

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚ.: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς – Ε.ΔΙ.Π. Επαμεινώνδας Διαμαντόπουλος
Ονοματεπώνυμο Φοιτ.: Α.Μ.:

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 2024 στο μάθημα:
“ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ”

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}}(y^2 + 1), \quad y(0) = 1.$$

β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xdy + (3y - 2x)dx = 0, \quad x > 0.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 4y' + 4y = e^x + 1.$$

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α) Να δείξετε ότι $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

(1 μ)

(β) Για την αναλυτική συνάρτηση f γνωρίζουμε ότι $u(x, y) = \operatorname{Re} f = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$.
Να βρείτε έναν πιθανό τύπο για την f .

(1,5 μ)

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

Έστω y συνάρτηση για την οποία ισχύει: $te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t - \omega)d\omega$.

(α) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης y είναι

$$L(y)(s) = \pm \frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha. \quad (1,5 \mu)$$

(β) Βρείτε τη λύση της εξίσωσης

$$te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t - \omega)d\omega. \quad (1 \mu)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο (3 μονάδες)

α) Έχουμε

$$\frac{dy}{dx}(y^2 + 1) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{y^2 + 1} dy = x^{\frac{3}{2}} dx \Rightarrow$$
$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x^{\frac{3}{2}} dx \Rightarrow \tan^{-1} y = \frac{x^{5/2}}{5/2} + c.$$

Όμως

$$y(0) = 1.$$

Οπότε

$$y(0) = 1 \Rightarrow \tan^{-1} 1 = \frac{0^{5/2}}{5/2} + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2}.$$

Άρα

$$\tan^{-1} y = \frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \tan\left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

β) Έχουμε

$$x dy + (3y - 2x) dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{3}{x} y = 2.$$

Η ΔΕ είναι γραμμική. Οπότε

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left[c + \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx \right] \Rightarrow$$
$$= e^{-\int \frac{3}{x} dx} \left[c + \int 2e^{\int \frac{3}{x} dx} dx \right] \Rightarrow$$
$$= e^{-3 \ln x} \left[c + \int 2e^{3 \ln x} dx \right] \Rightarrow$$
$$= x^{-3} \left[c + 2 \int x^3 dx \right] \Rightarrow$$
$$= x^{-3} \left[c + 2 \frac{x^4}{4} \right] \Rightarrow$$
$$= cx^{-3} + \frac{x}{2}.$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Είναι ομογενής γραμμική ΔΕ 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 4 = 0$$

της οποίας οι ρίζες είναι $\omega_{1,2} = 2$.

Συνεπώς

$$y_{om} = (c_1 + c_2 x)e^{2x},$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Το 2 είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Οπότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$y_\mu = Ae^x + B$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους

$$y_\mu' = Ae^x$$

$$y_\mu'' = Ae^x$$

στη ΔΕ προκύπτει

$$A = 1 \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{4}.$$

Άρα

$$y_\mu = e^x + \frac{1}{4}$$

και επομένως η ζητούμενη γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = y_{om} + y_\mu = y_{om} = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + e^x + \frac{1}{4}$$

όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3^ο (2,5 μονάδες)

(α) Είναι $\overline{e^{iz}} = e^{\overline{iz}} = e^{\bar{iz}} = e^{-i\bar{z}}$ και $\overline{e^{-iz}} = e^{\overline{-iz}} = e^{-\bar{iz}} = e^{i\bar{z}}$ άρα

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{2i} = \frac{\overline{e^{iz}} - \overline{e^{-iz}}}{-2i} = \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \sin \bar{z}.$$

(β) $u(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$, άρα $u_x = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4$, $u_y = -20x^3y + 20xy^3$.

Αν $v(x, y) = \text{Im}(f)$, τότε

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y) = 20x^3y - 20xy^3, \text{ άρα } v(x, y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + c(y).$$

Όμως, $v_y(x, y) = u_x(x, y)$ ή

$$5x^4 - 30x^2y^2 + c'(y) = 5x^4 - 30x^2y^2 + 5y^4 \text{ ή}$$

$$c'(y) = 5y^4 \text{ ή}$$

$$c(y) = y^5 + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα, } f(x, y) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 + c), c \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

(α) $te^{at} = \int_0^t y(\omega)y(t-\omega)d\omega \Leftrightarrow te^{at} = y * y(t) \Leftrightarrow L(te^{at})(s) = L(y * y)(s) \Leftrightarrow$

$$L^2(y)(s) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}. \text{ Άρα } L(y)(s) = \pm \frac{1}{s-\alpha}, s > \alpha.$$

(β) $L(y)(s) = \pm \frac{1}{s-\alpha} \Leftrightarrow y(t) = L^{-1}\left(\pm \frac{1}{s-\alpha}\right) = \pm e^{at}.$