



# Οικονομοτεχνικά Βέλτιστος Σχεδιασμός Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας

- Ανάλυση ροής ισχύος

Υπεύθυνος μαθήματος  
Θεόφιλος Παπαδόπουλος, Αν. Καθηγητής  
thrapad@ee.duth.gr



# Περιεχόμενα Μαθήματος

- Γενικά
- Διαμόρφωση μαθηματικού μοντέλου
- Μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος ροής φορτίου
- Αξιολόγηση μεθόδων
- Επίλυση του προβλήματος ροής φορτίου
- Παράδειγμα



# Γενικά



# Ροή φορτίου /1

## Βασικά χαρακτηριστικά λειτουργίας ενός ΣΗΕ

- Παραγωγή = Ζήτηση + Απώλειες (Ισοζύγιο ισχύος)
- Οι τάσεις και η συχνότητα στους ζυγούς να είναι κοντά στις ονομαστικές τιμές (εντός ορίων)
- Οι γεννήτριες να λειτουργούν μέσα στα όρια ενεργού και άεργου ισχύος
  - $P_{\min} \leq P \leq P_{\max}, Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$
  - Οικονομικά βέλτιστη λειτουργία του συστήματος
- Οι γραμμές μεταφοράς (ΓΜ) να μην υπερφορτίζονται (θερμικό όριο) και να μην λειτουργούν κοντά στο όριο ευστάθειας τους
- Οι μετασχηματιστές να μην υπερφορτίζονται.
- Να ικανοποιούνται υποχρεώσεις προγραμματισμού ισχύος ως προς τις γραμμές διασύνδεσης με τα γειτονικά συστήματα



## Ροή φορτίου /2

- ✓ Παρόλο που το δίκτυο είναι ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, **δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση** του προβλήματος με **ανάλυση βρόγχων ή κόμβων**.
- ✓ Σε ένα ηλεκτρικό δίκτυο έχουμε ένα μεγάλο **αριθμό μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων** που τις λύνουμε με τη βοήθεια υπολογιστών.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για να υπολογίσουμε και να εξασφαλίσουμε τα προηγούμενα λέγεται **ροή ισχύος ή φορτίου (power flow)**. Με αυτή **υπολογίζουμε:**

- Μέτρο και γωνία τάσης σε κάθε ζυγό
- Ενεργό και άεργο ισχύ σε κάθε γραμμή μεταφοράς
- Απώλειες, άλλα (π.χ. tap settings)



# Ροή φορτίου /3

## Βασικές εφαρμογές ροής φορτίου:

- **Έλεγχος** τάσεων και ροών ισχύος, ώστε να διατηρούνται εντός προκαθορισμένων ορίων λειτουργίας
- **Μελέτη** των επιπτώσεων ενδεχόμενων διαταραχών
- **Επιλογή** της πλέον οικονομικής λειτουργίας των γεννητριών. Κατά τη διάρκεια της ημέρας τα φορτία μεταβάλλονται συνεχώς, οπότε απαιτείται ο εκ νέου υπολογισμός της απαιτούμενης παραγόμενης ισχύος κάθε γεννήτριας
- **Μελέτες** ανάπτυξης και προγραμματισμού του συστήματος

Το πρόβλημα της ροής ισχύος διαιρείται σε δύο επί μέρους προβλήματα:

- Διαμόρφωση κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου
- Επίλυση του προβλήματος με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης



---

# Διαμόρφωση μαθηματικού μοντέλου

---



# Το πρόβλημα /1

- ✓ Η ανάλυση ροής φορτίου είναι βασικά μια μέθοδος υπολογισμού του **μέτρου της τάσης** και **της γωνίας** σε κάθε ζυγό του συστήματος, κάτω από συμμετρικές τριφασικές συνθήκες σε σταθερή κατάσταση.

## Δεδομένα εισόδου:

- Δεδομένα ζυγών
- Δεδομένα γραμμών μεταφοράς και μετασχηματιστών
- Μέγεθος, τύπος και τοποθεσία φορτίων





## Το πρόβλημα /2

Κάθε ζυγός έχει τέσσερις μεταβλητές συνδεδεμένες με αυτόν:

- 1) Συνολική ενεργός ισχύς  $P$  (active power)
- 2) Συνολική άεργος ισχύς  $Q$  (reactive power)
- 3) Μέτρο φασικής τάσης  $V$  (voltage magnitude)
- 4) Γωνία φασικής τάσης  $\delta$  (phase angle)

Για σύστημα  $n$  ζυγών:

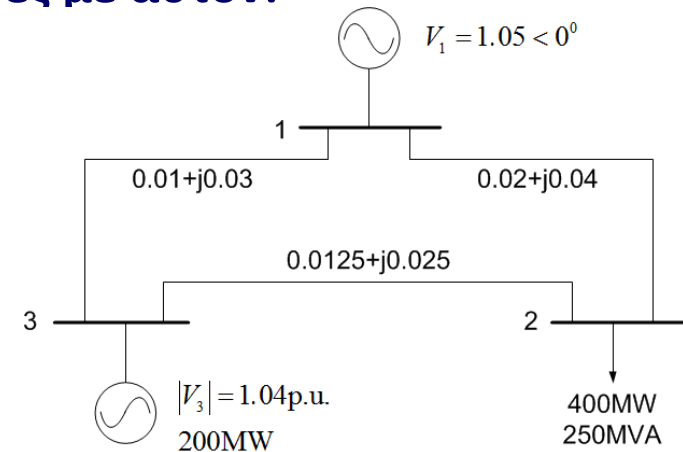
- $2n$  εξισώσεις ροής φορτίου
- $4n$  μεταβλητές



Περιορισμός μεταβλητών:

- $2$  μεταβλητές ανά ζυγό είναι ανεξάρτητες μεταβλητές
- Οι υπόλοιπες  $2$  καθορίζονται

$$\bar{I} = \frac{P - jQ}{\bar{U}^*}$$





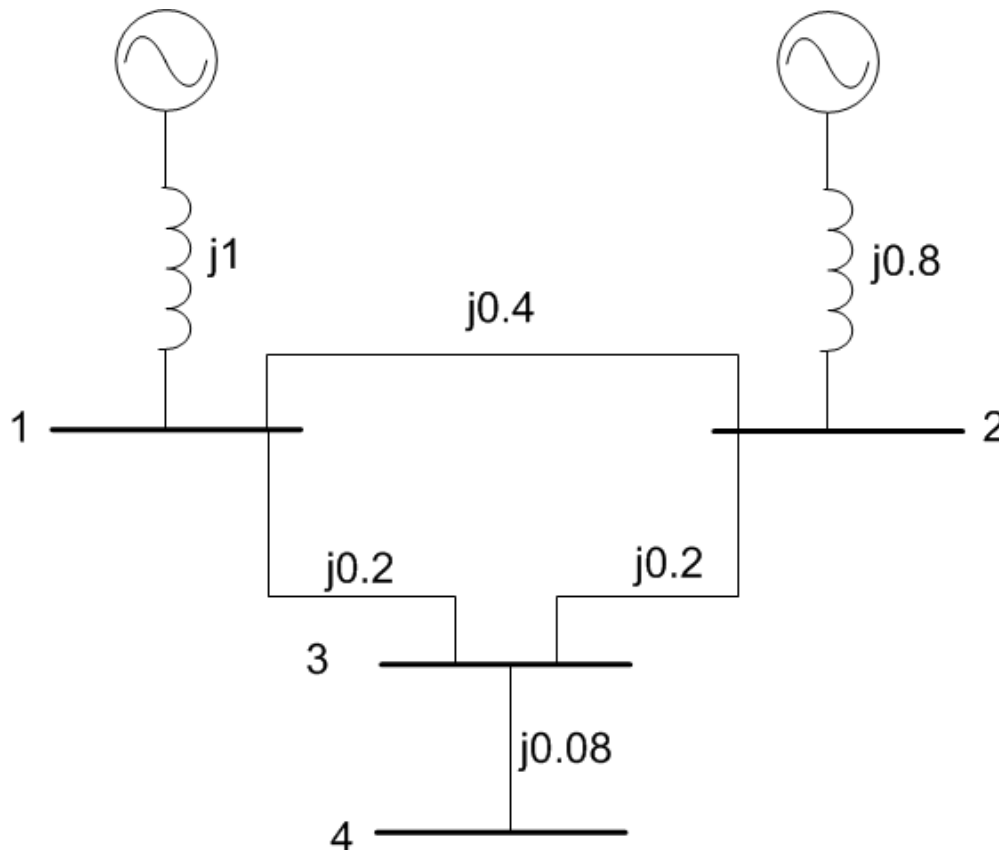
# Ζυγοί του συστήματος

Τύπος ζυγού	Γνωστές Μεταβλητές	Άγνωστες Μεταβλητές
Ταλάντωσης ή αναφοράς (slack bus)	$V=1, \delta=0^\circ$	$P, Q$
Ζυγός ελεγχόμενος από τάση (PV)	$P, V$	$Q, \delta$
Ζυγός φορτίων (PQ)	$P, Q$	$V, \delta$



# Εξισώσεις δικτύου /1

Έστω ότι έχουμε το πιο κάτω δίκτυο (για ευκολία αγνοούμε τις αντιστάσεις)

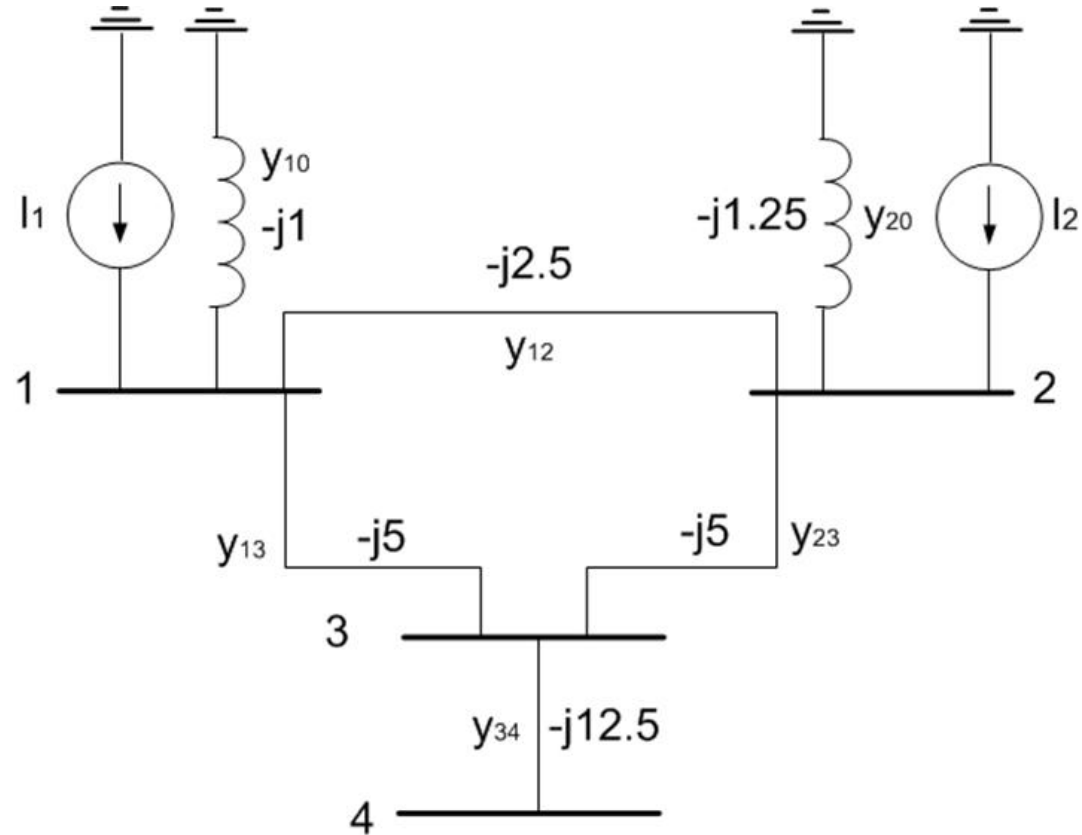




## Εξισώσεις δικτύου /2

Μετατρέποντας όλες τις σύνθετες **αντιδράσεις (impedances)** σε **σύνθετες αγωγιμότητες (admittances)**:

$$y_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} = \frac{1}{r_{ij} + jx_{ij}}$$





## Εξισώσεις δικτύου /3

Εξισώσεις στους κόμβους του συστήματος:

■ Κόμβος 1

$$I_1 = y_{10}V_1 + y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3)$$

■ Κόμβος 2

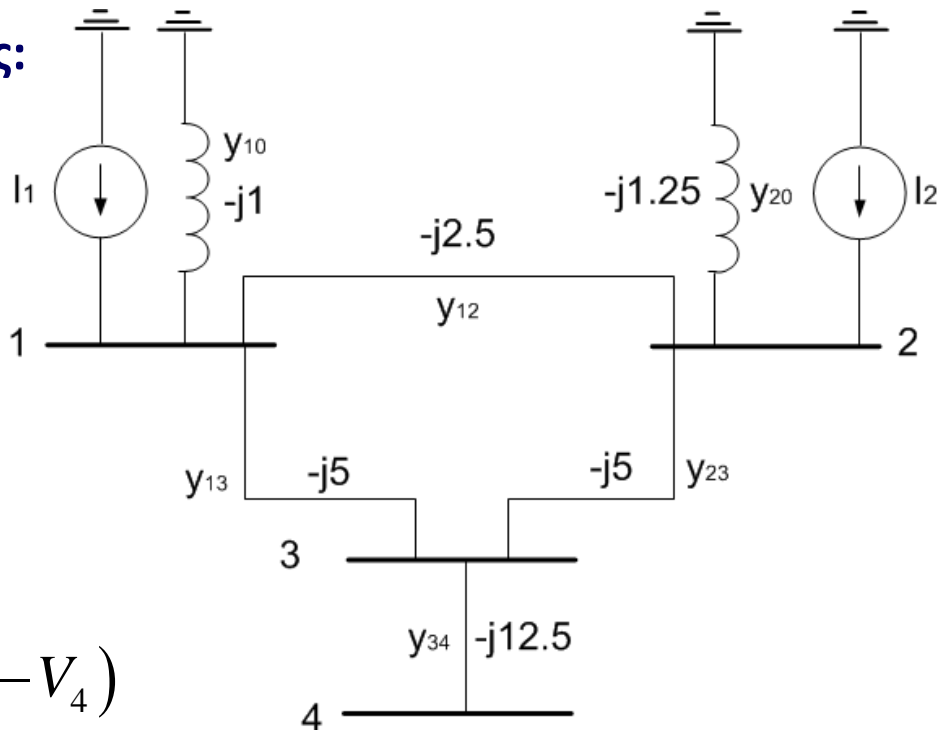
$$I_2 = y_{20}V_2 + y_{12}(V_2 - V_1) + y_{23}(V_2 - V_3)$$

■ Κόμβος 3

$$0 = y_{13}(V_3 - V_1) + y_{23}(V_3 - V_2) + y_{34}(V_3 - V_4)$$

■ Κόμβος 4

$$0 = y_{34}(V_4 - V_3)$$





## Εξισώσεις δικτύου /4

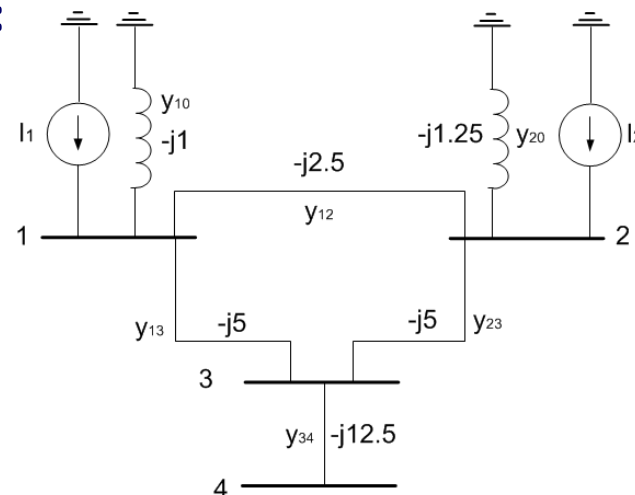
Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφτούν και ως εξής:

$$I_1 = (y_{10} + y_{12} + y_{13})V_1 - y_{12}V_2 - y_{13}V_3$$

$$I_2 = -y_{12}V_1 + (y_{20} + y_{12} + y_{23})V_2 - y_{23}V_3$$

$$0 = -y_{13}V_1 - y_{23}V_2 + (y_{13} + y_{23} + y_{34})V_3 - y_{34}V_4$$

$$0 = -y_{34}V_3 + y_{34}V_4$$



Γράφοντας τις εξισώσεις σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{10} + y_{12} + y_{13}) & -y_{12} & -y_{13} & 0 \\ -y_{12} & (y_{20} + y_{12} + y_{23}) & -y_{23} & 0 \\ -y_{13} & -y_{23} & (y_{13} + y_{23} + y_{34}) & -y_{34} \\ 0 & 0 & -y_{34} & y_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$



## Εξισώσεις δικτύου /5

Άρα, μπορούμε να βρούμε τα στοιχεία του “πίνακα αγωγιμότητας” (bus admittance matrix) χρησιμοποιώντας:

$$Y_{ii} = \sum_{j=0}^n y_{ij}, \quad j \neq i, \quad \text{self-admittance}$$

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \quad i \neq j, \quad \text{mutual admittance}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε σε γενική μορφή:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \Rightarrow I = YV$$



## Εξισώσεις δικτύου /6

- Το πρόβλημα επομένως για την περίπτωση π.χ. του ζυγού  $i$  από τους συνολικά  $n$  γράφεται:

$$\bar{I}_i = \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{im} \cdot \bar{U}_m$$

- Αλλιώς συναρτήσει της ισχύος:

$$P_i - jQ_i = \bar{U}_i^* \cdot \sum_{m=1}^n \bar{Y}_{im} \cdot \bar{U}_m$$

- $2n$  εξισώσεις που απαρτίζουν ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα
- για την επίλυση του συστήματος, ανάλογα με τον τύπο του ζυγού, υπολογίζονται οι **άγνωστοι όροι** με χρήση μια **επαναληπτικής μεθόδου αριθμητικής ανάλυσης**





# Μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος ροής ισχύος



## Γενικά

### Επαναληπτικές μέθοδοι ή μέθοδοι ανακυκλώσεως:

- Επαναληπτική μέθοδος Jacobi / Gauss
- Gauss-Seidel
- Newton-Raphson

### Επίλυση:

- Προτείνεται μια αρχική λύση
- Η αρχική λύση δίνει μια καλύτερη νέα λύση χρησιμοποιώντας την  $f(x) = 0$
- Η δεύτερη λύση χρησιμοποιείται για την εύρεση τρίτης λύσης κ.τ.λ.



# Περιορισμοί (constraints)

## Όρια:

- Τα **μέτρα των τάσεων** των ζυγών να βρίσκονται μέσα σε συγκεκριμένα όρια ανοχής
- Οι **γωνιακές διαφορές** ορισμένων ζυγών να παραμένουν κάτω από ορισμένο όριο, το οποίο υπαγορεύεται από λόγους ηλεκτρικής ευστάθειας
- Οι **ισχύεις παραγωγής** να βρίσκονται μέσα σε συγκεκριμένα όρια
- **Πρόσθετοι περιορισμοί** ώστε το σύστημα να λειτουργεί κατά το βέλτιστο οικονομικά τρόπο (οικονομικοί περιορισμοί)

$$U_{i\min} < U_i < U_{i\max}$$

$$|\delta_i - \delta_j| < |\delta_i - \delta_j|_{\max}$$

$$P_{G1,\min} < P_{G1} < P_{G1,\max}$$

$$Q_{G1,\min} < Q_{G1} < Q_{G1,\max}$$



# Μέθοδος Newton-Raphson /1

- Χρησιμοποιείται πολύ συχνά λόγω της μη γραμμικότητας του δικτύου.
- Βασίζεται σε **μια αρχική τιμή κοντά στη ρίζα της συνάρτησης** και στη **σειρά Taylor** (Taylor series).
- Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση  $f(x)=0$  και ότι μια από τις ρίζες της είναι η  $\hat{x}$
- Έστω ότι υποθέτουμε μια αρχική τιμή για το  $x$ ,  $x_0$ , και η διαφορά του  $x_0$  από την πραγματική ρίζα είναι  $\Delta x$ :

$$\hat{x} = x_0 + \Delta x \Leftrightarrow f(\hat{x}) = f(x_0 + \Delta x) = 0$$

**Χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor:**

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= f(x_0) + f'(x_0)(\hat{x} - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(\hat{x} - x_0)^2 + \dots \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x_0 + \Delta x - x_0)^2 + \dots \\ &= f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots \end{aligned}$$



# Μέθοδος Newton-Raphson /2

Αν κρατήσουμε **μόνο τους δύο πρώτους όρους**:

$$f(\hat{x}) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) \approx 0$$

$$\Rightarrow \Delta x \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Αφού  $\hat{x} = x_0 + \Delta x$ , τότε το  $\hat{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$  πρέπει να είναι καλύτερη προσέγγιση για την πραγματική ρίζα.

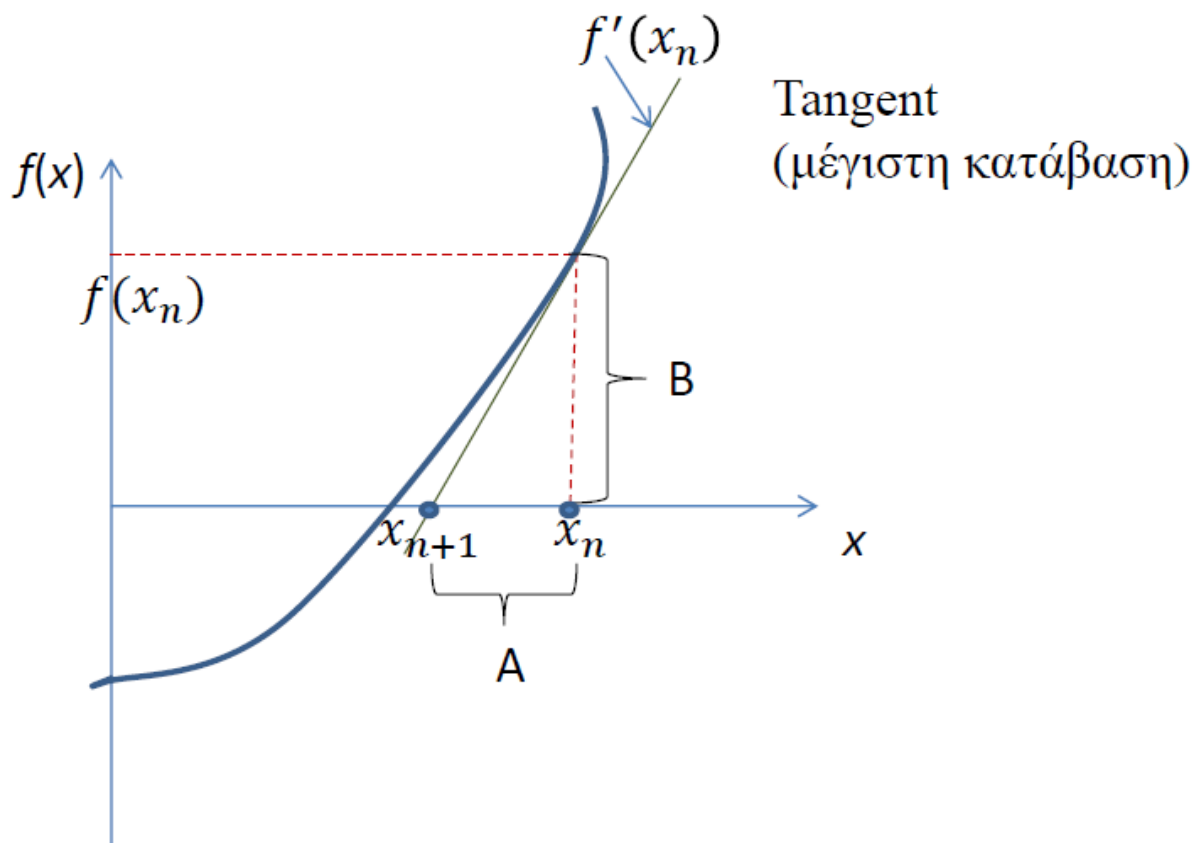
Οπότε σε **επαναληπτική μορφή** γράφεται:

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + \Delta x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



# Μέθοδος Newton-Raphson /3

$$f'(x_n) = \frac{B}{A} = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$





# Μέθοδος Newton-Raphson /4

## Παράδειγμα:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

$$f'(x) = -e^{-x} - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{-x_n} - x_n}{-e^{-x_n} - 1}$$

$n$	$x$
0	1
1	0.5379
2	0.5670
3	0.5671
...	...

← Αρχική τιμή για  $n=0$



## Μέθοδος Newton-Raphson /5

Αν αυτή την ιδέα τη **γενικεύσουμε** για την περίπτωση που έχουμε πέραν του ενός αγνώστου, δηλαδή:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ \dots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

και έστω ότι η λύση μας είναι  $\hat{x}$  ώστε  $f(\hat{x}) = 0$  και  $\hat{x} = x_0 + \Delta x$  τότε μπορούμε να γράψουμε τις ίδιες εξισώσεις με τη σειρά Taylor όπως και προηγουμένως:

$$\begin{aligned} f_1(\hat{x}) &\approx f_1(x_0) + \frac{df_1(x_0)}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{df_1(x_0)}{dx_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{df_1(x_0)}{dx_n} \Delta x_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ f_n(\hat{x}) &\approx f_n(x_0) + \frac{df_n(x_0)}{dx_1} \Delta x_1 + \frac{df_n(x_0)}{dx_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{df_n(x_0)}{dx_n} \Delta x_n \end{aligned}$$





# Μέθοδος Newton-Raphson /6

$$f(\hat{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ \dots \\ f_n(x_0) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{df_1(x_0)}{dx_1} & \frac{df_1(x_0)}{dx_2} & \dots & \frac{df_1(x_0)}{dx_n} \\ \frac{df_2(x_0)}{dx_1} & \frac{df_2(x_0)}{dx_2} & \dots & \frac{df_2(x_0)}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n(x_0)}{dx_1} & \frac{df_n(x_0)}{dx_2} & \dots & \frac{df_n(x_0)}{dx_n} \end{bmatrix}}_{J(x_0)} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

**$J(x_0)$ : Jacobian matrix (nxn)**

$$\Delta x \approx -J(x_0)^{-1} f(x_0) \quad (\text{αφού } f(\hat{x}) = 0)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - J(x_n)^{-1} f(x_n)$$

- Για **κάθε επανάληψη** δημιουργείται ένας νέος Ιακωβιανός πίνακας
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να πληρωθεί το **όριο ανοχής** για όλες τις  $x_i$
- Οι **αρχικές εκτιμήσεις** αν είναι μακριά από τη λύση μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλο σφάλμα



# Παράδειγμα με Newton-Raphson /1

## Παράδειγμα:

Βρείτε το  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

ούτως ώστε:  $f(\bar{x}) = 0$

Όπου:  $f_1(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 8 = 0$

$$f_2(\bar{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 - 4 = 0$$



# Παράδειγμα με Newton-Raphson /2

Ο Ιακωβιανός πίνακας γράφεται:

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{df_1(\bar{x})}{dx_1} & \frac{df_1(\bar{x})}{dx_2} \\ \frac{df_2(\bar{x})}{dx_1} & \frac{df_2(\bar{x})}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 & -2x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1_{n+1}} \\ x_{2_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1_n} \\ x_{2_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 & -2x_2 + x_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_n) \\ f_2(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$



# Παράδειγμα με Newton-Raphson /3

Έστω ότι (αρχικές συνθήκες):  $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Επανάληψη 1:  $\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.3 \end{bmatrix}$

Επανάληψη 2:  $\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8.4 & 2.6 \\ 5.5 & -0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.51 \\ 1.45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8284 \\ 1.2122 \end{bmatrix}$

...και συνεχίζουμε μέχρι τη σύγκλιση



---

# Επίλυση του προβλήματος ροής φορτίου

---



# Εφαρμογή μεθόδου NR /1

Είδαμε ότι:  $\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$

Για το ζυγό  $k$ :  $\bar{I}_k = \sum_{n=1}^N \bar{Y}_{kn} \cdot \bar{U}_n$

Η ισχύς που παράγεται από τον ζυγό  $k$  είναι:

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k \cdot I_k^* = \bar{V}_k \left( \sum_{n=1}^N \bar{Y}_{kn} \cdot \bar{U}_n \right)^*$$

$$= V_k \angle \delta_k \left( \sum_{n=1}^N Y_{kn} \angle \theta_{kn} \cdot V_n \angle \delta_n \right)^*$$

$$= V_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \angle \delta_k - \delta_n - \theta_{kn}$$



## Εφαρμογή μεθόδου NR /2

Αν ξεχωρίσουμε το πραγματικό από το φανταστικό μέρος έχουμε:

$$P_k = V_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$$

$$Q_k = V_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$$

- ✓ Άρα, για κάθε ζυγό έχουμε **δύο εξισώσεις** και **δύο αγνώστους**.
- ✓ Το πρόβλημα είναι ότι έχουμε να λύσουμε **ταυτόχρονα ένα μεγάλο αριθμό μη γραμμικών εξισώσεων**. Για να το καταφέρουμε αυτό χρησιμοποιούμε μια επαναληπτική μέθοδο, όπως τον αλγόριθμο Newton-Raphson



## Εφαρμογή μεθόδου NR /3

- ✓ Έστω ότι ο **slack bus** είναι ο **bus 1** του οποίου ορίζουμε το μέτρο και τη γωνία τάσης.
- ✓ Άρα, οι **άγνωστοι** μας είναι τα **μέτρα** και οι **γωνίες** της τάσης στους υπόλοιπους  $(n-1)$  ζυγούς.

$$x = \begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \dots \\ \delta_n \\ V_2 \\ V_3 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \quad f(x) = \begin{bmatrix} P_{G_2} - P_{D_2} - P_2(x) \\ \dots \\ P_{G_n} - P_{D_n} - P_n(x) \\ Q_{G_2} - Q_{D_2} - Q_2(x) \\ \dots \\ Q_{G_n} - Q_{D_n} - Q_n(x) \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n + J(x_n)^{-1} f(x_n)$$





## Εφαρμογή μεθόδου NR /4

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dP_2}{d\delta_2} & \dots & \frac{dP_2}{d\delta_n} & \frac{dP_2}{d|V_2|} & \dots & \frac{dP_2}{d|V_n|} \\ \dots & \mathbf{J_1} & \dots & \dots & \mathbf{J_2} & \dots \\ \frac{dP_n}{d\delta_2} & \dots & \frac{dP_n}{d\delta_n} & \frac{dP_n}{d|V_2|} & \dots & \frac{dP_n}{d|V_n|} \\ \frac{dQ_2}{d\delta_2} & \dots & \frac{dQ_2}{d\delta_n} & \frac{dQ_2}{d|V_2|} & \dots & \frac{dQ_2}{d|V_n|} \\ \dots & \mathbf{J_3} & \dots & \dots & \mathbf{J_4} & \dots \\ \frac{dQ_n}{d\delta_2} & \dots & \frac{dQ_n}{d\delta_n} & \frac{dQ_n}{d|V_2|} & \dots & \frac{dQ_n}{d|V_n|} \end{bmatrix} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} \mathbf{J_1} & \mathbf{J_2} \\ \mathbf{J_3} & \mathbf{J_4} \end{bmatrix}$$



## Εφαρμογή μεθόδου NR /5

Πρέπει να βρούμε τα στοιχεία της Jacobian:  $P_k = V_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$

$$Q_k = V_k \sum_{n=1}^N Y_{kn} \cdot V_n \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$$

**J1:** •  $\frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} = -|V_k| \sum_{n=1, n \neq k}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$  - diagonal elements

•  $\frac{\partial P_k}{\partial \delta_n} = |V_k| \cdot |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn}), n \neq k$  - off-diagonal elements

**J2:** •  $\frac{\partial P_k}{\partial |V_k|} = 2|V_k| \cdot |Y_{kk}| \cdot \cos(\theta_{kk}) + \sum_{n=1, n \neq k}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$

•  $\frac{\partial P_k}{\partial |V_n|} = |V_k| \cdot |Y_{kn}| \cdot \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn}), n \neq k$



## Εφαρμογή μεθόδου NR /6

**J3:** •  $\frac{\partial Q_k}{\partial \delta_k} = |V_k| \sum_{n=1, n \neq k}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$

•  $\frac{\partial Q_k}{\partial \delta_n} = -|V_k| \cdot |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn}), n \neq k$

**J4:** •  $\frac{\partial Q_k}{\partial |V_k|} = -2|V_k| \cdot |Y_{kk}| \cdot \sin(\theta_{kk}) + \sum_{n=1, n \neq k}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cdot \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$

•  $\frac{\partial Q_k}{\partial |V_n|} = |V_k| \cdot |Y_{kn}| \cdot \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn}), n \neq k$



## Εφαρμογή μεθόδου NR /7

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_k &= P_k^{\text{επιβεβλημένη}} - P_k^n \\ \Delta Q_k &= Q_k^{\text{επιβεβλημένη}} - Q_k^n \end{aligned} \right\} \text{Διαφορά ισχύος}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix}_n$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}_n$$



# Σύνοψη εφαρμογής NR για ροή φορτίου /1

## 1. Ορισμός προβλήματος

- **Slack bus:** ορίζουμε τη γωνία της τάσης μηδέν μοίρες και την τάση στην επιθυμητή τάση της γεννήτριας
- **Ζυγί γεννητριών:** Επιθυμητή ισχύς και τάση. Γωνία μηδέν μοίρες (εκτίμηση)
- **Ζυγί φορτίων:** Ισχύς στις επιθυμητές τιμές

## 2. Υπολογισμός διαφοράς ισχύος

- **Ζυγί φορτίων:** Υπολογίζουμε τα  $P_k^n$  και  $Q_k^n$  από τις εξισώσεις ροής ισχύος χρησιμοποιώντας τις **γνωστές** και **υπολογιζόμενες τάσεις**
- **Ζυγί γεννητριών:** Υπολογίζουμε την  $P_k^n$
- Υπολογίζουμε τα  $\Delta P_k^n$  και  $\Delta Q_k^n$  σε κάθε ζυγό.

## 3. Δημιουργούμε τον **Jacobian** από τις διαφορικές εξισώσεις.

4. Επιλύουμε την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}$$

Άρα υπολογίζονται τα  $\Delta \delta$  και  $\Delta V$ .



## Σύνοψη εφαρμογής NR για ροή φορτίου /2

5. Υπολογίζουμε τις νέες τιμές για το μέτρο και τη γωνία της τάσης,  $V^{n+1}, \delta^{n+1}$
6. Συνεχίζουμε τη διαδικασία από το βήμα (2) μέχρις ότου οι αποκλίσεις είναι μικρότερες από την προκαθορισμένη ακρίβεια  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned} |\Delta P_k^n| &\leq \epsilon \\ |\Delta Q_k^n| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

7. Υπολογίζουμε τις ροές σε κάθε μεριά της γραμμής. Άρα:

$$\text{Απώλειες γραμμής} = S_{ij} + S_{ji}$$

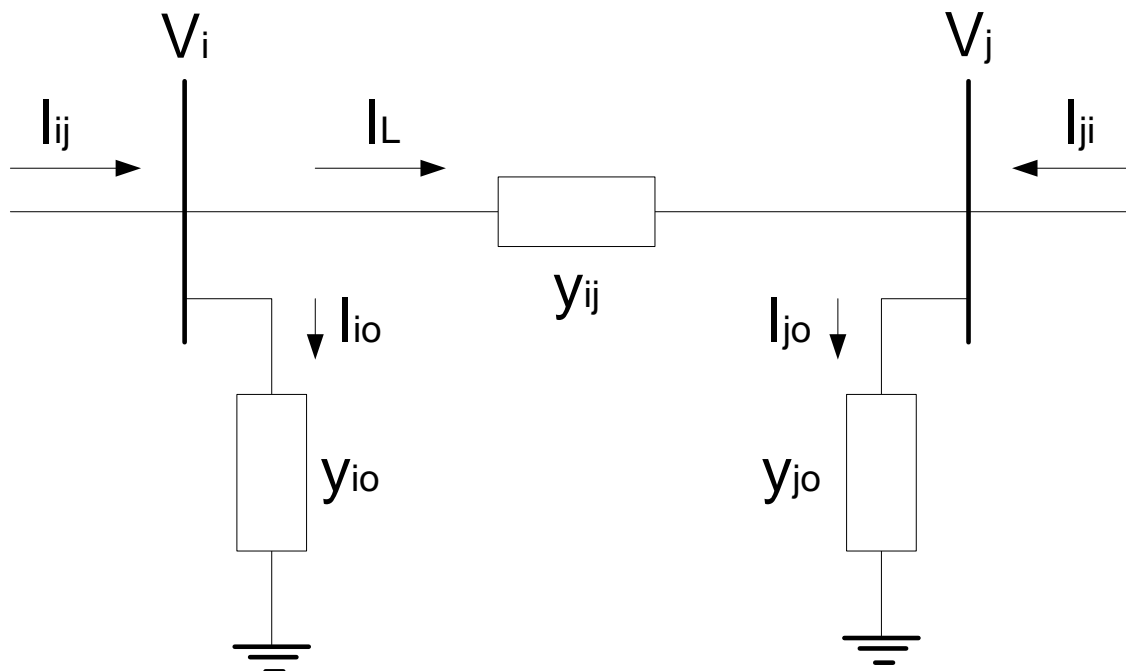
Επίσης, υπολογίζουμε τα:

- $P$  και  $Q$  στο slack bus
- $Q$  στα PV buses.



## Υπολογισμός απωλειών /1

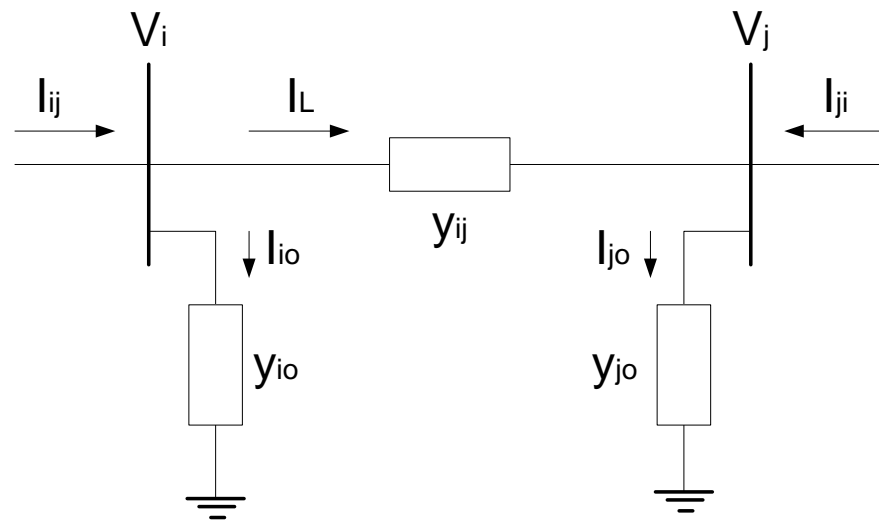
- ✓ Αφού βρούμε τις τάσεις και τις γωνίες σε κάθε ζυγό, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή ισχύος στην κάθε γραμμή και τις απώλειες στη γραμμή.
- ✓ Έστω ότι έχουμε την πιο κάτω γραμμή:





## Υπολογισμός απωλειών /2

Η ροή ισχύος υπολογίζεται σε κάθε άκρο της γραμμής.



Για τη ροή από το ζυγό  $i$  στο ζυγό  $j$ :

$$I_{ij} = I_L + I_{io} = y_{ij}(V_i - V_j) + y_{io}V_i$$

$$S_{ij} = V_i I_{ij}^* = |V_i|^2 (y_{ij} + y_{io})^* - V_i y_{ij}^* V_j^*$$

Για τη ροή από το ζυγό  $j$  στο ζυγό  $i$ :

$$I_{ji} = -I_L + I_{jo} = y_{ij}(V_j - V_i) + y_{jo}V_j$$

$$S_{ji} = V_j I_{ji}^* = |V_j|^2 (y_{ij} + y_{jo})^* - V_j y_{ij}^* V_i^*$$

**Απώλειες:**  $S_{loss} = S_{ij} + S_{ji}$

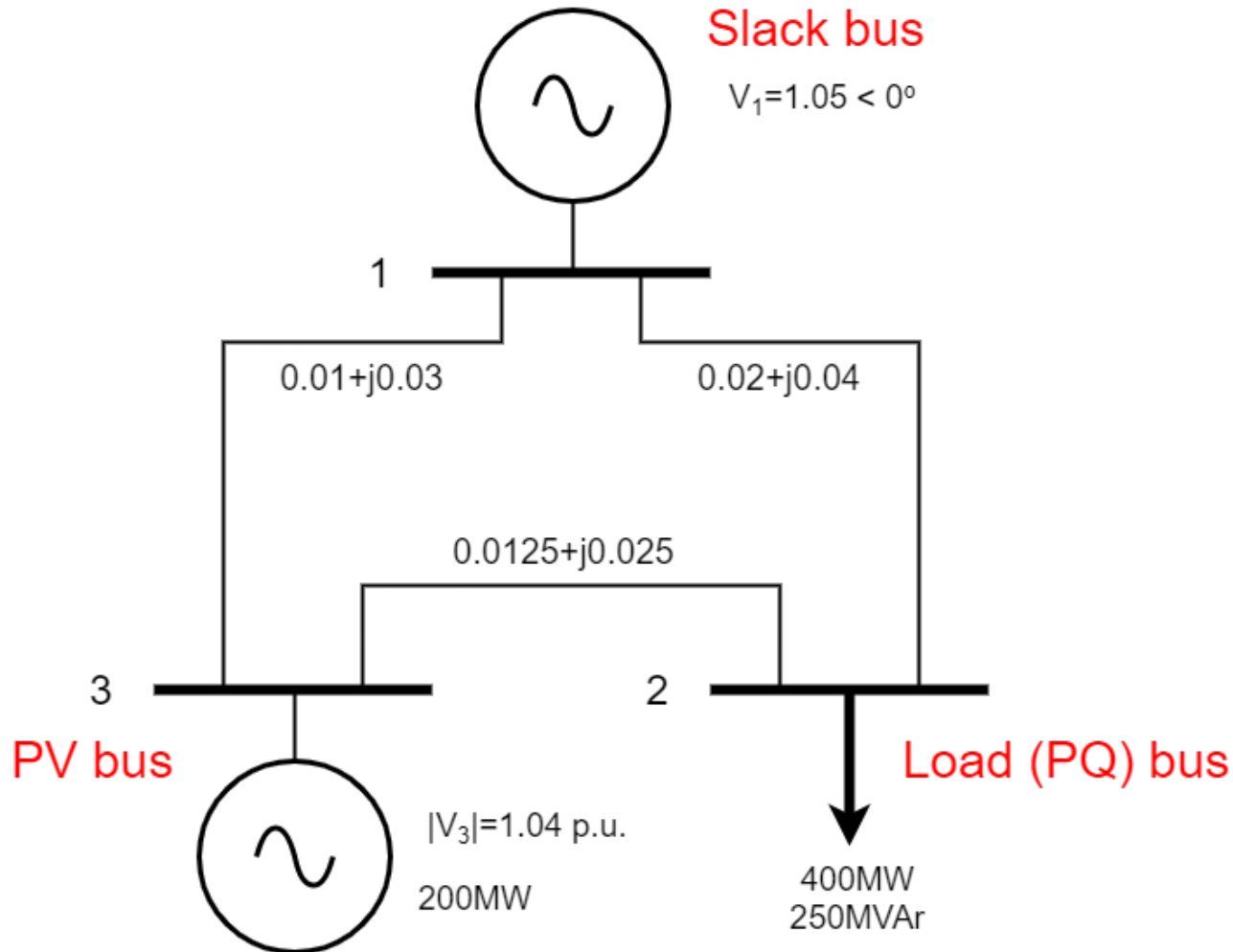




# Παράδειγμα



# Παράδειγμα δικτύου





## Πίνακες αγωγιμοτήτων

- ✓ Το **1<sup>ο</sup> βήμα** είναι να βρούμε τον πίνακα αγωγιμότητας ( $Y_{bus}$ ).
- ✓ Μετατρέπουμε τις **αντιδράσεις** σε **αγωγιμότητες**

$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{0.02 + j0.04} = 10 - j20 \text{ p.u.}$$

$$y_{13} = \frac{1}{z_{13}} = \frac{1}{0.01 + j0.03} = 10 - j30 \text{ p.u.}$$

$$y_{23} = \frac{1}{z_{23}} = \frac{1}{0.0125 + j0.02} = 16 - j32 \text{ p.u.}$$

- ✓ Σχέσεις για τα **διαγώνια** και τα **αμοιβαία** στοιχεία του πίνακα αγωγιμότητας:

$$Y_{ii} = \sum_{j=0}^n y_{ij}, \quad j \neq i, \quad \text{self-admittance}$$

$$Y_{ij} = Y_{ji} = -y_{ij} \quad i \neq j, \quad \text{mutual admittance}$$



## Παράδειγμα /2

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} (y_{13} + y_{12}) & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & (y_{12} + y_{23}) & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & (y_{13} + y_{23}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 - j50 & -10 + j20 & -10 + j30 \\ -10 + j20 & 26 - j52 & -16 + j32 \\ -10 + j30 & -16 + j32 & 26 - j62 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_{bus} = \begin{bmatrix} 53.9 \angle -1.19 & 22.4 \angle 2.03 & 31.6 \angle 1.89 \\ 22.4 \angle 2.03 & 58.1 \angle -1.11 & 35.8 \angle 2.03 \\ 31.6 \angle 1.89 & 35.8 \angle 2.03 & 67.2 \angle -1.17 \end{bmatrix}$$

**Προσοχή: Οι γωνίες είναι σε rad**



## Παράδειγμα /3

### Βήμα 1<sup>ο</sup>: Ορισμός προβλήματος

$$V_1 = 1.05 \angle 0^\circ \text{ (slack bus)}$$

$$V_2 = 1 \angle 0^\circ \text{ (εκτίμηση)}$$

$$V_3 = 1.04 \angle 0^\circ \text{ (το μέτρο δίνεται)}$$

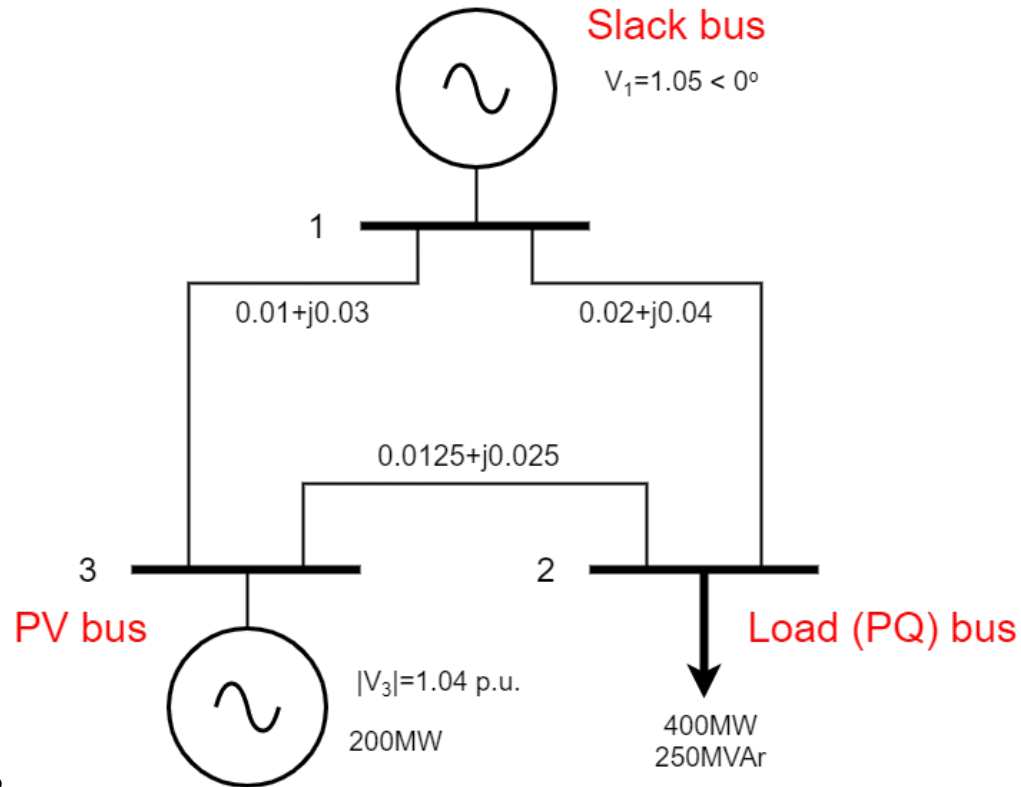
### Επίσης ισχύει από τα δεδομένα:

$$S_B = 100 \text{ MVA}$$

$$P_2^{\text{επιβεβλημένη}} = -4 \text{ p.u. (load)} \leftrightarrow \delta_2$$

$$P_3^{\text{επιβεβλημένη}} = 2 \text{ p.u. (gen)} \leftrightarrow \delta_3$$

$$Q_2^{\text{επιβεβλημένη}} = -2.5 \text{ p.u. (load)} \leftrightarrow |V_2|$$





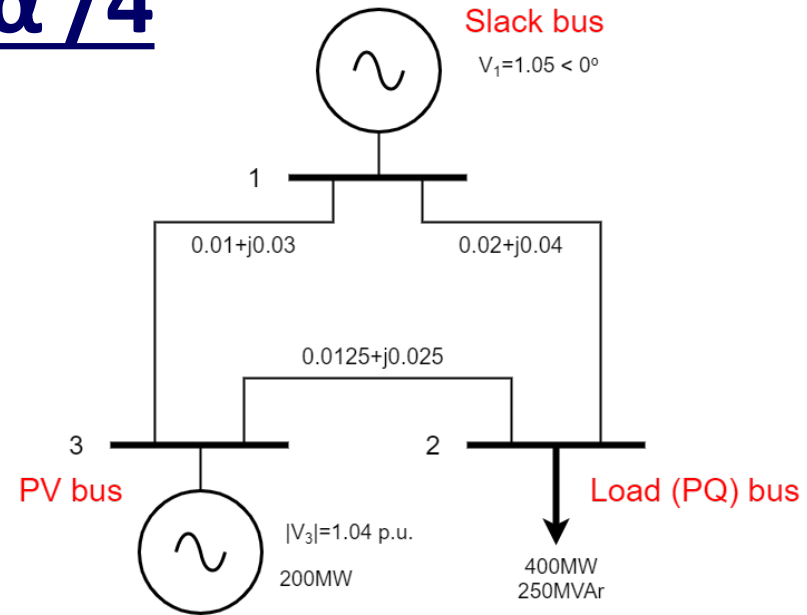
## Παράδειγμα /4

### Βήμα 2<sup>ο</sup>: Υπολογισμός διαφορών ισχύος

Εξισώσεις ροής ισχύος:

$$P_k = |V_k| \sum_{n=1}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \cos(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$$

$$Q_k = |V_k| \sum_{n=1}^N |Y_{kn}| \cdot |V_n| \sin(\delta_k - \delta_n - \theta_{kn})$$



- Για τον υπολογισμό των **αποκλίσεων** στο φορτίο (**bus 2**) θα χρειαστούμε τα  **$P_2$**  και  **$Q_2$** .
- Για τον υπολογισμό των **αποκλίσεων** στον ζυγό γεννήτριας (**bus 3**) θα χρειαστούμε το  **$P_3$** .
- Άρα, πρέπει να βρούμε την έκφραση αυτών των ισχύων χρησιμοποιώντας τις πιο πάνω σχέσεις.



## Παράδειγμα /4

Οι σχέσεις είναι:

$$P_2 = 23.52|V_2|\cos(\delta_2 - 2.03) + 25.83|V_2|^2 + 37.23|V_2|\cos(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$

$$Q_2 = 23.52|V_2|\sin(\delta_2 - 2.03) + 52.04|V_2|^2 + 37.23|V_2|\sin(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$

$$P_3 = 34.51\cos(\delta_3 - 1.89) + 37.23|V_2|\cos(\delta_3 - \delta_2 - 2.03) + 28.36$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο πάνω σχέσεις για να δημιουργήσουμε τον **Jacobian πίνακα**.



## Παράδειγμα /5

### Βήμα 3<sup>ο</sup>: Δημιουργία Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dP_2}{d\delta_2} & \frac{dP_2}{d\delta_3} & \frac{dP_2}{d|V_2|} \\ \frac{dP_3}{d\delta_2} & \frac{dP_3}{d\delta_3} & \frac{dP_3}{d|V_2|} \\ \frac{dQ_2}{d\delta_2} & \frac{dQ_2}{d\delta_3} & \frac{dQ_2}{d|V_2|} \end{bmatrix}$$





## Παράδειγμα /6

J1:

$$\frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} = -23.52|V_2|\sin(\delta_2 - 2.03) - 37.23|V_2|\sin(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} = -34.51\sin(\delta_3 - 1.89) - 37.23|V_2|\sin(\delta_3 - \delta_2 - 2.03)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} = 37.23|V_2|\sin(\delta_2 - \delta_2 - 2.03)$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} = 37.23|V_2|\sin(\delta_3 - \delta_2 - 2.03)$$



## Παράδειγμα /7

$$\mathbf{J2:} \quad \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} = 51.67 |V_2| + 23.52 \cos(\delta_2 - 2.03) + 37.23 \cos(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial |V_2|} = 37.23 \cos(\delta_3 - \delta_2 - 2.03)$$

$$\mathbf{J3:} \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} = 23.52 |V_2| \cos(\delta_2 - 2.03) + 37.23 |V_2| \cos(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \delta_3} = -37.23 |V_2| \cos(\delta_2 - \delta_2 - 2.03)$$

$$\mathbf{J4:} \quad \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} = 104.08 |V_2| + 23.52 \sin(\delta_2 - 2.03) + 37.23 \sin(\delta_2 - \delta_3 - 2.03)$$



## Παράδειγμα /8

### Βήμα 4<sup>ο</sup>: Επίλυση εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_B = 100 \text{MVA} \\ P_2^{\text{επιβεβλημένη}} = -4 \text{ p.u. (load)} \leftrightarrow \delta_2 \\ P_3^{\text{επιβεβλημένη}} = 2 \text{ p.u. (gen)} \leftrightarrow \delta_3 \\ Q_2^{\text{επιβεβλημένη}} = -2.5 \text{ p.u. (load)} \leftrightarrow |V_2| \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} P_2^{\text{επιβεβλημένη}} \\ P_3^{\text{επιβεβλημένη}} \\ Q_2^{\text{επιβεβλημένη}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ Q_2 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ Q_2 \end{bmatrix}_n$$

### Πρώτη επανάληψη:

$$\begin{bmatrix} V_2^0 = 1 \text{ p.u.} \\ \delta_2^0 = 0 \\ \delta_3^0 = 0 \end{bmatrix}$$

από τις  
εξισώσεις  
ροής ισχύος

$$P_2^0 = -1.09 \text{ p.u.}$$

$$Q_2^0 = -2.42 \text{ p.u.}$$

$$P_3^0 = 1.03 \text{ p.u.}$$



## Παράδειγμα /9

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.09 \\ 1.03 \\ -2.42 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.97 \\ -0.08 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}_0^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}_0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 54.46 & -33.37 & 24.74 \\ -33.37 & 66.14 & -16.50 \\ -26.93 & 16.50 & 50.34 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2.91 \\ 0.97 \\ -0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0537 \\ -0.0185 \\ -0.0243 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \delta \\ |V| \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \delta \\ |V| \end{bmatrix}_0 + \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0537 \\ -0.0185 \\ -0.0243 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0537 \\ -0.0185 \\ 0.9757 \end{bmatrix}$$

Λύση πρώτης  
επανάληψης



## Παράδειγμα /10

### Δεύτερη επανάληψη

Αντικαθιστώντας τις λύσεις της πρώτης επανάληψης στις εξισώσεις ροής ισχύος  $P_k$  και  $Q_k$  παίρνουμε:

$$\left. \begin{array}{l} P_2' = -3.81 \text{ p.u.} \\ P_3' = 1.976 \text{ p.u.} \\ Q_2' = -2.43 \text{ p.u.} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.91 \\ 1.976 \\ -2.43 \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} -0.09 \\ 0.024 \\ -0.07 \end{bmatrix}$$

·  
·

Πρέπει να θέσουμε ένα **κριτήριο σύγκλισης (tolerance)**.

Έστω ότι:

·  
·

$$\varepsilon \leq 10^{-3}$$

Συνεχίζουμε μέχρι τη σύγκλιση...



## Πηγές - Αναφορές

- Μ. Παντελή, *Ανάλυση Συστημάτων Ηλεκτρικής Ισχύος*, ΤΗΜΜΥ, Πανεπιστήμιο Κύπρου
- Α. Σαφιγιάννη, *Σημειώσεις ΣΗΕ*, ΤΗΜΜΥ, ΔΠΘ.
- Π. Μαλατέστας, *Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας*, Εκδόσεις Τζιόλα