Ερωτήσεις στο μάθημα Στοχαστικών Διεργασιών.
Του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

1. Πώς ορίζεται μια στοχαστική διεργασία (σ.δ.); Αναφέρατε μερικά παραδείγματα σ.δ. στις επικοινωνίες και στον έλεγχο συστημάτων.
2. Τι εννοούμε με τους όρους «εξομάλυνση» και «πρόβλεψη» στην περίπτωση μιας στοχ. διεργασίας;
3. Πότε μια σ.δ. ονομάζεται χρονοσειρά; Ποιά είναι η σπουδαιότητα των χρονοσειρών στην επεξεργασία των στοχαστικών σημάτων;
4. Τι γνωρίζετε για την Brownian κίνηση; Πως ορίζετε η Wiener διεργασία και γιατί θεωρείται μια προσέγγιση για τη κίνηση Brown; Είναι η διεργασία Wiener στάσιμη;
5. Τι γνωρίζετε για τη διεργασία Poisson; Με ποιό τρόπο η διεργασία Poisson εμπλέκεται στην περιγραφή ενός τυχαίου τηλεγραφικού σήματος;
6. Πότε μια σ.δ. ονομάζεται διεργασία Markov; Πότε μια διεργασία Markov είναι γνωστή ως αλυσίδα Markov (Α.Μ.);
7. Πως ορίζονται οι πιθανότητες μετάβασης βήματος ένα για μια Α.Μ.; Πότε ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης βήματος ένα για μια Α.Μ. ονομάζεται Στοχαστικός;
8. Να δειχθεί οτι για ένα στοχαστικό πίνακα ισχύει οτι $P^{(2)}=P^2$.
9. Πότε μια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις; Είναι μια τέτοια σ.δ. διεργασία Markov;
10. Τι γνωρίζετε για το θερμικό θόρυβο και για το θόρυβο βολής;
11. Πότε μια Α.Μ. που ορίζετε σε συνεχή παραμετρικό χώρο ονομάζεται ομογενής; Πότε μια τέτοια διεργασία καλείται τυπική Α.Μ.;
12. Για μια Α.Μ. συνεχούς χρόνου να δειχθεί οτι ισχύει η εξίσωση Chapman-Kolmogorov. Να υπολογισθεί μια λύση για την εξίσωση αυτή.
13. Να δειχθεί οτι για μια Α.Μ. συνεχούς χρόνου ισχύει η σχέση $Q=P'(0)$, όπου Q είναι ο πίνακας αναλογιών μετάβασης.
14. Να υπολογισθεί η προς τα πρόσω εξίσωση Kolmogorov.
15. Πότε μια Α.Μ. προσεγγίζει μια σταθερή κατάσταση; Για την εξίσωση Kolmogorov προς τα πρόσω τι ισχύει στην περίπτωση της σταθερής κατάστασης;
16. Να δειχθεί οτι $p_j'(t)=\sum_i q_{ij}p_i(t)$, όπου $Q=[q_{ij}]$ και $p_i(t)=\Pr[X(t)=i]$.

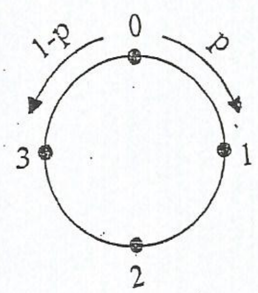
17. Να υπολογισθεί ο πίνακας μετάβασης $P(t)=\left[p_{ij}(t)\right]$ στην περίπτωση που

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

18. Για μια διεργασία Wiener να υπολογισθεί ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης $\rho(t_i,t_j)$, ($t_i<t_j$ και $i=1,2,\ldots,n-1$).

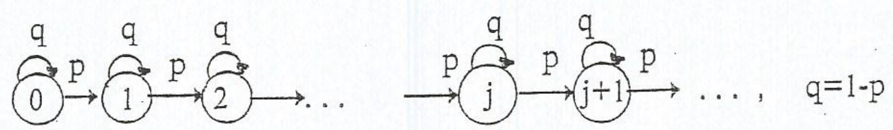
19. Υποθέτουμε οτι σωματίδια που μεταφέρουν θετικά και αρνητικά μοναδιαία φορτία εισέρχονται σ'ένα δοχείο με αντίστοιχες αναλογίες λ και μ. Να δειχθεί οτι η γεννήτρια συνάρτηση πυκνότητας του καθαρού φορτίου που συγκεντρώθηκε μετά από χρόνο t είναι $\exp\left[t\left(\lambda z+\mu z^{-1}-\lambda-\mu\right)\right]$ (Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας για μια Poisson διεργασία δίνεται από τη σχέση $\Pi_t(z)=\exp\left[\lambda t(z-1)\right]$).

20. Ένα σωματίδιο μπορεί να κινείται στην κατεύθυνση των δεικτών του ωρολογίου με πιθανότητα p (0<p<1) και αντίθετα με τους δείκτες του ωρολογιού με πιθανότητα q=1-p σε κάθε κατάσταση i (i=0,1,2,3) σ'ένα κύκλο όπως περιγράφεται στο Σχήμα. Να υπολογισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για μία τέτοια Α.Μ. βήματος ένα και κατόπιν να υπολογισθεί ο πίνακας $P^{(2)}$.



21. Θεωρούμε οτι τα σήματα που καταφθάνουν σ'ένα σύστημα ακολουθούν μια Poisson διεργασία με αναλογία λ. Ο χρόνος παραμονής των σημάτων στο σύστημα λαμβάνεται σαν μια εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/μ. Θεωρούμε οτι ο μέγιστος αριθμός σημάτων που μπορεί να δεχθεί το σύστημα είναι Κ. (i) Αν η διεργασία που περιγράφει το ανωτέρω σύστημα είναι μια Α.Μ. σε συνεχή περαμετρικό χώρο να υπολογισθεί ο πίνακας αναλογιών μετάβασης. (ii) Στην σταθερή κατάσταση να υπολογισθούν οι πιθανότητες π_j, j=0,1,2,,...,K.

22. Θεωρούμε την διωνυμική Α.Μ. με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης που περιγράφεται ως εξής



- Να υπολογισθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

- Να δειχθεί αν οι καταστάσεις της διωνυμικής Α.Μ. τείνουν σε μια σταθερή κατάσταση καθώς $n \to \infty$.

23. Πότε μία σ.δ. είναι στάσιμη; Τι εννοούμε οτι μία σ.δ. είναι δευτέρας τάξης στάσιμη;

24. Ποιό είναι το πλεονέκτημα μία σ.δ. να είναι κανονική (Gaussian);

25. Πώς ορίζεται ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης σ.δ. και ποια είναι η φυσική σημασία του;

26. Τι βασικά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν από το συντελεστή αυτοσυσχέτισης για μια χρονοσειρά;

27. Πως ορίζεται το φάσμα ισχύος μιας διακριτής στάσιμης χρονοσειράς και ποια είναι η φυσική σημασία του;

28. Αναφέρατε μερικές ιδιότητες του φάσματος ισχύος. Ποια είναι η σπουδαιότητα των ιδιοτήτων αυτών;

29. Τι είναι «λευκός θόρυβος». Να υπολογισθεί το φάσμα ισχύος ενός λευκού θορύβου. Αναφέρατε ένα παράδειγμα που συμπεριφέρεται προσεγγιστικά ως λευκός θόρυβος.

30. Είναι το περιοδόγραμμα ένας «συνεπής εκτιμητής» για το φάσμα ισχύος μιας διακριτής στάσιμης χρονοσειράς και γιατί;

31. Πως μπορούμε να επιτύχουμε ένα συνεπή εκτιμητή για το φάσμα ισχύος μιας διακριτής στάσιμης χρονοσειράς;

32. Πως ορίζονται ο συντελεστής διασυσχέτισης και η διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας;

33. Πότε ένα σύστημα είναι γραμμικό και πότε χρονικά αμετάβλητο; Τι ισχύει για το σύστημα $y(t) = x^2(t)$;

34. Ποια είναι η σπουδαιότητα της συνάρτησης κέρδους; Ποια είναι η συν. κέρδους για το φίλτρο $y_t = \frac{1}{2}(x_t + x_{t+1})$;

35. Ποια είναι η σπουδαιότητα της φάσης για ένα γραμμικό σύστημα; Να υπολογισθεί η φάση στην περίπτωση του γραμμικού μοντέλου $y(t) = g(t-L) + \varepsilon(t)$, όπου L ακέραιος αριθμός και $\varepsilon(t)$ είναι η σ.δ. σφαλμάτων.

36. Δίνεται το γραμμικό μοντέλο $X_t = \alpha X_{t-2} + Z_t$, όπου Z_t είναι μια καθαρώς σ.δ. Να υπολογισθεί το φάσμα ισχύος της X_t.