτει } \frac{\partial g}{\partial y} = x + \sin y \Rightarrow .$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + \sin x + \varphi(y)) = x + \sin y \Rightarrow x + \varphi'(y) = x + \sin y \Rightarrow \varphi(y) = -\cos y + c$$

Άρα

$$g(x, y) = xy + \sin x + -\cos y + c$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

α) $e^z = 1 \leftrightarrow e^{x+iy} = 1 \leftrightarrow e^x e^{iy} = 1 \leftrightarrow e^x \cos(y) + i e^x \sin(y) = 1 \leftrightarrow e^x \cos(y) = 1$ και $e^x \sin(y) = 0$.

Όμως $e^x \sin(y) = 0$ και $e^x \neq 0 \rightarrow \sin(y) = 0 \leftrightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Επίσης, $e^x \cos(y) = 1 \leftrightarrow e^x \cos(k\pi) = 1 \leftrightarrow e^x (-1)^k = 1 \leftrightarrow k = 2n$ και $e^x = 0 \leftrightarrow x = 0$.

Τελικά, $z = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

β)

Είναι $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = z^4/8$, και παρατηρούμε ότι αυτή

είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$, άρα και στο εσωτερικό του δίσκου C . Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy είναι

$$\int_C \frac{\frac{z^4}{8}}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} dz = \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{\left(z + \frac{1}{2}\right)^3} = \pi i f^{(2)}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Είναι $f'(z) = z^3/2$, $f^{(2)}(z) = 3z^2/2$, άρα $f^{(2)}(-1/2) = 3(-1/2)^2/2 = 3/8$, και $\int_C \frac{z^4}{(2z+1)^3} dz = \frac{3\pi i}{8}$.

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

α) $g: \text{περιπτή} \rightarrow \hat{g}(\omega) = -2i \int_0^{+\infty} g(x) \sin(\omega x) dx = -2i \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(\omega x) dx = -2i \frac{\omega}{\omega^2 + 1}, \omega \in \mathbb{R}$.

$$\beta) \quad g(x) = F^{-1}(\hat{g})(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{g}(\omega) \sin(\omega x) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin(\omega x)}{\omega^2 + 1} d\omega$$

β) Για $x > 0$, προκύπτει το ζητούμενο.