

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ.: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2025 στο μάθημα:
“ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ”

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = -1. \quad (1,5 \mu)$$

β) Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης τύπου Bernoulli

$$y' - y = xy^2. \quad (1,5 \mu)$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 5y = e^x. \quad (2 \mu)$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι αν $z = e^{i\theta}$ τότε $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$ (0,3 μ)

β) Να δείξετε ότι αν $z = e^{i\theta}$ τότε $\frac{1}{e^{i\theta}(5 + 3\cos\theta)} = \frac{2}{3\left(z + \frac{1}{z}\right)(z + 3)}.$ (0,5 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\pi}(5 + 3\cos\theta)} d\theta.$ (1,7 μ)

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

α) Να δείξετε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης

$$v(s) = \frac{1 - 2s}{s(s^2 + 7s + 12)}$$

είναι η συνάρτηση

$$\frac{1}{12} + \frac{9}{4}e^{-4t} - \frac{7}{3}e^{-3t}, \quad (1 \mu)$$

β) Να αξιοποιηθεί ο μετασχηματισμός Laplace για να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' + 7y' + 12y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2. \quad (1,5 \mu)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Είναι ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, οπότε

$$y' = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + c \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}.$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + c}$$

Όμως $y(0) = -1.$

Οπότε $c = 1.$

Άρα $y(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}.$

β) Πολλαπλασιάζοντας με $y^{-n} = y^{-2}$

προκύπτει $y^{-2}y' - y^{-2}y = x.$

Θέτουμε $u(x) = y^{1-2} \Rightarrow u(x) = y^{-1} \Rightarrow u'(x) = -y^{-2}y'.$

Οπότε η ΔΕ παίρνει τη μορφή $-u' - u = x \Rightarrow u' + u = -x.$

Η ΔΕ στην οποία καταλήξαμε είναι γραμμική. Συνεπώς

$$u(x) = e^{-\int dx} \left[c + \int (-x)e^{\int dx} dx \right] = e^{-x} \left[c - \int xe^x dx \right] = e^{-x} [c - xe^e + e^x] = ce^{-x} - x + 1$$

Άρα γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{ce^{-x} - x + 1}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Η ΔΕ είναι μη ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\omega^2 - 4\omega + 5 = 0$$

η οποία έχει ρίζες τις $\omega_{1,2} = 2 \pm i$.

Αρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y_{om} = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = \alpha e^x.$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους

$$y' = \alpha e^x, \quad y'' = \alpha e^x$$

στη ΔΕ προκύπτει

$$\alpha e^x - 4\alpha e^x + 5\alpha e^x = e^x \Rightarrow 2\alpha e^x = e^x \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

Αρα

$$y_\mu = \frac{1}{2} e^x.$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = y_{om} + y_\mu = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2} e^x, \quad \text{όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α)

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \\ \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \frac{1}{2}2\cos\theta = \cos\theta.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται η ταυτότητα για το $\sin\theta$.

(β)

$$\frac{1}{e^{i\theta}(5 + 3\cos\theta)} = \frac{1}{z\left(5 + \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} = \frac{2}{3z^2 + 10z + 3} = \frac{2}{3\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 3)}.$$

(γ)

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5 + 3\cos x)} dx = \int_{|z|=1} \frac{z}{3\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 3)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z}{3z\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 3)} dz = \\ \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

Είναι

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}\left(f, -\frac{1}{3}\right) \right] = 2\pi i \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right] = -\frac{\pi i}{6},$$

άρα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{ix}(5 + 3\cos x)} dx = -\frac{\pi}{6}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

(α) Είναι

$$\frac{1-2s}{s(s^2+7s+12)} = \frac{1}{12s} - \frac{7}{3(s+3)} + \frac{9}{4(s+4)}$$

Και

$$L^{-1}\left(\frac{1}{12s}\right) = \frac{1}{12}, L^{-1}\left(\frac{7}{3(s+3)}\right) = \frac{7}{3}e^{-3t}, L^{-1}\left(\frac{9}{4(s+4)}\right) = \frac{9}{4}e^{-4t},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Είναι

$$L(y')(s) = sL(y)(s) - y(0) = sL(y)(s), L(y'')(s) = s^2L(y)(s) - sf(0) - f'(0) = s^2L(y)(s) + 2,$$

άρα

$$y'' + 7y' + 12y = 1 \leftrightarrow s^2L(y)(s) + 2 + 7sL(y)(s) + 12L(y) = 1/s,$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$L(y)(s) = \frac{1-2s}{s(s^2+7s+12)}$$

Από το ερώτημα (α) συνάγουμε άμεσα ότι

$$y(t) = \frac{1}{12} + \frac{9}{4}e^{-4t} - \frac{7}{3}e^{-3t}.$$