

Κεφάλαιο 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ

1.1. Εισαγωγή

Οι στοχαστικές διεργασίες (σ.δς.) χρησιμοποιούνται στη μελέτη διαφόρων προβλημάτων της επιστήμης των ηλεκτρολόγων μηχανικών και των φυσικών επιστημών. Όταν ένα διαστημόπλοιο εκτοξεύεται και τίθεται σε τροχιά γύρω από τη γη, οι αστροναύτες επικοινωνούν με το σύστημα ελέγχου στέλνοντας και λαμβάνοντας ραδιοκύματα μέσω της ατμόσφαιρας. Ένας σεισμός που λαμβάνει χώρα στην επιφάνεια της γης μεταδίδεται μ' ένα ακουστικό κύμα και καταγράφεται σε ευαίσθητους σειсмоγράφους. Ο αντιδραστήρας ενός πυρηνικού εργοστασίου παρακολουθείται για κακή λειτουργία μέσω ανιχνευτών για να προλάβουμε πιθανό λιώσιμο του αντιδραστήρα. Αεροπλάνα σ' ένα μεγάλο αεροδρόμιο κατευθύνονται από τους ελεγκτές εναερίου κυκλοφορίας οι οποίοι χρησιμοποιούν πολύπλοκα ραντάρ για να καταγράφουν τις τροχιές των αεροπλάνων.

Όλα τα παραδείγματα αυτά είναι εφαρμογές που σχετίζονται με τη καταγραφή δεδομένων και έχουν ως σκοπό την εκτέλεση κάποιας λειτουργίας. Ραδιοκύματα στέλνονται και λαμβάνονται μέσω κεραιών για να πληροφορούν και τους αστροναύτες και τους ελεγκτές εδάφους για την κατάσταση της δεδομένης αποστολής. Σήματα από σεισμούς χρησιμοποιούνται και για την ανάλυση και για την πρόβλεψη των σεισμών. Μετατρέπόμενα ηλεκτρικά σήματα χρησιμοποιούνται στον έλεγχο της ψύξης του αντιδραστήρα του πυρηνικού εργοστασίου και στην πρόβλεψη πιθανής αποτυχίας. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα που ανακλώνται από τα αεροπλάνα που προσεγγίζουν το αεροδρόμιο ξεχωρίζονται με συστήματα ραντάρ και παρακολουθούνται σε οθόνη για την αποφυγή συγκρούσεων. Γίνεται φανερό λοιπόν ότι ένα σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως μία συλλογή δεδομένων ή πληροφορίας που δημιουργείται από ένα φυσικό φαινόμενο.

Η θεωρία των στοχαστικών διεργασιών αποτελεί ένα ουσιαστικό μέρος στην μελέτη αντικειμένων όπως η στατιστική φυσική, η θεωρία ανάπτυξης των πληθυσμών, η θεωρία ελέγχου συστημάτων και επικοινωνιών, η ανάλυση χρονοσειρών και οι γραμμές αναμονής.

1.2. Στατιστική φυσική.

Μεγάλο μέρος της θεωρίας των σ.δ. αναπτύχθηκε σε σχέση με τη μελέτη των διακυμάνσεων και του θορύβου σε φυσικά φαινόμενα. Επομένως, η θεωρία των σ.δ. μπορεί να θεωρηθεί ως η μαθηματική θεμελίωση της στατιστικής φυσικής. Οι σ. δς. παρέχουν μοντέλα για φαινόμενα όπως είναι η κίνηση *Brown*, ο θερμικός θόρυβος σε ηλεκτρικά κυκλώματα και ο θόρυβος βολής.

Κίνηση *Brown*. Όταν ένα σωματίδιο μικροσκοπικού μεγέθους εμβαπτίζεται σ' ένα υγρό, υπόκειται σ' ένα μεγάλο αριθμό τυχαίων και ανεξάρτητων ωθήσεων που οφείλονται σε συγκρούσεις με μόρια. Το διάνυσμα που επακολουθεί $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ και το οποίο παριστάνει τη θέση του σωματιδίου ως μια συνάρτηση του χρόνου είναι γνωστό σαν κίνηση *Brown*.

Θερμικός θόρυβος. Θεωρούμε μία αντίσταση σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Λόγω των τυχαίων κινήσεων των ηλεκτρονίων μέσω της αντίστασης, θα υπάρξουν μικρές τυχαίες μεταβολές στη διαφορά δυναμικού $X(t)$ στα άκρα της αντίστασης. Η μεταβαλλόμενη διαφορά δυναμικού $X(t)$ καλείται θερμικός θόρυβος.

Θόρυβος βολής. Θεωρούμε μία δίοδο κενού που συνδέεται με μία αντίσταση. Επειδή η εκπομπή ηλεκτρονίων από τη θερμαινόμενη κάθοδο δεν είναι σταθερή, ένα ρεύμα $X(t)$ δημιουργείται κατά μήκος της αντίστασης που αποτελείται από μία σειρά παλμών μικρής διάρκειας, όπου κάθε παλμός αντιστοιχεί στο πέρασμα ενός ηλεκτρονίου από την κάθοδο στην άνοδο. Το μεταβαλλόμενο ρεύμα $X(t)$ καλείται θόρυβος βολής.

1.3. Έλεγχος συστημάτων και επικοινωνίες.

Μία μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων στις επικοινωνίες και στον έλεγχο συστημάτων όπως η αυτόματη καταγραφή των διαδρομών αντικειμένων που κινούνται, η λήψη ραδιοσημάτων παρουσία φυσικών και τεχνητών διαταραχών, ο

σχεδιασμός συστημάτων ελέγχου για βιομηχανικές διεργασίες και ο σχεδιασμός κατευθυντικών συστημάτων μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις των παρακάτω προβλημάτων.

Πρόβλεψη. Έχοντας παρατηρήσει τη стоχαστική διεργασία $X(t)$ σ' ένα διάστημα $0 \leq t \leq L$ επιθυμούμε να προβλέψουμε την τιμή $X(L+a)$ για $a > 0$.

Εξομάλυνση. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις $\{X(t), 0 \leq t \leq L\}$ μπορούν να θεωρηθούν ως το άθροισμα, $X(t) = S(t) + N(t)$, δύο σ.δ. $S(t)$ και $N(t)$ που παριστάνουν το σήμα και το θόρυβο, αντίστοιχα. Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την τιμή του σήματος σε κάθε στιγμή t του διαστήματος $[0, L]$. Η ορολογία "εξομάλυνση" προέρχεται από το γεγονός ότι συχνά ο θόρυβος $N(t)$ αποτελείται από πολύ υψηλές συνιστώσες συχνότητας όταν συγκριθούν με το σήμα $S(t)$. Η εξάλειψη του θορύβου από το σήμα $S(t)$ μπορεί τότε να θεωρηθεί σαν μια προσπάθεια να περάσουμε μία εξομαλυσμένη καμπύλη μέσω μιας πολύ ανώμαλης καταγραφής. Το πρόβλημα της πρόβλεψης του σήματος $S(L+a)$ για κάποιο $a > 0$ ονομάζεται πρόβλημα εξομάλυνσης και πρόβλεψης.

Εκτίμηση παραμέτρων. Υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις $\{X(t), 0 \leq t \leq L\}$ μπορούν να θεωρηθούν ως ένα άθροισμα, $X(t) = S(t) + N(t)$, όπου $S(t)$ είναι η τροχιά ενός μετακινούμενου αντικειμένου και $N(t)$ είναι τα σφάλματα στις μετρήσεις. Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του αντικειμένου, δηλαδή τις ποσότητες $S(t)$ και $dS(t)/dt$ για κάθε στιγμή t στο διάστημα $[0, T]$, υπό την προϋπόθεση ότι το σήμα $S(t)$ ανήκει σε μία γνωστή ομάδα συναρτήσεων.

Είναι φανερό ότι οι λύσεις που δίνουμε στα ανωτέρω προβλήματα εξαρτώνται από τις προϋποθέσεις που κάνουμε για τα σήματα και το θόρυβο τους και επίσης από το κριτήριο που δεχόμαστε για την περίπτωση μιας βέλτιστης λύσης. Είναι πλέον καθιερωμένο ότι ο σχεδιασμός βέλτιστων συστημάτων ελέγχου και επικοινωνιών απαιτεί τα σήματα και ο θόρυβος που εμφανίζονται σε τέτοια συστήματα να περιγράφονται με σ.δς. Επομένως, το πρώτο βήμα στη μελέτη των νέων συστημάτων ελέγχου και επικοινωνιών είναι η μελέτη της θεωρίας των σ.δ.

1.4. Ανάλυση Χρονοσειρών

Ένα σύνολο αποτελούμενο από παρατηρήσεις που λαμβάνονται διαδοχικά στο χρόνο καλείται χρονοσειρά. Οι χρονοσειρές παρατηρούνται σε σχέση με πολλά

φαινόμενα και από πολλούς ερευνητές. Παραδείγματα είναι:

- (i) η καταγραφή της ετήσιας αύξησης της παραγωγής μιας χώρας από ένα οικονομολόγο.
- (ii) η μελέτη της θερμοκρασίας μιας συγκεκριμένης περιοχής από ένα μετεωρολόγο.
- (iii) η μελέτη της ετήσιας μεταβολής των ηλιακών κηλίδων από ένα αστρονόμο, και
- (iv) η μελέτη του εσωτερικού θορύβου ενός δέκτου ραδιοκυμάτων από ένα ηλεκτρολόγο μηχανικό.

Η παράσταση μιας χρονοσειράς περιγράφεται ως εξής :

Το σύνολο των χρονοσημείων στα οποία καταγράφονται οι παρατηρήσεις συμβολίζεται με T . Σε πολλές εφαρμογές, T είναι ένα σύνολο διακριτών χρονοσημείων που ισαπέχουν (στην περίπτωση αυτή $T = \{1, 2, \dots, N\}$, όπου N ο αριθμός των παρατηρήσεων) ή T είναι ένα χρονικό διάστημα στον άξονα των πραγματικών αριθμών (στην περίπτωση αυτή $T = \{0 \leq t \leq L\}$, όπου L το μήκος του διαστήματος). Η παρατήρηση που πραγματοποιήθηκε την χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $X(t)$. Το σύνολο των παρατηρήσεων $\{X(t), t \in T\}$ καλείται *χρονοσειρά*.

1.5. Θεωρία ανάπτυξης πληθυσμών.

Το μέγεθος και η σύνθεση ενός πληθυσμού (ο οποίος αποτελείται ή από ζώντες οργανισμούς ή από άτομα διαφόρων υλικών που υφίστανται διάσπαση) είναι συνεχώς μεταβαλλόμενα και οι στοχαστικές διεργασίες παρέχουν τα μέσα περιγραφής των μηχανισμών τέτοιων μεταβολών.

Μερικά βιολογικά φαινόμενα για τα οποία οι στοχαστικές διεργασίες παρέχουν μοντέλα είναι : (i) η διάδοση επιδημιών, (ii) το φαινόμενο της καρκινογένεσης και (iii) η πάλη για την επιβίωση μεταξύ δύο πληθυσμών που αλληλεπιδρούν ή ανταγωνίζονται.

1.6. Γραμμές αναμονής

Οι στοχαστικές διεργασίες παρέχουν μία μέθοδο ποιοτικής μελέτης προβλημάτων σε κλάδους της επιστήμης όπως είναι η επιχειρησιακή έρευνα και η διαχείριση των επιχειρήσεων. Ένας κλάδος στον οποίο η θεωρία των στοχαστικών

διεργασιών έχει πολλές εφαρμογές είναι οι γραμμές αναμονής ή ουρές (*waiting lines or queues*).

Μία γραμμή αναμονής (ή ουρά) δημιουργείται όταν μία ομάδα ανθρώπων που καταφθάνει σε κάποιο σημείο για εξυπηρέτηση χρειάζεται να περιμένει για κάποιο χρονικό διάστημα μέχρι να εξυπηρετηθεί.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα ουρών. Άνθρωποι που περιμένουν σ'ένα αεροδρόμιο αποτελούν μία ουρά. Μηνύματα τα οποία μεταβιβάζονται τηλεφωνικά ή μέσω ενός υπολογιστή αποτελούν μία ουρά. Μηχανές σε μια γραμμή παραγωγής που χαλούν και επισκευάζονται βρίσκονται σε μία ουρά για συντήρηση από τους μηχανικούς.

Στη μαθηματική ανάλυση των ουρών λαμβάνονται υπόψη οι εξής καταστάσεις : (i) η κατανομή της εισόδου (ο νόμος πιθανότητας που διέπει τους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών), (ii) η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης (ο νόμος πιθανότητας που απαιτείται για την εξυπηρέτηση ενός πελάτου), (iii) ο αριθμός καναλιών εξυπηρέτησης και (iv) η πειθαρχία της ουράς (ο τρόπος με τον οποίο οι πελάτες λαμβάνονται για να εξυπηρετηθούν. Πιθανοί τρόποι είναι, "ο πρώτος που ήρθε να εξυπηρετηθεί", "τυχαία επιλογή για εξυπηρέτηση", "εξυπηρέτηση σύμφωνα με τη σειρά προτεραιότητας"). Η θεωρία των ουρών ασχολείται με την επίδραση που κάθε μία από τις παραπάνω καταστάσεις έχει σε διάφορες ποσότητες που ενδιαφέρουν, όπως το μήκος μιας ουράς και ο χρόνος αναμονής του πελάτη για εξυπηρέτηση.

1.7. Η συνάρτηση κατανομής της στοχαστικής διεργασίας.

Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται διάφοροι μέθοδοι περιγραφής μιας στοχαστικής διεργασίας. Κατ' αρχήν δίνουμε έναν ορισμό της στοχαστικής διεργασίας.

Μια στοχαστική διεργασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t), t \in T\}$, όπου T είναι ένα σύνολο δεικτών. Ένας τρόπος περιγραφής μιας στοχαστικής διεργασίας $\{X(t), t \in T\}$ γίνεται με τον καθορισμό της από κοινού συνάρτησης κατανομής των n τυχαίων μεταβλητών $X(t_1), \dots, X(t_n)$ για όλους τους ακέραιους n και τα σημεία t_1, t_2, \dots, t_n του συνόλου T . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X(t_1), \dots, X(t_n)$ ορίζεται ως εξής

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = P[X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n]$$

Επίσης η από κοινού χαρακτηριστική συνάρτηση των $X(t_1), \dots, X(t_n)$ ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} \xi_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(u_1, \dots, u_n) &= E[e^{i(u_1 X(t_1) + \dots + u_n X(t_n))}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)] dF_{X(t_1), \dots, X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.1.

Μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n αποτελεί μία (διακριτή) στοχαστική διεργασία της οποίας το σύνολο δεικτών είναι $T=(1,2,\dots)$. Για να καθορίσουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής, αρκεί να καθορίσουμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις ($\xi_{X_n}(u), n=1,2,\dots$) επειδή

$$\xi_{X_1 \dots X_n}(u_1, \dots, u_n) = \xi_{X_1}(u_1) \dots \xi_{X_n}(u_n)$$

Η ακολουθία (S_n) διαδοχικών αθροισμάτων $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών (X_n) αποτελεί μία διακριτή στοχαστική διεργασία. Για να καθορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής, αρκεί πάλι να καθορίσουμε τις χαρακτηριστικές ($\xi_{X_n}(u), n=1,2,\dots$) επειδή

$$\begin{aligned} \xi_{S_1 \dots S_n}(u_1, \dots, u_n) &= \xi_{X_1}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) \cdot \xi_{X_2}(u_2 + \dots + u_n) \dots \\ &\dots \xi_{X_{n-1}}(u_{n-1} + u_n) \cdot \xi_{X_n}(u_n) \end{aligned}$$

Η απόδειξη της σχέσης αυτής προκύπτει από την ακόλουθη μαθηματική έκφραση

$$\sum_{k=1}^n u_k S_k = u_n (S_n - S_{n-1}) + (u_n + u_{n-1})(S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots +$$

$$(u_2 + \dots + u_n)(S_2 - S_1) + \dots + (u_1 + \dots + u_n)S_1$$

Παράδειγμα 1.2.

Θεωρούμε μία συνεχή στοχαστική διεργασία $(X(t), t \geq 0)$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

όπου η συχνότητα ω είναι μία γνωστή θετική σταθερά και A, B είναι τυχαίες μεταβλητές με κανονικές κατανομές, των οποίων οι μέσες τιμές είναι 0 και οι διασπορές σ^2 . Θέλουμε να υπολογίσουμε την εξής πιθανότητα

$$P \left[\int_0^{2\pi/\omega} X^2(t) dt > c \right].$$

Θέτουμε $L = 2\pi/\omega$ και έχουμε

$$\int_0^L X^2(t) dt = A^2 \int_0^L \cos^2 \omega t dt + 2AB \int_0^L \cos \omega t \sin \omega t dt + B^2 \int_0^L \sin^2 \omega t dt = \frac{L}{2}(A^2 + B^2)$$

οπότε

$$P \left[\int_0^{2\pi/\omega} X^2(t) dt > c \right] = P[A^2 + B^2 > c\omega / \pi] = \int_{c\omega/\pi}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} \exp(-y / 2\sigma^2) dy = \exp\{-c\omega / 2\pi\sigma^2\},$$

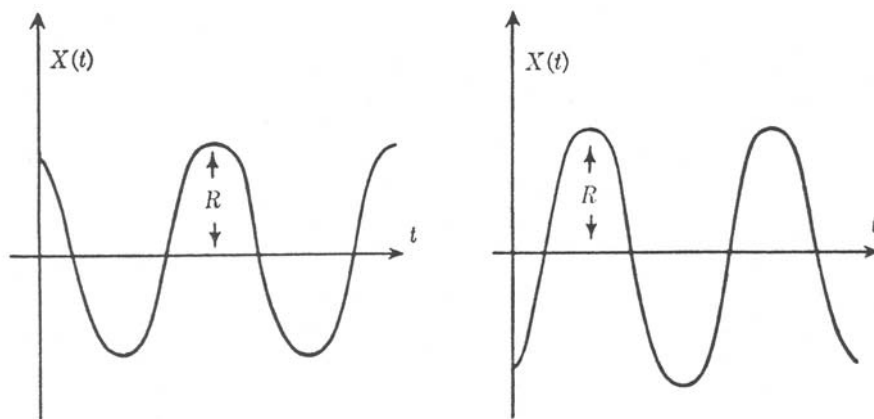
όπου $(A^2 + B^2) / \sigma^2$ έχει μία X^2 - κατανομή με 2 βαθμούς ελευθερίας.

Παράδειγμα 1.3.

Η στοχαστική διεργασία $\{X(t), t \geq 0\}$ της προηγούμενης άσκησης μπορεί να γράψει ως εξής: $X(t) = R \cos(\omega t - \theta)$

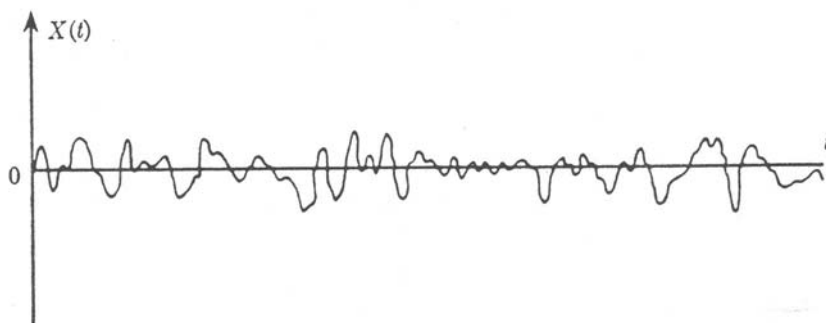
όπου $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\theta = \tan^{-1}(B / A)$

Μία δειγματοσυνάρτηση είναι μία ημιτονοειδής κυματομορφή με πλάτος R και φάση θ .



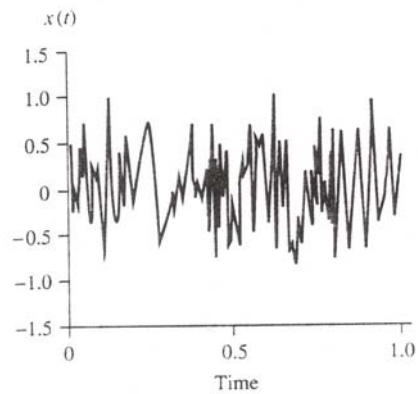
Σχήμα 1.1. : Τυπικές δειγματοσυναρτήσεις της στοχαστικής διεργασίας $X(t) = R \cos(\omega t - \theta)$.

Πρέπει να τονιστεί ότι η στοχαστική διεργασία $\{X(t), t \in T\}$ είναι στην πραγματικότητα μία συνάρτηση δύο δεικτών $\{X(t, s), t \in T, s \in S\}$. Για μία σταθερή τιμή του t , $X(t, \cdot)$ είναι μία συνάρτηση στο δειγματοχώρο S , ή ισοδύναμα η $X(t, \cdot)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή.



Σχήμα 1.2. Μία τυπική καταγραφή θορύβου. Ο θόρυβος που εμφανίζεται σε μία αντίσταση όπως μετατρέπεται από έναν ενισχυτή μπορεί να παρασταθεί ως μία δειγματοσυνάρτηση μίας στοχαστικής διεργασίας $\{X(t), t \geq 0\}$.

Επίσης, για σταθερό s που ανήκει στο S , η $X(.,s)$ είναι μία συνάρτηση του t που παριστάνει μία δυνατή παρατήρηση της στοχαστικής διεργασίας $\{X(t), t \in T\}$. Η συνάρτηση $X(.,s)$ καλείται μία πραγμάτωση (realization) ή μία δειγματική συνάρτηση (sample function) της διεργασίας. Όταν θεωρούμε μία στοχαστική διεργασία προσπαθούμε να δώσουμε μία τυπική δειγματική συνάρτηση της διεργασίας (βλέπε Σχ. 1.2 και Σχ. 1.3).



Σχήμα 1.3. Μία δειγματοσυνάρτηση ενός σήματος αναμεμειγμένη με θόρυβο.

Κεφάλαιο 2

ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ WIENER ΚΑΙ POISSON

2.1. Εισαγωγή

Δύο στοχαστικές διεργασίες, η διεργασία *Wiener* και η διεργασία *Poisson*, παίζουν ένα σπουδαίο ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διεργασιών. Οι διεργασίες αυτές δεν είναι μόνο χρήσιμες σαν μοντέλα σε πολλά σπουδαία φαινόμενα, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σαν βάση για την κατασκευή πολυπλοκότερων μοντέλων κατάλληλων για την περιγραφή άλλων φαινομένων που εμπλέκουν στοχαστικές διεργασίες. Για να ορίσουμε τις διεργασίες αυτές είναι απαραίτητο να ορίσουμε μία στοχαστική διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις (*independent increments*).

Μία συνεχής στοχαστική διεργασία $\{X(t), 0 \leq t \leq \infty\}$ λέγεται ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν $X(0)=0$ και οι η τυχαίες μεταβλητές

$$X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες για όλους τους δείκτες $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Η διεργασία λέγεται ότι έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις αν, επιπλέον η $X(t_2 + h) - X(t_1 + h)$ έχει την ίδια κατανομή με την $X(t_2) - X(t_1)$ για όλους τους δείκτες t_1, t_2 και για κάθε $h > 0$.

Είναι εύκολο, για μια στοχαστική διεργασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, να δειχθεί ότι

$$\xi_{x(t_1), \dots, x(t_n)}(u_1, \dots, u_n) = \xi_{x(t_1)}(u_1 + \dots + u_n) \times \prod_{k=2}^n \xi_{x(t_k), \dots, x(t_{k-1})}(u_k + \dots + u_n)$$

Επομένως, όταν γνωρίζουμε τις κατανομές των $X(t)$ και $X(t) - X(s)$, για όλες τις μη-αρνητικές τιμές των t και s μπορούμε να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή

των η τυχαίων μεταβλητών $X(t_1), \dots, X(t_n)$.

2.2. Διεργασία Wiener

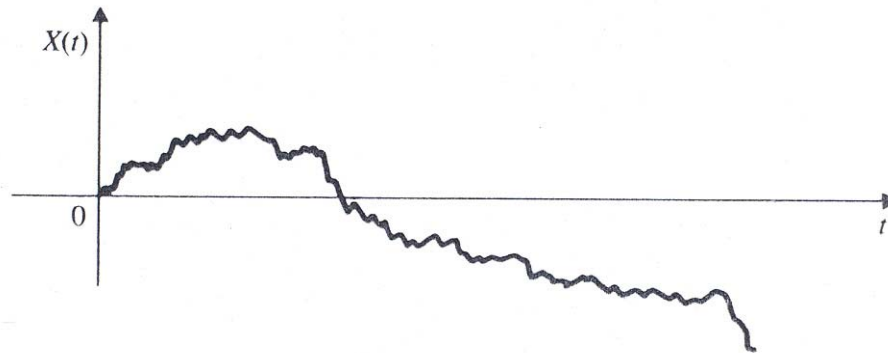
Στη θεωρία των στοχαστικών διεργασιών και στις εφαρμογές τους, ένας θεμελιώδης ρόλος ανήκει στη διεργασία *Wiener*. Μεταξύ άλλων εφαρμογών, η διεργασία *Wiener* παρέχει ένα μοντέλο για την κίνηση Brown και τον τυχαίο δρόμο που χρησιμοποιείται με επιτυχία στη βιοπληροφορική. Ένα σωματίδιο, διαμέτρου 10^{-4} cm, που εμβαπτίζεται σε ένα υγρό πραγματοποιεί ακανόνιστες κινήσεις, οι οποίες είναι διακριτές στο μικροσκόπιο. Η κίνηση ενός τέτοιου σωματιδίου καλείται κίνηση *Brown*, ο οποίος ανακάλυψε το φαινόμενο το 1827. Το ίδιο φαινόμενο παρουσιάζεται επίσης σε σωματίδια καπνού που ελευθερώνονται στον αέρα.

Η εξήγηση του φαινομένου της κίνησης *Brown* ήταν μία από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της στατιστικής μηχανικής και της κινητικής θεωρίας. Το 1905, ο *Einstein* απέδειξε ότι η κίνηση *Brown* μπορεί να εξηγηθεί θεωρώντας ότι τα σωματίδια υπόκεινται σε συνεχή βομβαρδισμό από τα μόρια του περιβάλλοντος μέσου. Η πρωτοποριακή δουλειά του *Einstein* γενικεύθηκε, επεκτάθηκε και επιβεβαιώθηκε πειραματικά από διάφορους φυσικούς.

Έστω $X(t)$ η μετατόπιση (από το αρχικό σημείο) του σωματιδίου στην *Brownian* κίνηση μετά από χρόνο t . Από τον ορισμό $X(0)=0$. Το σωματίδιο υφίσταται συνεχή κίνηση λόγω των συγκρούσεων του με τα μόρια του περιβάλλοντος μέσου. Η μετατόπιση του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα (s,t) που είναι μεγάλο σε σύγκριση με το χρόνο μεταξύ συγκρούσεων μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού μικρών μετατοπίσεων. Επομένως, εφαρμόζοντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $X(t)-X(s)$ ακολουθεί μία κανονική κατανομή. Επιπλέον είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι η κατανομή της μετατόπισης $X(t)-X(s)$ πρέπει να είναι η ίδια με την κατανομή της $X(t+h)-X(s+h)$, για κάθε $h > 0$, επειδή υποτίθεται ότι το μέσον βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Η κίνηση του σωματιδίου θεωρούμε ότι οφείλεται ολοκληρωτικά στις πολύ συχνές συγκρούσεις με τα μόρια. Μαθηματικά, αυτό ερμηνεύεται λέγοντας ότι η στοχαστική διεργασία $X(t)$ έχει ανεξάρτητες προσauξήσεις. Οι μετατοπίσεις σε μη-επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητες επειδή ο αριθμός και το μέγεθος των συγκρούσεων στα διαστήματα αυτά είναι ανεξάρτητα.

- Μία στοχαστική διεργασία $\{X(t), t \geq 0\}$ λέγεται ότι είναι μία διεργασία *Wiener* αν :
- (i) $\{X(t), t \geq 0\}$, έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις
 - (ii) Για κάθε $t > 0$, $X(t)$ ακολουθεί μία κανονική κατανομή
 - (iii) Για κάθε $t > 0$, $E[X(t)] = 0$ και $Var[X(t)] = \sigma^2 t$.
 - (iv) $X(0) = 0$



Σχήμα 2.1. Δειγματική συνάρτηση διεργασίας κίνησης Brown.

Επειδή η $X(t)$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και $X(0) = 0$, για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής της στοχαστικής διεργασίας $X(t)$ αρκεί να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής των προσαυξήσεων $X(t) - X(s)$ για κάθε $s < t$. Επειδή η $X(t) - X(s)$ έχει μία κανονική κατανομή η συνάρτηση κατανομής της υπολογίζεται από τη μέση τιμή και τη διασπορά.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $E[X(t) - X(s)] = 0$. Γι αυτό :

$$\xi_{X(t)-X(s)}(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2 Var[X(t) - X(s)]\right\}$$

όπου $Var[X(t) - X(s)] = \sigma^2 |t - s|$ και σ^2 είναι μία θετική σταθερά.

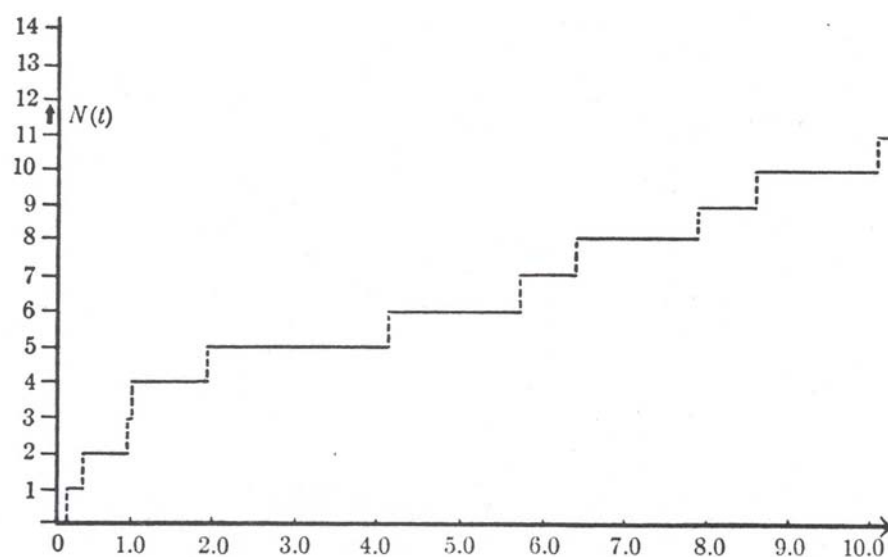
Η παράμετρος σ^2 είναι μία εμπειρική ποσότητα της διεργασίας η οποία μπορεί να υπολογισθεί από τις παρατηρήσεις. Στην περίπτωση που η διεργασία *Wiener* είναι ένα μοντέλο για την κίνηση *Brown* η σταθερά σ^2 είναι η μέση τετραγωνική μετατόπιση του σωματιδίου ανά μονάδα χρόνου. Αποδείχθηκε από τον *Einstein 1905* ότι

$$\sigma^2 = 4RT/Nf,$$

όπου R είναι η παγκόσμιος σταθερά των αερίων, N ο αριθμός *Avogadro*, T η απόλυτη θερμοκρασία και f ο συντελεστής τριβής του περιβάλλοντος μέσου. Από την παραπάνω σχέση υπολογίσθηκε ο αριθμός *Avogadro* χρησιμοποιώντας πειραματικές παρατηρήσεις κίνησης *Brown*. Η διεργασία *Wiener* εφαρμόζεται με επιτυχία στην κβαντομηχανική.

2.3. Διεργασία Poisson

Θεωρούμε τυχαία γεγονότα όπως (1) η άφιξη ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο μίας λυχνίας κενού στην άνοδο (2) η εκπομπή σωματιδίων α από μία ραδιενεργό πηγή που καταγράφονται σε έναν απαριθμητή *Gieger* (3) οι αφίξεις πελατών για εξυπηρέτηση σε ένα τηλεφωνικό κέντρο και (4) σύμβαντα όπως ατυχήματα, λάθη, διακοπές κ.λ.π.



Σχήμα 2.2. Τυπική δειγματική συνάρτηση μίας διεργασίας Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με μέση ένταση $\lambda=1$ ανά μονάδα χρόνου.

Μπορούμε να περιγράψουμε αυτά τα γεγονότα με μία συνάρτηση απαρίθμησης (*counting process*) $N(t)$, η οποία ορίζεται για όλα τα $t > 0$ και η οποία παριστάνει τον αριθμό των γεγονότων που πραγματοποιήθηκαν το χρονικό διάστημα $[0, t]$. Για κάθε χρονική στιγμή t , η τιμή $N(t)$ είναι μία παρατηρούμενη τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής. Η οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών $\{N(t), t \geq 0\}$ αποτελεί μία

στοχαστική διεργασία. Για κάθε τυχαία μεταβλητή $N(t)$, οι μόνες δυνατές τιμές είναι οι ακέραιοι αριθμοί $0, 1, 2, \dots$. Μία στοχαστική διεργασία $\{N(t), t \geq 0\}$ της οποίας οι τυχαίες μεταβλητές παίρνουν τις ακέραιες τιμές $0, 1, 2, \dots$ καλείται μία διεργασία ακέραιων τιμών. Μία σπουδαία διεργασία ακέραιων τιμών είναι η διεργασία *Poisson*.

Μία διεργασία ακέραιων τιμών $\{N(t), t \geq 0\}$ καλείται διεργασία *Poisson* με μέση ένταση (*mean rate or intensity*) λ , αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις

- (i) $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσανυζήσεις
- (ii) Για οποιεσδήποτε χρονικές στιγμές s και t τέτοιες ώστε $s < t$ ο αριθμός $N(t) - N(s)$ των μετρήσεων στο διάστημα $[s, t]$ ακολουθεί μία *Poisson* κατανομή, με μέση τιμή $\lambda(t-s)$. Επομένως,

$$P[N(t) - N(s) = k] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{\{\lambda(t-s)\}^k}{k!},$$

(iii) $E[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s), \quad Var[N(t) - N(s)] = \lambda(t-s)$

(iv) $N(0) = 0$

Η παράμετρος λ παριστάνει τη μέση ένταση εμφάνισης των γεγονότων που καταγράφονται ανά μονάδα χρόνου.

Παράδειγμα 2.1. Ραδιενεργή αποσύνθεση

Όλες οι σύγχρονες θεωρίες της ραδιενεργής αποσύνθεσης θεωρούν ότι σε μία ομάδα πυρήνων ενός δεδομένου στοιχείου όλοι οι πυρήνες είναι ίδιοι, ανεξάρτητοι και έχουν την ίδια πιθανότητα αποσύνθεσης σε μοναδιαίο χρόνο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι εκπομπές μίας ραδιενεργής πηγής αποτελούν μία *Poisson* διεργασία.

Παράδειγμα 2.2. Θόρυβος βολής σε ηλεκτρονικές λυχνίες

Η ευαισθησία που επιτυγχάνεται με τους ηλεκτρονικούς ενισχυτές περιορίζεται από τις στιγμιαίες μεταβολές ρεύματος που συμβαίνουν σε τέτοια

όργανα και οι οποίες καλούνται θόρυβος βολής, ο οποίος οφείλεται στις τυχαίες εκπομπές ηλεκτρονίων από την θερμαινόμενη κάθοδο. Ας υποθέσουμε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ καθόδου και ανόδου είναι τόσο μεγάλη ώστε όλα τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια από την κάθοδο να έχουν πολύ μεγάλες ταχύτητες, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει συγκέντρωση ηλεκτρονίων μεταξύ καθόδου και ανόδου. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο σε ένα χρονικό διάστημα $(0, t)$ αποτελεί μία διεργασία *Poisson* με παράμετρο λt , όπου λ είναι η μέση ένταση εκπομπής ηλεκτρονίων από την κάθοδο.

Παράδειγμα 2.3. Διακοπές μηχανών

Θεωρούμε ένα όργανο (όπως μία λυχνία κενού ή έναν απαριθμητή *Geiger*) το οποίο χρησιμοποιείται μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί και μετά επισκευάζεται ή αντικαθίσταται από ένα όργανο του ίδιου τύπου. Η διάρκεια ζωής του οργάνου θεωρείται ότι είναι μία τυχαία μεταβλητή T . Οι διάρκειες ζωής T_1, T_2, \dots, T_n η οργάνων που τέθηκαν σε λειτουργία θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή όπως η τυχαία μεταβλητή T . Για $t > 0$, έστω $N(t)$ ο αριθμός των οργάνων που απέτυχαν στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Αν η διάρκεια ζωής κάθε οργάνου είναι μία εκθετική κατανομή, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία διεργασία *Poisson*.

2.4. Διεργασία *Poisson* στο χώρο

Στην ανάπτυξη θεωριών για την κατανομή των γαλαξιών σε ένα αστρικό σύστημα μας διευκολύνει να θεωρήσουμε τα κέντρα των γαλαξιών σαν σημεία που κατανέμονται στο χώρο.

Θεωρούμε λοιπόν μία σειρά σημείων που κατανέμονται στο χώρο S , όπου S είναι ένας Ευκλείδειος χώρος με διάσταση ≥ 1 για την ανίχνευση και την εκτίμηση σημάτων. Για κάθε περιοχή R του S , έστω $N(R)$ ο αριθμός των σημείων που περιέχονται στην περιοχή R . Τα σημεία λέγεται ότι κατανέμονται σύμφωνα με ένα στοχαστικό τρόπο αν για κάθε περιοχή R του S , $N(R)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή. Η

σειρά των σημείων αποτελεί μία διεργασία *Poisson* με ένταση λ αν ισχύουν οι ακόλουθες προϋποθέσεις :

- (i) Για n μη-επικαλυπτόμενες περιοχές R_1, R_2, \dots, R_n οι τυχαίες μεταβλητές $N(R_1), \dots, N(R_n)$ είναι ανεξάρτητες, όπου $N(R_i)$ είναι ο αριθμός των σημείων στην περιοχή $R_i, i=1, \dots, n$.
- (ii) Για κάθε περιοχή R πεπερασμένου όγκου, η $N(R)$ ακολουθεί μία *Poisson* κατανομή με μέση τιμή $\lambda V(R)$, όπου $V(R)$ δηλώνει τον όγκο της περιοχής R στον Ευκλείδειο χώρο των d - διαστάσεων.

Δίνουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα *Poisson* διεργασιών. Στα παραδείγματα χρησιμοποιείται το εξής αποτέλεσμα:

Αν η $N(t)$ ακολουθεί μία *Poisson* διεργασία και $t_1 < t_2$ τότε

$$\begin{aligned}
 P[N(t_1) = i, N(t_2) = j] &= P[N(t_1) = i] P[N(t_2) - N(t_1) = j - i] \\
 &= P[N(t_1) = i] P[N(t_2 - t_1) = j - i] \\
 &= \frac{(\lambda t_1)^i e^{-\lambda t_1}}{i!} \frac{\{\lambda(t_2 - t_1)\}^{j-i} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}}{(j-i)!}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.4.

Ερωτήσεις καταφθάνουν σε ένα μηχανισμό καταγραφής μηνυμάτων σύμφωνα με μία *Poisson* διεργασία με ένταση 15 ερωτήσεων το λεπτό. Να βρεθεί η πιθανότητα ότι σε μία περίοδο 1 λεπτού, 3 ερωτήσεις φθάνουν κατά τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα και 2 κατά τα τελευταία 15 δευτερόλεπτα.

Λύση:

Η αναλογία άφιξης των ερωτήσεων σε *sec* δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ ερωτήσεις ανά sec}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
P[N(10)=3 \text{ και } N(60)-N(45)=2] &= P[N(10)=3] P[N(60)-N(45)=2] \\
&= P[N(10)=3] P[N(60-45)=2] \\
&= \frac{(10/4)^3 e^{-(10/4)}}{3!} \frac{(15/4)^2 e^{-(15/4)}}{2!} \cong 0.2138 \times 0.1654 \cong 0.035
\end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι T είναι ο χρόνος μεταξύ της εμφάνισης γεγονότων σε μία *Poisson* διεργασία. Η πιθανότητα να μην έχουμε γεγονότα σε t δευτερόλεπτα υπολογίζεται ως εξής :

$$P[T > t] = P[\text{δεν έχουμε γεγονότα σε } t \text{ δευτερόλεπτα}] = e^{-\lambda t}$$

Από την εξίσωση αυτή συνεπάγεται ότι η τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί μία εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα διαστήματα μεταξύ γεγονότων σε μία *Poisson* διεργασία αποτελούν μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ταυτόσημες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή $1/\lambda$.

Μία άλλη ποσότητα που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η χρονική στιγμή S_n κατά την οποία το νιοστό γεγονός συμβαίνει σε μία *Poisson* διεργασία. Έστω T_j τα διαστήματα μεταξύ γεγονότων σε μία *Poisson* διεργασία, οπότε

$$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής S_n δίνεται από τη σχέση

$$f_{S_n}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

Παράδειγμα 2.4. (Συνέχεια).

Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά του χρόνου μέχρι την άφιξη της δέκατης ερώτησης.

Λύση:

Έχουμε $E[S_{10}] = 10E(T) = 10/\lambda = 40 \text{ sec}$

και $\text{Var}[S_{10}] = 10\text{Var}(T) = 10/\lambda^2 = 160 \text{ sec}$

Στις εφαρμογές της *Poisson* διεργασίας είναι συνηθισμένο να θεωρούμε ότι τα γεγονότα συμβαίνουν τυχαία. Εξηγούμε τώρα τι εννοούμε με τη δήλωση αυτή. Υποθέτουμε ότι ένα γεγονός έλαβε χώρα στο διάστημα $[0, t]$ και έστω x η χρονική στιγμή που συνέβη το γεγονός αυτό. Για $0 < x < t$, $N(x)$ είναι ο αριθμός των γεγονότων που συνέβησαν μέχρι τη χρονική στιγμή x και $N(t) - N(x)$ είναι η προσαύξηση στο διάστημα (x, t) . Τότε

$$\begin{aligned} P[X \leq x] &= P[N(x) = 1 / N(t)] = \frac{P[N(x) = 1 \text{ και } N(t) = 1]}{P[N(t) = 1]} = \\ &= \frac{P[N(x) = 1] P[N(t) - N(x) = 0]}{P[N(t) = 1]} \\ &= \frac{\lambda x e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{x}{t} \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι όταν δίνεται ένα γεγονός που έχει λάβει χώρα στο διάστημα $[0, t]$, τότε η χρονική στιγμή που έλαβε χώρα το συμβάν ακολουθεί μία ομοιόμορφη κατανομή. Μ' αυτή την έννοια θεωρούμε ότι τα συμβάντα λαμβάνουν χώρα τυχαία. Μπορεί ναδειχθεί ότι αν ο αριθμός των γεγονότων στο διάστημα $[0, t]$ είναι k , τότε τα μεμονωμένα γεγονότα είναι ανεξάρτητα και ακολουθούν μία ομοιόμορφη κατανομή.

Παράδειγμα 2.5

Υποθέτουμε ότι δύο πελάτες εισέρχονται σε ένα κατάστημα στη διάρκεια μίας περιόδου 2 λεπτών. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι και οι δύο πελάτες μπήκαν στο κατάστημα κατά τη διάρκεια του πρώτου λεπτού.

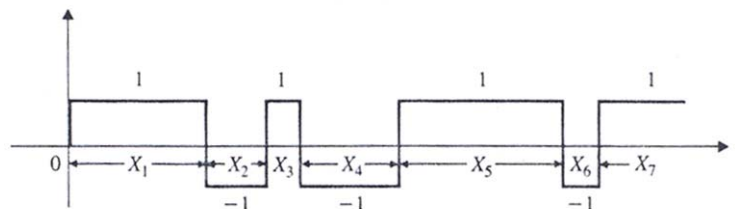
Λύση:

Οι χρονικές στιγμές άφιξης των πελατών είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές. Στο διάστημα των δύο λεπτών κάθε πελάτης μπαίνει στο κατάστημα στη διάρκεια του πρώτου λεπτού με πιθανότητα $1/2$. Έτσι η πιθανότητα ότι και οι δύο μπήκαν στο κατάστημα το πρώτο λεπτό είναι $(1/2)^2=1/4$. Αυτή η απάντηση μπορεί να επιβεβαιωθεί αν υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P[N(1)=2/N(2)=2]$$

Παράδειγμα 2.6

Τυχαίο τηλεγραφικό σήμα



Σχήμα 2.2. Μία καταγραφή ενός τυχαίου τηλεγραφικού σήματος.

Θεωρούμε μία τυχαία διεργασία $X(t)$ η οποία λαμβάνει τις τιμές ± 1 . Υποθέτουμε ότι $X(0)=\pm 1$ με πιθανότητα $1/2$ και επιπλέον ότι η $X(t)$ αλλάσσει πολικότητα με την εκάστοτε εμφάνιση ενός γεγονότος σύμφωνα με μία *Poisson* διεργασία με αναλογία α . Η συνάρτηση πυκ. πιθανότητας της $X(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$P[X(t) = \pm 1] = P[X(t) = \pm 1 / X(0) = 1]P[X(0) = 1] +$$

$$P[X(t) = \pm 1 / X(0) = -1]P[X(0) = -1]$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα βρίσκεται παρατηρώντας ότι η $X(t)$ θα έχει την ίδια πολικότητα με την $X(0)$ μόνο όταν ένας άρτιος αριθμός γεγονότων συμβαίνει στο διάστημα $(0, t]$. Έτσι

$$\begin{aligned}
P[X(t) = \pm 1 / X(0) = \pm 1] &= P[N(t) = \text{αρτιος ακεραιος}] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{2j}}{2j!} e^{-at} \\
&= e^{-at} \frac{1}{2} \{e^{at} + e^{-at}\} = \frac{1}{2} \{1 + e^{-2at}\}
\end{aligned}$$

Οι μεταβλητές $X(t)$ και $X(0)$ θα διαφέρουν ως προς το πρόσημο αν ο αριθμός των γεγονότων στο διάστημα $(0, t]$ είναι περιττός, οπότε

$$\begin{aligned}
P[X(t) = \pm 1 / X(0) = \mp 1] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^{2j+1}}{(2j+1)!} e^{-at} \\
&= e^{-at} \frac{1}{2} \{e^{at} - e^{-at}\} = \frac{1}{2} \{1 - e^{-2at}\}
\end{aligned}$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$P[X(t) = 1] = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \{1 + e^{-2at}\} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \{1 - e^{-2at}\} = \frac{1}{2}$$

και
$$P[X(t) = -1] = 1 - P[X(t) = 1] = \frac{1}{2}$$

Επομένως το τυχαίο τηλεγραφικό σήμα είναι εξίσου πιθανό να λάβει τις τιμές ± 1 σε κάθε χρονική στιγμή $t > 0$. Η μέση τιμή και η διασπορά της $X(t)$ υπολογίζονται ως εξής

$$\mu_x(t) = 1P[X(t) = 1] + (-1)P[X(t) = -1] = 0$$

$$Var[X(t)] = E[X^2(t)] = (1)^2 P[X(t) = 1] + (-1)^2 P[X(t) = -1] = 1$$

Η συνάρτηση αυτοδιασποράς της $X(t)$ μπορεί επίσης να υπολογισθεί

$$\gamma_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = 1P[X(t_1) = X(t_2)] + (-1)P[X(t_1) \neq X(t_2)]$$

$$= \frac{I}{2} \left\{ I + e^{-2a|t_2-t_1|} \right\} - \frac{I}{2} \left\{ I - e^{-2a|t_2-t_1|} \right\} = e^{-2a|t_2-t_1|}$$

Επομένως οι παρατηρήσεις της $X(t)$ γίνονται ασυσχέτιστες καθώς οι μεταξύ τους χρονικές στιγμές αυξάνονται.

2.5. Διατήρηση της Poisson διεργασίας στην περίπτωση της τυχαίας συλλογής.

Μία σπουδαία ιδιότητα της Poisson διεργασίας είναι η διατήρησή της στην περίπτωση της τυχαίας συλλογής. Όταν δίνονται γεγονότα που συμβαίνουν σύμφωνα με μία Poisson διεργασία υποθέτουμε ότι όλα τα γεγονότα δεν είναι δυνατόν να καταγραφούν. Στην πραγματικότητα κάθε γεγονός που συμβαίνει καταγράφεται με πιθανότητα p . Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή τα γεγονότα που καταγράφονται αποτελούν μία Poisson διεργασία.

Θεώρημα : Για $t \geq 0$, έστω $N(t)$ ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $(0, t]$. Αν $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία διεργασία Poisson με μέση ένταση λ και αν κάθε γεγονός που συμβαίνει έχει πιθανότητα p να καταγραφεί ανεξάρτητα από κάθε άλλο γεγονός της διεργασίας, τότε ο αριθμός των γεγονότων που καταγράφηκαν στο διάστημα $(0, t]$ είναι μία Poisson διεργασία με παράμετρο $\mu = \lambda p$.

Απόδειξη : Έστω $\{M(t), t \geq 0\}$ η διεργασία που προκύπτει από την καταγραφή των γεγονότων στο διάστημα $(0, t]$ με πιθανότητα p . Αυτή είναι μία διεργασία με ανεξάρτητες προσauξήσεις. Υποθέτουμε ότι τα γεγονότα έχουν συμβεί στο διάστημα $[s, t]$ όπου $0 \leq s < t$. Ο αριθμός των γεγονότων που καταγράφηκαν με πιθανότητα p δίνεται από τη σχέση:

$$P[M(t) - M(s) = k / N(t) - N(s) = n] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} .$$

Επειδή

$$P[N(t) - N(s) = n] = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!} ,$$

ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 P[M(t) - M(s) = k] &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)} \\
 &= \frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!} [p\lambda(t-s)]^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[q\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \frac{[p\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} e^{q\lambda(t-s)} \\
 &= \frac{[p\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-p\lambda(t-s)}
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.7. Παθητικός μετρητής

Υποθέτουμε ότι σωματίδια φθάνουν σε έναν απαριθμητή *Geiger* σύμφωνα με μία *Poisson* διεργασία με μέση ένταση λ ανά μονάδα χρόνου. Ο απαριθμητής *Geiger* ενεργοποιεί ένα μηχανισμό καταγραφής που περιέχει ένα "ελαττωματικό" διακόπτη ο οποίος λειτουργεί σωστά με πιθανότητα p . Επομένως, κάθε σωματίδιο που φθάνει στον απαριθμητή έχει πιθανότητα p να καταγραφεί. Για $t \geq 0$, έστω $M(t)$ ο αριθμός των σωματιδίων που καταγράφηκαν στο διάστημα $(0, t]$. Στην περίπτωση αυτή η $\{M(t), t \geq 0\}$ είναι μία *Poisson* διεργασία.

2.6. Κανονικές στοχαστικές διεργασίες

Μία στοχαστική διεργασία $X(t)$ είναι κανονική (*Gaussian*) στοχαστική διεργασία αν οι παρατηρήσεις $X_1=X(t_1), X_2=X(t_2), \dots, X_k=X(t_k)$ έχουν από κοινού μία κανονική κατανομή για όλα τα k και όλες τις χρονικές στιγμές t_1, \dots, t_k . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X_1, X_2, \dots, X_k δίνεται από τη σχέση

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}}{(2\pi)^{k/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}$$

Όπου

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_X(t_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_X(t_k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \gamma_{XX}(t_1, t_1) & \gamma_{XX}(t_1, t_2) & \dots & \gamma_{XX}(t_1, t_k) \\ \gamma_{XX}(t_2, t_1) & \gamma_{XX}(t_2, t_2) & \dots & \gamma_{XX}(t_2, t_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{XX}(t_k, t_1) & \gamma_{XX}(t_k, t_2) & \dots & \gamma_{XX}(t_k, t_k) \end{bmatrix}$$

Αν τώρα η στοχαστική διεργασία $\{X_k\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , τότε ο πίνακας συνδιασποράς

$$\{\gamma_{XX}(t_i, t_j)\} = \{\sigma^2 \delta_{ij}\} = \sigma^2 I \quad i, j = 1 \dots k,$$

όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j \\ 0 & \text{για } i \neq j \end{cases}$ και I είναι ο μοναδιαίος πίνακας .

Έτσι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X_1, \dots, X_k θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{k/2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2\right\} \\ &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_k}(x_k) \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που η στοχαστική διεργασία $X(t)$ είναι μία Wiener διεργασία μπορεί να δειχθεί ότι

$$f_{X(t_1), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_{X(t_1)}(x_1) f_{X(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \dots f_{X(t_k-t_{k-1})}(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \frac{\exp \left\{ -1/2 \left[\frac{x_1^2}{\sigma^2 t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{\sigma^2 (t_2 - t_1)} + \dots + \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\sigma^2 (t_k - t_{k-1})} \right] \right\}}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^k t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_k - t_{k-1})}}$$

Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι

$$\gamma_{XX}(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$$

2.7. Στάσιμες στοχαστικές διεργασίες

Μία στοχαστική διεργασία $X(t)$ είναι στάσιμη αν η από κοινού κατανομή των $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλαδή

$$F_{X(t_1), \dots, X(t_k)}(x_1, \dots, x_k) = F_{X(t_1+\tau), \dots, X(t_k+\tau)}(x_1, \dots, x_k)$$

για όλες τις χρονικές μεταβολές τ , για όλα τα k και για όλες τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_k .

Μία στοχαστική διεργασία είναι πρώτης τάξης στάσιμη αν

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+\tau)}(x) = F_X(x) \quad \text{για όλα τα } t \text{ και } \tau.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η μέση τιμή και η διασπορά της $X(t)$ είναι σταθερές και ανεξάρτητες από τον χρόνο, δηλαδή

$$\mu_{X(t)} = E[X(t)] = \mu \quad \text{για όλα τα } t$$

$$\text{και } \text{Var}[X(t)] = E[(X(t) - \mu)^2] = \sigma^2 \quad \text{για όλα τα } t$$

Για μία στοχαστική διεργασία που είναι δευτέρης τάξης στάσιμη ισχύει ότι

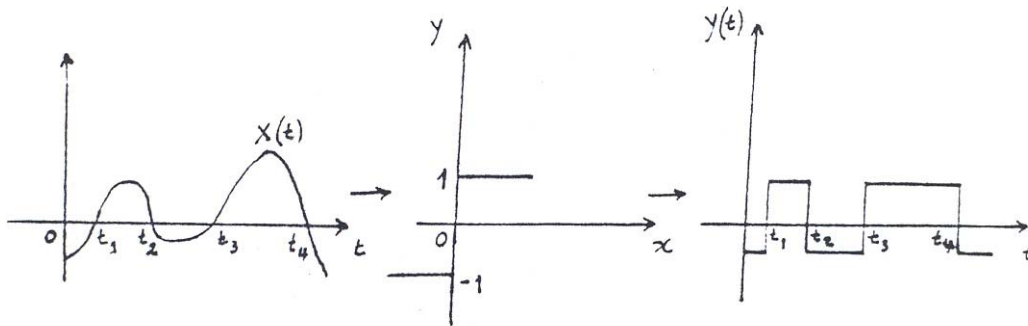
$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2) \quad \text{για όλα τα } t_1, t_2.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση αυτοδιασποράς εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t_2 - t_1$, δηλ.

$$\gamma_{XX}(t_1 - t_2) = \gamma_{XX}(t_2 - t_1) \quad \text{για όλα τα } t_1, t_2$$

Σε μια στοχαστική διεργασία $\{X(t), t \geq 0\}$ αν η από κοινού κατανομή των $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ είναι κανονική και συγχρόνως ισχύει η στασιμότητα δευτέρας τάξεως, τότε η διεργασία είναι πλήρως στάσιμη.

Παράδειγμα 2.8.



Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα χωρίς μνήμη

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Η έξοδος του $Y(t)$ παίρνει τις τιμές ± 1 .

$$P\{Y(t)=1\} = P\{X(t)>0\} = 1 - F_X(0)$$

$$P\{Y(t)=-1\} = P\{X(t)<0\} = F_X(0)$$

Επομένως

$$E\{Y(t)\} = 1 \cdot P\{Y(t)=1\} - 1 \cdot P\{Y(t)=-1\} = 1 - 2 \cdot F_X(0)$$

Το γινόμενο $Y(t+\tau)Y(t)$ ίσο με την μονάδα αν $X(t+\tau)X(t) > 0$ και ίσο με -1 διαφορετικά.

Επομένως

$$R_Y(\tau) = E\{Y(t+\tau) Y(t)\} = P\{X(t+\tau) X(t) > 0\} - P\{X(t+\tau) X(t) < 0\}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η $X(t)$ να μία *Gaussian* διεργασία, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την ακόλουθη άσκηση (βλέπε *Paroulis, 1984*).

Έστω X_1, X_2 μία δισδιάστατη *Gaussian* κατανομή με μέσες τιμές $\mu_1 = \mu_2 = 0$, διασπορές $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ και συντελεστή συσχέτισης ρ . Να αποδειχθεί ότι

$$P[X_1 X_2 > 0] = \frac{1}{2} + \frac{\sin^{-1}(\rho)}{\pi}$$

Θέτοντας $X_1 = X(t+\tau)$ και $X_2 = X(t)$ παίρνουμε $\rho = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$. Από το πρώτο

μέρος του παραδείγματος προκύπτει ότι

$$R_Y(\tau) = P[X_1 X_2 > 0] - P[X_1 X_2 < 0] = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)},$$

δηλ. το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Κεφάλαιο 3

ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ MARKOV

3.1. Εισαγωγή

Οι τυχαίες μεταβλητές που συνιστούν την ακολουθία μιας στοχαστικής διεργασίας δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά είναι στατιστικώς εξαρτημένες και μάλιστα κατά ένα πολύπλοκο τρόπο. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε τις τυχαίες διεργασίες *Markov* οι οποίες έχουν μία απλή μορφή εξάρτησης και είναι χρήσιμες στην εύρεση καταλλήλων μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε στην πράξη. Σκοπός μας είναι να αναπτύξουμε μεθόδους για τον υπολογισμό της μεταβατικής και μακράς διάρκειας συμπεριφοράς των διεργασιών αυτών. Οι διεργασίες *Markov* αποτελούν επίσης τη βάση για τον προσδιορισμό κατάλληλων μοντέλων στην περιγραφή των συστημάτων ουρών.

Μία τυχαία διεργασία $X(t)$ είναι μία διεργασία *Markov* αν για αυθαίρετες χρονικές στιγμές $t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1}$ ισχύει

$$P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} / X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1] = P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} / X(t_k) = x_k] \quad (3.1)$$

Η σχέση (3.1) είναι γνωστή ως ιδιότητα του *Markov* και μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής :

Το μέλλον της διεργασίας εξαρτάται μόνο από το παρόν και όχι από το παρελθόν.

Η τιμή της στοχαστικής διεργασίας $X(t)$ θεωρείται ως η κατάσταση (*state*) της διεργασίας την χρονική στιγμή t .

Παράδειγμα 3.1.

Θεωρούμε την διεργασία

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n, \quad S_0 = 0,$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές X_i , αποτελούν μία διεργασία τυχαίων μεταβλητών που είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.).

Η S_n είναι μία διεργασία *Markov* επειδή

$$P[S_{n+1} = s_{n+1} / S_n = s_n, \dots, S_1 = s_1] = P[X_{n+1} = s_{n+1} - s_n] = P[S_{n+1} = s_{n+1} / S_n = s_n]$$

Παράδειγμα 3.2.

Θεωρούμε το μετακινούμενο μέσο όρο μιας ακολουθίας *Bernoulli* τυχαίων μεταβλητών

$$Y_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n-1}),$$

όπου οι X_n αποτελούν την ακολουθία των *Bernoulli* τυχαίων μεταβλητών με $p=1/2$. Θα δείξουμε ότι η Y_n δεν είναι μία διεργασία *Markov*.

Η σ.π.π. της Y_n υπολογίζεται ως εξής :

$$P[Y_n = 0] = P[X_n = 0, X_{n-1} = 0] = \frac{1}{4}$$

$$P[Y_n = \frac{1}{2}] = P[X_n = 0, X_{n-1} = 1] + P[X_n = 1, X_{n-1} = 0] = \frac{1}{2}$$

$$\text{και } P[Y_n = 1] = P[X_n = 1, X_{n-1} = 1] = \frac{1}{4}$$

Ας εξετάσουμε τώρα τις εξής δεσμευμένες πιθανότητες

$$\begin{aligned}
P\left[Y_n = 1 / Y_{n-1} = \frac{1}{2}\right] &= \frac{P\left[Y_n = 1 / Y_{n-1} = \frac{1}{2}\right]}{P\left[Y_{n-1} = \frac{1}{2}\right]} \\
&= \frac{P\left[X_n = 1, X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0\right]}{P\left[Y_{n-1} = \frac{1}{2}\right]} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \\
P\left[Y_n = 1 / Y_{n-1} = \frac{1}{2}, Y_{n-2} = 0\right] &= \frac{P\left[Y_n = 1, Y_{n-1} = \frac{1}{2}, Y_{n-2} = 0\right]}{P\left[Y_{n-1} = \frac{1}{2}, Y_{n-2} = 0\right]} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$P\left[Y_n = 1 / Y_{n-1} = \frac{1}{2}, Y_{n-2} = 0\right] \neq P\left[Y_n = 1 / Y_{n-1} = \frac{1}{2}\right]$$

και η διεργασία δεν είναι μία διεργασία *Markov*.

Αν μία διεργασία *Markov* παίρνει μόνο ακέραιες τιμές τότε καλείται μία αλυσίδα *Markov* (*Markov chain*). Για μια αλυσίδα *Markov* ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}
P[X(t_{k+1}) = x_{k+1}, X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1] &= \\
P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} / X(t_k) = x_k] P[X(t_k) = x_k / X(t_{k-1}) = x_{k-1}] & \\
\dots P[X(t_2) = x_2 / X(t_1) = x_1] P[X(t_1) = x_1] & \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Οι διεργασίες *Markov* ταξινομούνται (βλέπε Πίνακα 3.1) σύμφωνα με :

- (i) Τη φύση του παραμετρικού χώρου της διεργασίας (αν είναι διακριτός ή συνεχής) και
- (ii) Τη φύση του χώρου καταστάσεων (*state space*) της διεργασίας.

Μία πραγματική τιμή x λέγεται ότι είναι μία πιθανή τιμή ή κατάσταση (*state*) της στοχαστικής διεργασίας $\{X(t), t \in T\}$ αν υπάρχει μία χρονική στιγμή t του T τέτοια ώστε η πιθανότητα $P(x-h < X(t) < x+h)$ είναι θετική για κάθε $h > 0$. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών μιας στοχαστικής διεργασίας καλείται ο χώρος των καταστάσεων της. Ο χώρος των καταστάσεων είναι διακριτός αν περιέχει ένα πεπερασμένο ή ένα αριθμήσιμο αριθμό καταστάσεων. Ένας χώρος καταστάσεων που δεν είναι διακριτός καλείται συνεχής. Προφανώς μία διεργασία *Markov* της οποίας ο χώρος καταστάσεων είναι διακριτός είναι μία αλυσίδα *Markov*. Συχνά θα χρησιμοποιούμε το σύνολο των ακεραίων $\{0, 1, \dots\}$ ως τον χώρο καταστάσεων μιας αλυσίδας *Markov*.

Χώρος καταστάσεων

		<i>Διακριτός</i>	<i>Συνεχής</i>
Παραμετρικός Χώρος	<i>Διακριτός</i>	<i>Αλυσίδα Markov με διακριτή παράμετρο</i>	<i>Διεργασία Markov με διακριτή παράμετρο</i>
	<i>Συνεχής</i>	<i>Αλυσίδα Markov με συνεχή παράμετρο</i>	<i>Διεργασία Markov με συνεχή παράμετρο</i>

Πίνακας 3.1. Ταξινόμηση διεργασιών *Markov*

3.2. Πιθανότητες μετάβασης

Μία αλυσίδα *Markov* είναι κατά πολύ η πιο σπουδαία διεργασία *Markov*. Σε μία αλυσίδα *Markov* $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ ορίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης βήματος n (*n-step transition probabilities*)

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j / X_m = i] \tag{3.3}$$

Θα μελετήσουμε εδώ μόνο τις περιπτώσεις εκείνες για τις οποίες οι πιθανότητες $p_{ij}^{(n)}$ δεν εξαρτώνται από το m , δηλ.

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{m+n} = j / X_m = i] = P[X_m = j / X_0 = i] \quad (3.4)$$

Μια τέτοια αλυσίδα λέγεται ότι έχει στάσιμες πιθανότητες μετάβασης (*stationary transition probabilities*) και ονομάζεται ομογενής (*homogeneous*).

Ορίζουμε τον πίνακα $P = [p_{ij}]$, $i, j \in S$ ως τον πίνακα με πιθανότητες

μετάβασης βήματος 1, όπου $p_{ij} = P[X_{m+1} = j / X_m = i]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{και} \quad \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$$

Ένας τέτοιος τετραγωνικός πίνακας με αθροίσματα σειρών ίσα με την μονάδα και μη-αρνητικά στοιχεία ονομάζεται **Στοχαστικός Πίνακας** (*Stochastic Matrix*).

Όταν δίνεται ο πίνακας P μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξής πιθανότητες

$$\begin{aligned} & P[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n / X_0 = i_0] \\ &= P[X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n / X_0 = i_0, X_1 = i_1] P[X_1 = i_1 / X_0 = i_0] \\ &= \dots = P[X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] \dots P[X_2 = i_2 / X_1 = i_1, X_0 = i_0] \\ & P[X_1 = i_1 / X_0 = i_0] = P[X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}] \dots P[X_2 = i_2 / X_1 = i_1] \\ & P[X_1 = i_1 / X_0 = i_0] = p_{i_0, i_1} p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{n-1}, i_n} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μεγάλη απλοποίηση στον υπολογισμό των πιθανοτήτων λόγω της ιδιότητας *Markov*.

Κατά παρόμοιο τρόπο, όπως και προηγουμένως, ορίζουμε τον πίνακα των πιθανοτήτων μετάβασης n -βημάτων, δηλ.

$$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}], \quad i, j \in S.$$

Μία σημαντική σχέση που ισχύει είναι η ακόλουθη $P^{(2)} = P^2$. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται ως εξής

$$p_{ij}^{(2)} = P[X_{m+2} = j / X_m = i] = \sum_{k \in S} P[X_{m+2} = j, X_{m+1} = k / X_m = i]$$

$$= \sum_{k \in S} P[X_{m+2} = j / X_{m+1} = k, X_m = i] P[X_{m+1} = k / X_m = i]$$

$$= \sum_{k \in S} P[X_{m+2} = j / X_{m+1} = k] P[X_{m+1} = k / X_m = i]$$

$$= \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj} \quad (\text{λόγω στασιμότητας})$$

$$= \text{το στοιχείο } (i,j) \text{ του } P^2 \text{ δηλ. } P^{(2)} = P^2$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $P^{(n)} = P^n$ ($P^0 = I$).

Η γενική σχέση η οποία ισχύει μεταξύ πιθανοτήτων μετάβασης είναι η εξής:

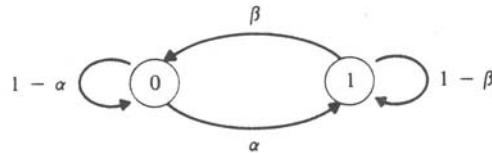
$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \quad (3.5)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως Chapman-Kolmogorov εξίσωση. Άρα, όταν δίνεται ο πίνακας P , μπορούμε να υπολογίσουμε τη μελλοντική πιθανοκρατική κατασκευή της αλυσίδας *Markov*.

Παράδειγμα 3.3. Αλυσίδα Μαίκον δύο καταστάσεων.

Θεωρούμε την ακόλουθη *Αλυσίδα Markov* δύο καταστάσεων για την περιγραφή ενός κωδικοποιημένου σήματος δυαδικού χαρακτήρος : Όταν στη

νιοστή θέση έχουμε 0, τότε η πιθανότητα στην επόμενη θέση να έχουμε 0 είναι $1 - \alpha$ και η πιθανότητα να έχουμε 1 είναι α . Ομοίως όταν στη νιοστή θέση έχουμε 1, τότε η πιθανότητα να έχουμε 1 στην επόμενη θέση είναι $1 - \beta$ και 0 είναι β . Μία γραφική παράσταση της Αλυσίδας Markov δίνεται από το διάγραμμα



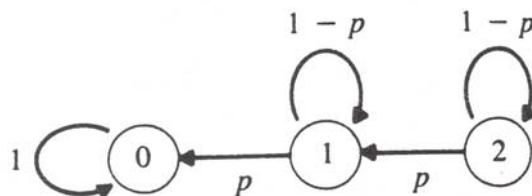
Σχήμα 3.1. Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης για μία αλυσίδα Markov δύο καταστάσεων.

Έστω X_n η συνάρτηση που δηλώνει την κατάσταση του σήματος τη χρονική στιγμή n . Τότε η ακολουθία $\{X_n, n=0, 1, \dots\}$ είναι μία Αλυσίδα Markov με τον ακόλουθο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης βήματος 1

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.4.

Την ημέρα 0 ένα σπίτι έχει δύο καινούργιες λάμπες στην αποθήκη. Η πιθανότητα ότι το σπίτι θα χρειασθεί μία καινούργια λάμπα την ημέρα n είναι p , ενώ η πιθανότητα ότι δεν θα χρειασθεί είναι $1 - p$. Έστω Y_n ο αριθμός των καινούργιων λαμπών που υπάρχουν στην αποθήκη του σπιτιού στο τέλος της ημέρας n . Η ακολουθία $\{Y_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ είναι μία Αλυσίδα Markov με διάγραμμα



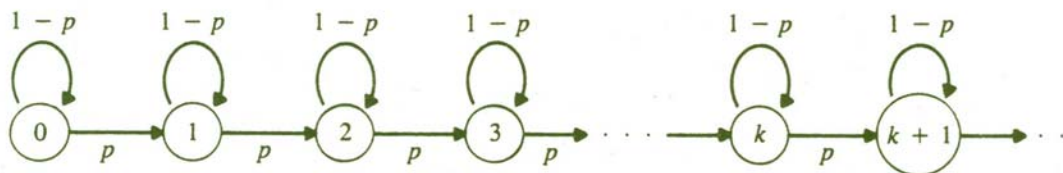
Σχήμα 3.2. Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης απογραφής λαμπών.

και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης βήματος 1

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & 0 \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.5.

Έστω S_n μία διωνυμική διεργασία, δηλ. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, όπου X_i , $i=1, \dots, n$ είναι *Bernoulli* τυχαίες μεταβλητές. Σ' ένα νέο βήμα, η S_n μπορεί είτε να μείνει στην ίδια κατάσταση ή να αυξηθεί κατά ένα. Το διάγραμμα καταστάσεων της διεργασίας είναι το ακόλουθο



Σχήμα 3.3. Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης για τη διωνυμική διεργασία.

και έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης βήματος 1

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-p & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

3.3. Οι πιθανότητες των καταστάσεων

Θεωρούμε τις πιθανότητες των καταστάσεων την χρονική στιγμή n . Έστω $\mathbf{p}^{(n)} = \{p_j^{(n)}\}$ το διάνυσμα σειράς των πιθανοτήτων των καταστάσεων τη χρονική στιγμή n . Η πιθανότητα $p_j^{(n)}$ υπολογίζεται ως εξής

$$p_j^{(n)} = \sum_i P[X_n = j / X_{n-1} = i] P[X_{n-1} = i] = \sum_i p_{ij} p_i^{(n-1)} \quad (3.6)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}_j^{(n)} \cdot P$$

Ομοίως, η $p_j^{(n)}$ μπορεί να υπολογισθεί από την ακόλουθη σχέση

$$p_j^{(n)} = \sum_i P[X_n = j / X_0 = i] P[X_0 = i] = \sum_i p_{ij}^{(n)} p_i^{(0)} \quad (3.7)$$

ή ακόμα $\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} \cdot P^n$, $n = 1, 2, \dots$.

Παράδειγμα 3.5. (Συνέχεια)

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας μετάβασης βήματος n σημειώνουμε ότι

$$p_{22}^{(n)} = P(\text{δεν χρειάζεται νέα λάμπα σε } n \text{ ημέρες}) = q^n$$

$$p_{21}^{(n)} = P(1 \text{ λάμπα χρειάζεται σε } n \text{ ημέρες}) = npq^{n-1}$$

$$p_{20}^{(n)} = 1 - p_{22}^{(n)} - p_{21}^{(n)},$$

οπότε

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - q^n & q^n & 0 \\ 1 - q^n - npq^{n-1} & npq^{n-1} & q^n \end{bmatrix}$$

Για $q < 1$, καθώς $n \rightarrow \infty$ έχουμε

$$P^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως για το διάνυσμα καταστάσεων $\mathbf{p}^{(n)} = (p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)})$ βρίσκουμε

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(0)} p_0^{(n)} (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) \mathbf{p}^{(n)} = (0, 0, 1) \mathbf{p}^{(n)}$$

$$\rightarrow (0, 0, 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (1, 0, 0)$$

όπου $(p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)})$ είναι το διάνυσμα σειράς των πιθανοτήτων της αρχικής κατάστασης και $(p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}) = (0, 0, 1)$, επειδή αρχίζουμε με δύο λάμπες. Το αποτέλεσμα μας λέει ότι τελικά θα μείνουμε χωρίς λάμπες.

Παράδειγμα 3.6.

Για μια Αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$$

μπορεί να δειχθεί ότι

$$P^{(2)} = p^2 = \begin{bmatrix} p_{00}^2 + p_{01}p_{10} & p_{01}(p_{00} + p_{11}) \\ p_{10}(p_{00} + p_{11}) & p_{11}^2 + p_{01}p_{10} \end{bmatrix}$$

Αν επιπλέον ισχύει $|p_{00} + p_{11} - 1| < 1$, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει

$$P^{(n)} = \frac{1}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{bmatrix} 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \\ 1 - p_{11} & 1 - p_{00} \end{bmatrix} + \frac{(p_{00} + p_{11} - 1)^n}{2 - p_{00} - p_{11}} \begin{bmatrix} 1 - p_{00} & -(1 - p_{00}) \\ -(1 - p_{11}) & (1 - p_{11}) \end{bmatrix}$$

Από την σχέση αυτή εύκολα προκύπτει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{10}^{(n)} = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{00} - p_{11}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{01}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1 - p_{00}}{2 - p_{00} - p_{11}}$$

Ένα παράδειγμα μιας ομογενούς διεργασίας *Markov* δύο καταστάσεων δίνεται από ένα σύστημα τηλεπικοινωνιών που χρησιμοποιεί τα ψηφία 0 και 1. Κάθε ψηφίο που μεταφέρεται πρέπει να περάσει μέσα από πολλές φάσεις, σε κάθε μία από τις οποίες υπάρχει πιθανότητα p , ότι το ψηφίο που εισέρχεται θα μείνει αμετάβλητο στην έξοδο. Έστω ότι X_n συμβολίζει το ψηφίο που εγκαταλείπει την νιοστή φάση του συστήματος. Η ακολουθία $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ αποτελεί τότε μία ομογενή αλυσίδα *Markov* με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \quad \text{όπου } q=1-p$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} p^2 + q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2 + q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^2 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^2 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^2 \end{bmatrix}$$

Γενικεύοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix}$$

Αν $p = \frac{2}{3}$, τότε

$$P[X_2 = 1 / X_0 = 1] = p_{11}^{(2)} = \frac{5}{9} \quad \text{και} \quad P[X_3 = 1 / X_0 = 1] = p_{11}^{(3)} = \frac{14}{27}$$

Οι πιθανότητες αυτές μας λένε ότι ένα ψηφίο που εισέρχεται στο σύστημα σαν 1 έχει πιθανότητα $5/9$ να μεταβιβασθεί σωστά μετά από δύο φάσεις και πιθανότητα $14/27$ μετά από 3 φάσεις.

Ενδιαφέρον επίσης είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι ένα ψηφίο που μεταβιβάζεται από το σύστημα σαν μονάδα, στην πραγματικότητα εισήλθε στο σύστημα σαν μονάδα. Επιθυμούμε δηλαδή να υπολογίσουμε την ακόλουθη πιθανότητα

$$P[X_0=1/X_n=1]$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή εργαζόμαστε ως εξής

$$P[X_0 = 1 / X_n = 1] = \frac{P[X_0 = 1, X_n = 1]}{P[X_n = 1]} = \frac{P[X_n = 1 / X_0 = 1]P[X_0 = 1]}{P[X_n = 1]}$$

όπου

$$P[X_n = 1] = P[X_n = 1 / X_0 = 1]P[X_0 = 1] + P[X_n = 1 / X_0 = 0]P[X_0 = 0]$$

Άρα

$$P[X_0 = 1 / X_n = 1] = \frac{\alpha[1 - (p - q)^n]}{1 + (a - b)(p - q)^n},$$

όπου $P[X_0 = 1] = a$ και $P[X_0 = 0] = b$

3.4. Οι πιθανότητες των καταστάσεων στην σταθερά κατάσταση

Το Παράδειγμα 3.6 είναι ένα τυπικό παράδειγμα μιας αλυσίδας *Markov* που προσεγγίζει μία σταθερά κατάσταση μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα λειτουργίας της διεργασίας. Καθώς $n \rightarrow \infty$, ο πίνακας μετάβασης πιθανοτήτων βήματος n προσεγγίζει έναν πίνακα στον οποίο όλες οι σειρές είναι ίσες με την ίδια πιθανότητα, δηλ.

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j \quad \text{για όλα τα } i.$$

Η (3.7), καθώς $n \rightarrow \infty$, λαμβάνει τη μορφή

$$p_j^{(n)} \rightarrow \sum_i \pi_j p_i^{(0)} = \pi_j \quad \text{για όλα τα } j.$$

Επομένως, καθώς $n \rightarrow \infty$, η πιθανότητα της κατάστασης j προσεγγίζει μία σταθερά η οποία είναι ανεξάρτητη από το χρόνο και τις πιθανότητες της αρχικής κατάστασης. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα φθάνει τη σταθερά κατάσταση (*steady state*) ή την κατάσταση ισοροπίας (*equilibrium*).

Αν θέσουμε το διάνυσμα σειράς $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}$, και καθώς $p_j^{(n)} \rightarrow \pi_j$, $p_i^{(n)} \rightarrow \pi_j$, από την (3.6) επιτυγχάνουμε

$$\pi_j = \sum_i p_{ij} \pi_j \quad \text{ή ακόμα} \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \quad (3.8)$$

Εν γένει η (3.8) έχει $(n-1)$ γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Η επιπλέον εξίσωση που χρειάζεται δίνεται από τη σχέση $\sum_i \pi_i = 1$. Αν η διεργασία *Markov* έχει πιθανότητες αρχικής κατάστασης $\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{\pi}$ τότε το διάνυσμα των πιθανοτήτων των καταστάσεων παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{p}^{(n)} = \boldsymbol{\pi} P^{(n)} = \boldsymbol{\pi} \quad \text{για όλα τα } n,$$

Η διεργασία που ακολουθεί είναι μία στάσιμη τυχαία διεργασία επειδή η πιθανότητα της ακολουθίας των καταστάσεων i_0, i_1, \dots, i_n που αρχίζουν τη χρονική στιγμή k είναι

$$\begin{aligned} P[X_{n+k} = i_n, \dots, X_k = i_0] &= P[X_{n+k} = i_n / X_{n+k-1} = i_{n-1}] \\ \dots P[X_{l+k} = i_l / X_k = i_0] P[X_k = i_0] &= P[X_{n+k} = i_n / X_{n+k-1} = i_{n-1}] \\ \dots P[X_{l+k} = i_l / X_k = i_0] \pi_{i_0} &= p_{i_{n-1}, i_n} \dots p_{i_0, i_1} p_{i_1} \pi_{i_0}, \end{aligned}$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από την αρχική χρονική στιγμή k . Έτσι οι πιθανότητες είναι ανεξάρτητες από την εκλογή της αρχικής χρονικής στιγμής, και η διεργασία είναι στάσιμη.

Παράδειγμα 3.6. (Συνέχεια)

Θεωρούμε τον πίνακα πιθανοτήτων βήματος 1 $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$.

Από την εξίσωση $\pi = \pi P$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \pi_0 = p\pi_0 + q\pi_1 \\ \pi_1 = q\pi_0 + p\pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow q\pi_0 = q\pi_1 \Rightarrow \pi_0 = \pi_1$$

Άρα $\pi_0 = \pi_1 = \frac{1}{2}$ επειδή $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλες οι αλυσίδες *Markov* δεν φθάνουν την στάσιμη συμπεριφορά. Για παράδειγμα, η διωνυμική διεργασία S_n με $p > 0$ αυξάνει σταθερά έτσι ώστε, για σταθερό j , $p_j^{(n)} \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Μπορούμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μακράς διάρκειας των αλυσίδων *Markov* και να καθορίσουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες οι αλυσίδες *Markov* φθάνουν σε μία σταθερή κατάσταση (βλέπε Leon-Garsia, 1989).

3.5. Αλυσίδες *Markov* με συνεχή παραμετρικό χώρο

Σε προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης καθορίζει τη συμπεριφορά μιας αλυσίδας *Markov* με διακριτό παραμετρικό χώρο. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ότι αυτό είναι αληθές και για τις Αλυσίδες *Markov* με συνεχή παραμετρικό χώρο.

Η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} P[X(t_{k+1}) = x_{k+1}, X(t_k) = x_k, \dots, X(t_1) = x_1] = \\ = P[X(t_{k+1}) = x_{k+1} / X(t_k) = x_k] \dots P[X(t_2) = x_2 / X(t_1) = x_1] P[X(t_1) = x_1] \end{aligned}$$

ισχύει και στην περίπτωση που η διεργασία ορίζεται σε διακριτό παραμετρικό χώρο και στην περίπτωση που ορίζεται σε συνεχή παραμετρικό χώρο. Στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου η από κοινού πιθανότητα απαιτεί να γνωρίζουμε τις πιθανότητες από την αυθαίρετη χρονική στιγμή s στη χρονική στιγμή $s+t$. Θεωρούμε ότι οι πιθανότητες μετάβασης εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών, δηλ.

$$P[X(t+s) = j / X(s) = i] = P[X(t) = j / X(0) = i] = p_{ij}(t),$$

για $t \geq 0$ και όλα τα j .

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι ομογενής στο χρόνο.

Έστω $P(t) = \{p_{ij}(t)\}$ ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης την χρονική στιγμή t . Επειδή $p_{ij}(0) = 1$ ($i = j$) και $p_{ij}(0) = 0$ ($i \neq j$) έχουμε $P(0) = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Εξετάζουμε τώρα την πιο απλή περίπτωση μιας Αλυσίδας *Markov* με συνεχή παραμετρικό χώρο.

3.6. Εναλλακτικός ορισμός της διεργασίας *Poisson*

Γεγονότα συμβαίνουν στο χρόνο κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\left. \begin{aligned} P\{0 \text{ γεγονότα στο } [t, t + \delta t)\} &= 1 - \lambda \delta t + o(\delta t) \\ P\{1 \text{ γεγονός στο } [t, t + \delta t)\} &= \lambda \delta t + o(\delta t) \\ P\{\text{δύο ή περισσότερα γεγονότα στο } [t, t + \delta t)\} &= o(\delta t) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Το } \lambda \text{ θεωρείται} \\ \text{σταθερό και δεν} \\ \text{εξαρτάται από} \\ \text{το χρόνο} \end{array}$$

Επίσης γεγονότα που συμβαίνουν σε μη-επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξάρτητα. Η διεργασία που ορίζεται με τον τρόπο αυτό ονομάζεται μία *Poisson* διεργασία.

Στην περίπτωση αυτή η στασιμότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι πιθανότητες εξαρτώνται μόνο από το εύρος του διαστήματος (δt) και όχι από τη χρονική στιγμή t .

Έστω $X(t) = o$ αριθμός των γεγονότων στο $[0, t)$ και $p_n(t) = P[X(t) = n]$,
 $n=0, 1, 2, \dots$

Η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας (γ.σ.π.) της $X(t)$ ορίζεται από τη σχέση

$$\Pi_t(z) = E(z^{X(t)}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$$

Για να υπολογίσουμε την γ.σ.π. της *Poisson* διεργασίας εργαζόμαστε ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi_{t+\delta t}(z) &= E(z^{X(t+\delta t)}) = E(z^{X(t)} z^{X(t+\delta t)-X(t)}) \\ &= E(z^{X(t)}) E(z^{X(\delta t)}) = \Pi_t(z) \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\delta t) z^n \\ &= \Pi_t(z) \left[(1 - \lambda \delta t) z^0 + \lambda \delta t z^1 + o(\delta t) \right] \\ &\Rightarrow \frac{\Pi_{t+\delta t}(z) - \Pi_t(z)}{\delta t} = (-\lambda + \lambda z) \Pi_t(z) + o(1) \\ &\Rightarrow \frac{d\Pi_t(z)}{dt} = -\lambda(1-z) \Pi_t(z) \quad \text{καθώς } \delta t \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \log \Pi_t(z) = -\lambda(1-z)t + c \quad \Rightarrow \Pi_t(z) = A e^{-\lambda(1-z)t} \end{aligned}$$

Για $z=1$ έχουμε $E(1^{X(t)}) = \Pi_t(1) = 1$ και επομένως $A=1$.

Άρα $\Pi_t(z) = e^{-\lambda(1-z)t}$

Από τη σχέση αυτή για την γ.σ.π. επιτυγχάνουμε την ακόλουθη κατανομή

$$\Pi_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n = e^{-\lambda t} \left[1 + (\lambda t)z + \frac{(\lambda t)^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{(\lambda t)^n}{n!} + \dots \right]$$

Αν τώρα εξισώσουμε τους συντελεστές του z^n , βρίσκουμε

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

δηλ. ο αριθμός των γεγονότων την χρονική στιγμή t , ακολουθεί μία *Poisson* κατανομή.

3.6. 1. Τυπική διεργασία Markov

Θεωρούμε ότι ο παραμετρικός χώρος είναι $(0, \infty)$ και η $X(t)$ περιγράφει την κατάσταση της διεργασίας τη χρονική στιγμή t . Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j / X(s) = i) = P(X(t) = j / X(0) = i)$ θεωρούνται ανεξάρτητες από το s , δηλ. η διεργασία είναι στάσιμη.

Ορίζουμε τον πίνακα πιθανοτήτων

$$P(t) = [p_{ij}(t)], \quad i, j \in S$$

Επιπλέον θεωρούμε ότι

$$(i) \text{ Για κάθε } t \quad p_{ij}(t) \geq 0 \quad \left(\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 \right)$$

$$(ii) \quad p_{ij}(t) \rightarrow 1 \text{ καθώς } t \rightarrow 0 \quad (i=j)$$

$$\text{και } p_{ij}(t) \rightarrow 0 \text{ καθώς } t \rightarrow 0 \quad (i \neq j).$$

$$\text{Με άλλα λόγια ισχύει } p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Μία τέτοια διεργασία καλείται τυπική διεργασία *Markov*. Θεωρούμε τώρα ότι $u, v > 0$. Οι πιθανότητες $p_{ij}(u+v)$ υπολογίζονται ως εξής

$$p_{ij}(u+v) = P(X_{u+v} = j / X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{u+v} = j / X_u = k, X_0 = i).$$

$$P(X_u = k / X_0 = i) = \sum_{k \in S} P_{ik}(u) p_{kj}(v), \quad \text{δηλ.} \quad (3.9)$$

$$P(u+v) = P(u)P(v) \quad (\text{σε μορφή πινάκων})$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως εξίσωση των *Chapman-Kolmogorov* για την περίπτωση συνεχούς παραμετρικού χώρου. Η μόνη λύση της εξίσωσης αυτής δίνεται από τη σχέση $P(u)=e^{uQ}$, όπου Q είναι ένας σταθερός τετραγωνικός πίνακας και στην περίπτωση που το S (χώρος καταστάσεων) είναι πεπερασμένο, τότε

$$e^{uQ} = I + uQ + \frac{u^2 Q^2}{2!} + \dots$$

3.7. Πίνακας αναλογιών μετάβασης

Οι πίνακες $P(t)$ και Q είναι ισοδύναμοι και όταν δίνεται ο ένας μπορούμε να υπολογίσουμε τον άλλο. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τον Q για να παραστήσουμε τη διεργασία *Markov*. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο

$$P(\delta t) = e^{Q\delta t}, \text{ οπότε } p_{ij}(\delta t) = \delta_{ij} + q_{ij}\delta t + o(\delta t) \text{ αν } Q=[q_{ij}].$$

$$\text{Άρα } \frac{p_{ij}(\delta t) - p_{ij}(0)}{\delta t} = q_{ij} + o(1), \text{ δηλ. } q_{ij} = p'_{ij}(0) \text{ και } Q = P'(0)$$

Για $i \neq j$, $p_{ij}(0) = 0$ και επομένως $p_{ij}(\delta t) \cong q_{ij} \delta t$. Το q_{ij} δίνει την αναλογία μετάβασης από το i στο j ($q_{ij} \geq 0$). Ο πίνακας Q είναι γνωστός ως πίνακας αναλογιών μετάβασης.

Για $i = j$ $p_{ij}(0) = p_{ij}(0) = 1$, οπότε $p_{ij}(\delta t) - 1 \cong q_{ij} \delta t$ δηλ. $q_{ij} < 0$. Ορίζουμε $q_i = -q_{ij} \geq 0$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\sum_{j \in S} q_{ij} = \frac{d}{dt} \sum_{i \in S} p_{ij}(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} 1 \Big|_{t=0} = 0$$

Επομένως ο πίνακας Q έχει θετικά ή μηδενικά στοιχεία εκτός διαγωνίου, αλλά μηδενικά αθροίσματα γραμμών.

3.8. Χρόνος παραμονής σε μία κατάσταση

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε

$$p_{ij}(\delta t) = 1 + q_{ij} \delta t + o(\delta t) = 1 - q_i \delta t + o(\delta t)$$

Έστω T_i η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που περιγράφει το χρόνο παραμονής στην κατάσταση i . Μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της τ.μ. T_i ως εξής

$$P[T_i > t] = P(X_\tau = i, 0 \leq \tau \leq t) \approx P\left(X_\tau = i, \tau = 0, \frac{t}{n}, \frac{2t}{n}, \dots, \frac{(n-1)t}{n}, t\right)$$

Για n αρκετά μεγάλο θα έχουμε

$$P[T_i > t] = p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) \dots p_{ii}\left(\frac{t}{n}\right) = \left[1 - q_i \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

και, καθώς $n \rightarrow \infty$, $P(T_i > t) = e^{-q_i t}$. Άρα $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-q_i t}$

Προκύπτει λοιπόν ότι η σ.π.π. του χρόνου παραμονής στην κατάσταση i είναι εκθετική ($q_i e^{-q_i t}$). Αναχωρήσεις από την κατάσταση i συμβαίνουν σύμφωνα με μία *Poisson* διεργασία της οποίας η ένταση είναι q_i .

Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ ισχυρό επειδή προκύπτει από πολύ λίγες προϋποθέσεις και ισχύει για την τυπική διεργασία *Markov* (με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S).

3.9. Εξισώσεις Kolmogorov

Από την εξίσωση των *Charman-Kolmogorov* έχουμε :

Εξίσωση προς τα εμπρός

$$\begin{aligned} P(t+h) - P(t) &= P(t)P(h) - P(t) \\ &= P(t)[P(h) - I] \\ &= P(t)[P(h) - P(0)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P'(t)$$

$$\begin{aligned} &= P(t)P'(0) = P(t)Q \\ \Rightarrow P'(t) &= P(t)Q \end{aligned}$$

Εξίσωση προς τα πίσω

$$\begin{aligned} P(t+h) - P(t) &= P(h)P(t) - P(t) \\ &= [P(h) - I]P(t) \\ &= [P(h) - P(0)]P(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{P(t+h) - P(t)}{h} = P'(t)$$

$$\begin{aligned} &= P'(0)P(t) = QP(t) \\ \Rightarrow P'(t) &= QP(t) \end{aligned}$$

Οι ανωτέρω εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην εξής μορφή

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} \quad (3.10\alpha) \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik} p_{kj}(t) \quad (3.10\beta)$$

Υποθέτουμε ότι η διεργασία φθάνει σε μία σταθερά κατάσταση καθώς $t \rightarrow \infty$, δηλ. $p_{ij}(t) \rightarrow \pi_j$ και $p'_{ij}(t) \rightarrow 0$. Στην περίπτωση αυτή παίρνουμε

Πρώτη Εξίσωση

$$0 = \sum_{k \in S} \pi_k q_{kj}$$

$$\Rightarrow 0 = \pi' Q$$

Δεύτερη Εξίσωση

$$0 = \sum_{k \in S} q_{ik} \pi_j$$

$$\Rightarrow \pi_j \sum_{k \in S} q_{ik} = 0$$

δηλ. η δεύτερη εξίσωση δεν μας δίνει καμία πληροφορία

Παράδειγμα 3.7. Ένα απλό σύστημα αναμονής

Υποθέτουμε ότι ένα σύστημα εναλλάσσεται μεταξύ δύο καταστάσεων. Στην κατάσταση 0 το σύστημα δεν είναι απασχολημένο και περιμένει για ένα μήνυμα να φθάσει. Αυτή η περίοδος του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από μία εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\alpha$. Στην κατάσταση 1 το σύστημα είναι απασχολημένο επειδή λαμβάνει ένα μήνυμα. Η κατάσταση αυτή μπορεί να περιγραφεί από μία εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\beta$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $p_0(t)$ και $p_1(t)$ συναρτήσει των πιθανοτήτων $p_0(0)$ και $p_1(0)$ της αρχικής κατάστασης.

Λύση :

Το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 1 με μία αναλογία α και από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 0 με μία αναλογία β , δηλ. έχουμε

$$q_{00} = -\alpha, \quad q_{01} = \alpha, \quad q_{10} = \beta \quad \text{και} \quad q_{11} = -\beta.$$

Από την πρώτη εξίσωση *Kolmogorov* (3.10α) βρίσκουμε ότι

$$p_0'(t) = -\alpha p_0(t) + \beta p_1(t)$$

$$p_1'(t) = \alpha p_0(t) - \beta p_1(t)$$

Επειδή $p_0(t) + p_1(t) = 1$, η πρώτη εξίσωση του ανωτέρω συστήματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$p_0'(t) = -\alpha p_0(t) + \beta[1 - p_0(t)]$$

$$p_0'(t) + (\alpha + \beta)p_0(t) = \beta, \quad p_0(0) = p_0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μία διαφορική εξίσωση 1ης τάξης, της οποίας η λύση δίνεται από τη σχέση

$$p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + C e^{-(\alpha + \beta)t}$$

Στη σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά C αν θέσουμε $t=0$ και επομένως

$$p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \left[p_0(0) - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right] e^{-(\alpha + \beta)t}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$p_1(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \left[p_1(0) - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right] e^{-(\alpha + \beta)t}$$

Καθώς $t \rightarrow \infty$, $p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ και $p_1(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$

Παράδειγμα 3.8.

Στο τυχαίο τηλεγραφικό σήμα, η διεργασία $X(t)$ αλλάζει κατάσταση κάθε φορά που εμφανίζεται ένα γεγονός σε μία διεργασία *Poisson*. Οι πιθανότητες μετάβασης υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$P[X(t) = a / X(0) = a] = \frac{1}{2} [1 + e^{-2at}]$$

$$P[X(t) = a / X(0) = b] = \frac{1}{2} [1 - e^{-2at}] \quad \alpha\nu \quad a \neq b$$

Έτσι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης παίρνει τη μορφή

$$P(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \{1 + e^{-2at}\} & \frac{1}{2} \{1 - e^{-2at}\} \\ \frac{1}{2} \{1 - e^{-2at}\} & \frac{1}{2} \{1 + e^{-2at}\} \end{bmatrix}$$

Καθώς $t \rightarrow 0$ συνεπάγεται

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 4

ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΣΤΙΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ

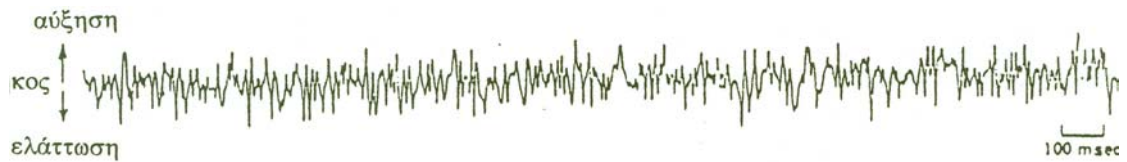
4.1. Εισαγωγή

Οι στατιστικές τεχνικές για την ανάλυση των στοχαστικών διεργασιών εκτείνονται από τις πιο απλές μέχρι τις πιο πολύπλοκες. Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται μερικές αρκετά απλές τεχνικές που συχνά φανερώνουν τις κύριες ιδιότητες της διεργασίας υπό μελέτη. Περισσότερο πολύπλοκες τεχνικές, όπως η φασματική ανάλυση, αναφέρονται σε επόμενα κεφάλαια. Επειδή τα προβλήματα που εξετάζουμε περιγράφουν φαινόμενα που μεταβάλλονται με το χρόνο, για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιούμε την ορολογία χρονοσειρά αντί της στοχαστικής διεργασίας.

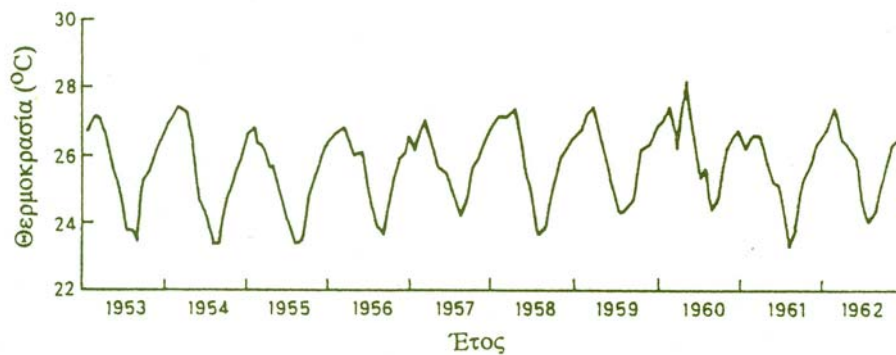
Παραδοσιακές μέθοδοι ανάλυσης χρονοσειρών αναφέρονται κυρίως στην ανάλυση μίας σειράς με μία κλίση, μία περιοδικότητα (*periodicity or seasonal effect*) και άλλες ακανόνιστες (*irregular*) μεταβολές. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι πάντοτε η καλύτερη αλλά χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη.

Περιγράψουμε τώρα αυτούς τους διαφορετικούς τύπους μεταβολής με περισσότερες λεπτομέρειες:

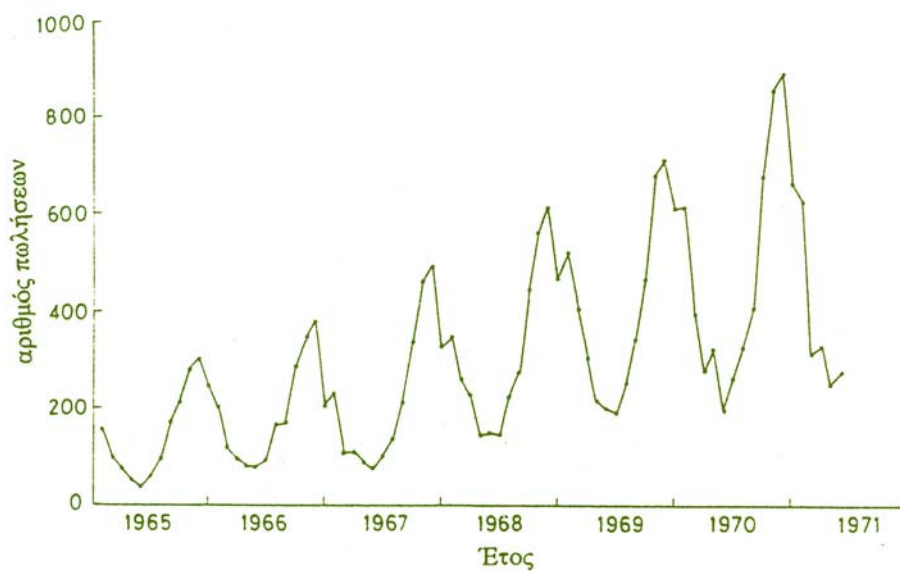
- α) Κλίση :** Ο όρος αυτός ορίζεται μ' ένα μη-αυστηρό τρόπο σαν μία μακράς διάρκειας αλλαγή στη μέση τιμή της χρονοσειράς. Το Σχ.4.1 περιγράφει μία χρονοσειρά η οποία δεν έχει καμία κλίση, δηλ. είναι σταθερή ως προς τη μέση τιμή, ενώ το Σχ.4.3 παρουσιάζει μία αύξηση της κλίσης με το χρόνο.
- β) Περιοδικότητα :** Πολλές χρονοσειρές, όπως αριθμοί πωλήσεων εταιρειών και μετρήσεις θερμοκρασιών διαφόρων τόπων, παρουσιάζουν μία μεταβολή η οποία έχει ετήσια περίοδο. Παραδείγματα είναι τα Σχήματα 4.2. και 4.3. Αυτός ο τύπος της μεταβολής γίνεται αντιληπτός εύκολα και όπως θα δούμε, μπορεί να



Σχήμα 4.1. Αλλαγές στο μήκος ενός μν μιας γάτας. Η χρονοσειρά αυτή δεν παρουσιάζει καμμία συστηματική αλλαγή ως προς τη μέση τιμή.



Σχήμα 4.2. Μέσες τιμές της θερμοκρασίας του αέρος στο Recife Βραζιλίας σε διαδοχικούς μήνες.



Σχήμα 4.3. Πωλήσεις μιας εταιρείας ηλεκτρονικών οργάνων σε διαδοχικούς μήνες. μετακινηθεί για την παραγωγή μιας νέας χρονοσειράς χωρίς εποχιακή περιοδικότητα.

γ) **Άλλες ακανόνιστες μεταβολές** : Μετά την μετακίνηση των μεταβολών που οφείλονται στην κλίση και στην περιοδικότητα από τη χρονοσειρά, έχουμε απομείνει με μία σειρά υπολοίπων, η οποία μπορεί να είναι ή να μην είναι τυχαία. Θα εξετάσουμε διάφορες τεχνικές για την ανάλυση σειρών τέτοιου τύπου για να δούμε αν μερικές από τις φανερές ακανόνιστες μεταβολές είναι δυνατό να εξηγηθούν με τη βοήθεια των πιθανοκρατικών μοντέλων. Εναλλακτικά, μπορούμε να δούμε αν κάποια κυκλική μεταβολή έχει παραμείνει ακόμη στα υπόλοιπα.

Επιπρόσθετα παραδείγματα χρονοσειρών δίνονται στο Σχ.4.4.

4.2. Στάσιμες Χρονοσειρές

Μία χρονοσειρά θα λέμε ότι είναι στάσιμη αν δεν υπάρχει συστηματική αλλαγή στη μέση τιμή (δηλ. δεν υπάρχει κλίση), αν δεν υπάρχει συστηματική αλλαγή στη διασπορά, και αν περιοδικές μεταβολές έχουν μετακινηθεί. Ένας αυστηρότερος ορισμός μιας στάσιμης χρονοσειράς δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

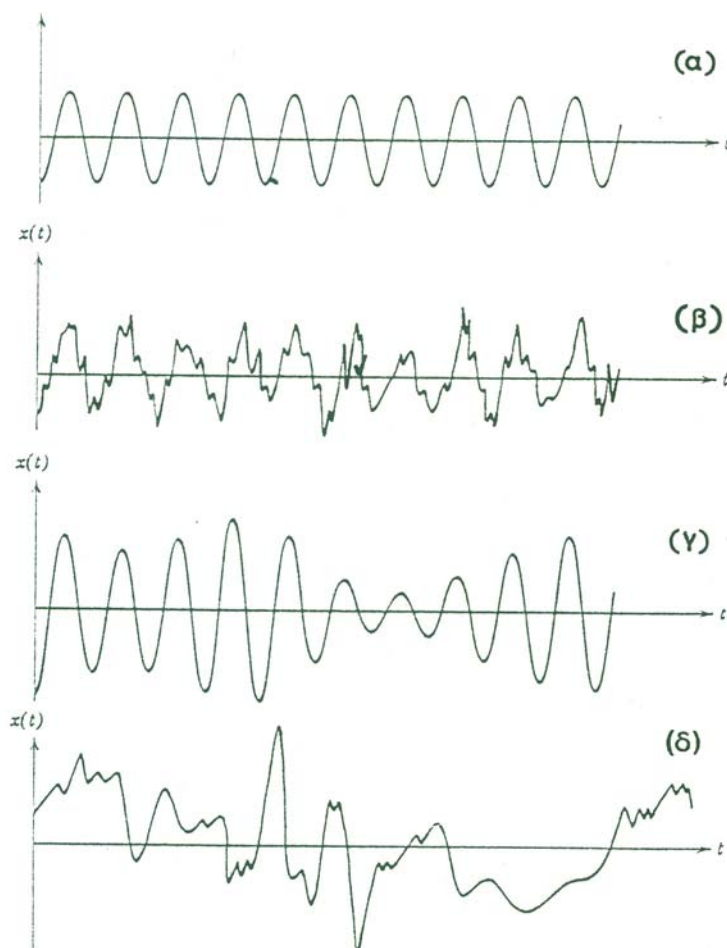
Το μεγαλύτερο μέρος της πιθανοκρατικής μελέτης των χρονοσειρών αναφέρεται στις στάσιμες χρονοσειρές, και γι' αυτό το λόγο είναι συχνά απαραίτητο να μετατρέψουμε μία "μη-στάσιμη" χρονοσειρά σε στάσιμη για να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία αυτή. Για παράδειγμα κάποιος θα μπορούσε να μετακινήσει την κλίση και την περιοδικότητα από ένα σύνολο παρατηρήσεων και μετά να προσπαθήσει να βρει ένα μοντέλο για τη μεταβολή στα υπόλοιπα με τη βοήθεια μίας στάσιμης χρονοσειράς.

4.3. Γραφική παράσταση

Το πρώτο βήμα στην ανάλυση μιας χρονοσειράς είναι η γραφική παράσταση των παρατηρήσεων σαν συνάρτηση του χρόνου. Αυτό θα φανερώσει σπουδαία χαρακτηριστικά, όπως κλίση, περιοδικότητα, ασυνέχειες και απομακρυσμένες παρατηρήσεις (*outliers*). Υπάρχουν σήμερα έτοιμα πακέτα στον υπολογιστή τα οποία μπορούν να μας δώσουν πολύ ωραίες παραστάσεις των διαθέσιμων δεδομένων.

4.4. Μετασχηματισμοί

Όταν παραστήσουμε με μία γραφική παράσταση τα δεδομένα μπορεί να φανεί ότι είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε τις τιμές της παρατηρούμενης μεταβλητής. Οι βασικές αιτίες που μας οδηγούν στο μετασχηματισμό είναι οι εξής :



Σχήμα 4.4. Παραδείγματα χρονοσειρών (α) Ημιτονοειδές σήμα (β) Ημιτονοειδές σήμα με θόρυβο. (γ) Στενής ζώνης σήμα και (δ) Ευρείας ζώνης σήμα.

α) Να κάνουμε την περιοδικότητα προσθετική. Αν υπάρχει μία κλίση στη χρονοσειρά και το μέγεθος της περιοδικότητας φαίνεται να αυξάνει με τη μέση τιμή, τότε μπορεί να είναι χρήσιμο να μετασχηματίσουμε τα δεδομένα και να κάνουμε την περιοδικότητα σταθερή. Ειδικότερα, αν το μέγεθος της περιοδικότητας είναι κατ' ευθείαν ανάλογο της μέσης τιμής, τότε η περιοδικότητα λέμε ότι είναι πολλαπλασιαστική και ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός είναι κατάλληλος για να κάνει το μοντέλο προσθετικό. Όμως αυτός ο μετασχηματισμός θα σταθεροποιήσει

μόνο τη διασπορά αν το σφάλμα θεωρηθεί επίσης ότι είναι πολλαπλασιαστικό, ένα σημείο το οποίο μερικές φορές παραβλέπεται.

Τρία μοντέλα τα οποία περιγράφουν κλίση και περιοδικότητα είναι σε κοινή χρήση

$$\begin{aligned} (I) \quad X_t &= m_t + s_t + \varepsilon_t \\ (II) \quad X_t &= m_t s_t + \varepsilon_t \\ (III) \quad X_t &= m_t s_t \varepsilon_t, \end{aligned} \tag{4.1}$$

όπου X_t είναι η παρατήρηση τη χρονική στιγμή t , m_t είναι η μέση τιμή, s_t είναι η περιοδικότητα και ε_t είναι το τυχαίο σφάλμα. Το μοντέλο (I) είναι προσθετικό και δεν χρειάζεται κανένα μετασχηματισμό. Το μοντέλο (III) είναι πολλαπλασιαστικό και ένας λογαριθμικός μετασχηματισμός είναι σίγουρα κατάλληλος. Τέλος το μοντέλο (II) έχει πολλαπλασιαστική περιοδικότητα και προσθετικό σφάλμα και τα σχετικά μεγέθη αυτών των ποσοτήτων καθορίζουν αν ένας μετασχηματισμός είναι επιθυμητός.

β) Να επιτύχουμε μία κανονική κατανομή. Στην πράξη, αν πάρουμε τον λογάριθμο ή την τετραγωνική ρίζα ή την αντίστροφη τιμή των παρατηρήσεων είναι δυνατό να επιτύχουμε μία κανονική κατανομή.

4.5. Ανάλυση χρονοσειρών που περιέχουν μία κλίση

Η ανάλυση μιας χρονοσειράς που παρουσιάζει μεγάλης διάρκειας αλλαγή στη μέση τιμή εξαρτάται από τον αν κάποιος θέλει (i) να μετρήσει την κλίση και (ii) να μετακινήσει την κλίση για να αναλύσει τις τοπικές μεταβολές (*local fluctuations*). Όταν υπάρχουν ετήσιες περιοδικότητες είναι καλή ιδέα να αρχίσουμε με τον υπολογισμό διαδοχικών ετήσιων μέσων όρων καθώς αυτοί θα παρέχουν μία απλή περιγραφή της υπάρχουσας κλίσης. Μία προσέγγιση του τύπου αυτού είναι πολλές φορές τελείως επαρκής, ιδιαίτερα όταν η κλίση είναι αρκετά μικρή, αλλά μερικές φορές μία πιο πολύπλοκη μέθοδος είναι αναγκαία και τότε μπορούν να εφαρμοσθούν

οι ακόλουθες τεχνικές :

Προσαρμογή καμπύλης. Μία παραδοσιακή μέθοδος που ασχολείται με δεδομένα που περιέχουν μία κλίση και δεν παρουσιάζουν περιοδικότητα, ιδιαίτερα ετήσια δεδομένα, σχετίζεται με την προσαρμογή (*fitting*) στα δεδομένα μίας απλής συνάρτησης όπως μίας πολυωνυμικής καμπύλης (γραμμικής, διωνυμικής, κ.λ.π.), μίας καμπύλης *Gompertz* ή μίας λογιστικής καμπύλης. Η καμπύλη *Gompertz* δίνεται από τον τύπο

$$\log X_t = a - b r^t, \quad (4.2)$$

όπου a, b, r είναι παράμετροι με $0 < r < 1$, ενώ η λογιστική καμπύλη δίνεται από τη σχέση

$$X_t = \frac{a}{1 + b e^{-ct}} \quad (4.3)$$

Και οι δύο αυτές καμπύλες έχουν το σχήμα S και προσεγγίζουν μία ασυμπτωτική τιμή καθώς $t \rightarrow \infty$. Προσαρμόζοντας τις καμπύλες αυτές στα δεδομένα είναι δυνατό να οδηγηθούμε σε μη-γραμμικές ταυτόχρονες εξισώσεις.

Για όλες τις καμπύλες του τύπου αυτού, η συνάρτηση που προσαρμόζεται παρέχει ένα μέτρο της κλίσης, και τα υπόλοιπα παρέχουν ένα εκτιμητή των τοπικών μεταβολών. Στην περίπτωση αυτή τα υπόλοιπα δίνονται ως οι διαφορές μεταξύ των παρατηρήσεων και των αντίστοιχων τιμών της καμπύλης που προσαρμόστηκε.

Φιλτράρισμα (*Filtering*). Μία δεύτερη μέθοδος που ασχολείται με τη κλίση είναι η χρησιμοποίηση ενός γραμμικού φίλτρου (*linear filter*) το οποίο μετατρέπει μία χρονοσειρά $\{X_t\}$ σε μία άλλη $\{Y_t\}$ ως εξής

$$Y_t = \sum_{r=-q}^q \alpha_r X_{t+r}, \quad (4.4)$$

όπου $\{\alpha_r\}$ είναι ένα σύνολο "βαρών" (*weights*). Τα βάρη $\{\alpha_r\}$ εκλέγονται συνήθως

κατά τέτοιο τρόπο ώστε $Y_t = \sum_{r=-q}^q \alpha_r X_{t+r}$. Το απλούστερο παράδειγμα ενός

συμμετρικού φίλτρου εξομάλυνσης (*smoothing filter*) δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_r = \frac{1}{2q+1}, \quad r = -q, -q+1, \dots, q \quad (4.5)$$

και $Sm(X_t) = \frac{1}{2q+1} \sum_{r=-q}^q X_{t+r}$ είναι η τιμή της X_t που εξομαλύνθηκε. Στην πράξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φίλτρα τα οποία δεν είναι συμμετρικά. Ένα τέτοιο φίλτρο χρησιμοποιείται σε μία τεχνική που ονομάζεται εκθετική εξομάλυνση (*exponential smoothing*) ως εξής :

$$Sm(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{t-j}, \quad (4.6)$$

όπου $a_j = a(1-a)^j$ και a είναι μία σταθερά τέτοια ώστε $0 < a < 1$.

Ένα άλλο παράδειγμα συμμετρικού φίλτρου δίνεται στην περίπτωση που τα βάρη $\{a_r\}$ είναι διαδοχικοί όροι στο ανάπτυγμα $\left(\frac{1}{2} + \frac{I}{2}\right)^{2q}$. Έτσι, όταν $q=1$ τα βάρη

$$\text{είναι } a_{-1} = a_{+1} = \frac{1}{4} \text{ και } a_0 = \frac{1}{2}.$$

Ένα μειονέκτημα των συμμετρικών φίλτρων εξομάλυνσης είναι ότι χάνουμε $2q$ παρατηρήσεις. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό δεν είναι σημαντικό, αλλά σ' άλλες περιπτώσεις είναι αναγκαίο να πάρουμε τις εξομαλυμένες τιμές μέχρι $t=N$, όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων. Για την επίλυση του προβλήματος έχουν προταθεί διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης. Ο απλούστερος από τους τρόπους αυτούς είναι να επεκτείνουμε τις εξομαλυμένες τιμές με το μάτι μέχρι το σημείο $t=N$.

Έχοντας υπολογίσει την κλίση με τη βοήθεια ενός φίλτρου μπορούμε να προχωρήσουμε στη μελέτη των τοπικών μεταβολών με την ανάλυση των υπολοίπων. Τα υπόλοιπα ορίζονται ως εξής

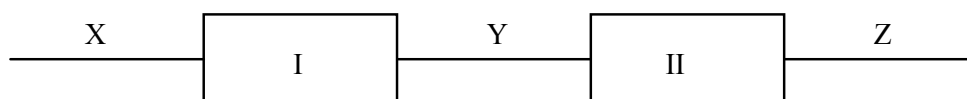
$$Res(X_t) = X_t - Sm(X_t) = \sum_{r=-q}^q b_r X_{t+r},$$

όπου $b_0=1-\alpha_0$ και $b_r=-\alpha_r$ επειδή $\sum_{r=-q}^q a_r = 1$.

Πώς μπορούμε να εκλέξουμε ένα κατάλληλο φίλτρο;

Η απάντηση στην ερώτηση αυτή δεν είναι εύκολη και χρειάζεται κανείς να έχει μεγάλη πείρα και γνώση μεθόδων επεξεργασίας και ανάλυσης χρονοσειρών στο πεδίο συχνοτήτων. Τα φίλτρα σχεδιάζονται με σκοπό τη δημιουργία μίας νέας χρονοσειράς η οποία θα περιέχει τις μεταβολές σε συγκεκριμένες συχνότητες. Για παράδειγμα, όταν θέλουμε να αφαιρέσουμε τις τοπικές μεταβολές, οι οποίες περιγράφονται στο πεδίο συχνοτήτων ως μεταβολή σε υψηλές συχνότητες, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ένα φίλτρο που επιτρέπει να διέλθουν μόνο οι χαμηλές συχνότητες (*low-pass filter*). Αντίθετα, όταν θέλουμε να απομονώσουμε τα υπόλοιπα, χρειάζεται να αφαιρέσουμε τις μεταβολές μεγάλης διάρκειας (ή μεταβολή σε χαμηλές συχνότητες). Με άλλα λόγια θέλουμε ένα φίλτρο που να επιτρέπει να διέλθουν μόνο οι υψηλές συχνότητες (*high-pass filter*). Χρειάζεται προσοχή όμως επειδή, στην περίπτωση μίας τελείως τυχαίας χρονοσειράς, θα μπορούσε κάποιος (χρησιμοποιώντας ορισμένες μεθόδους εξομάλυνσης) να επιφέρει μία ημιτονοειδή μεταβολή στα δεδομένα (*φαινόμενο Slutsky*).

Φίλτρα σε σειρές. Πολύ συχνά ένας τρόπος εξομάλυνσης εκτελείται σε δύο ή περισσότερες φάσεις, ο οποίος απαιτεί να έχουμε πολλά γραμμικά φίλτρα σε σειρά. Για παράδειγμα μία περίπτωση είναι να έχουμε δύο φίλτρα σε σειρά (βλέπε Σχ. 4.5)



Σχήμα 4.5. Δύο γραμμικά φίλτρα σε σειρά.

Φίλτρο *I* με βάρη $\{\alpha_{j1}\}$ ενεργεί στην χρονοσειρά $\{X_t\}$ για τη δημιουργία μίας νέας χρονοσειράς $\{Y_t\}$. Φίλτρο *II* με βάρη $\{\alpha_{j2}\}$ ενεργεί στην $\{Y_t\}$ για τη δημιουργία της $\{X_t\}$.

Από την (4.4) προκύπτει ότι

$$Z_t = \sum_j a_{j2} Y_{t+j} = \sum_j a_{j2} \left[\sum_r a_{r1} X_{t+j+r} \right] = \sum_j c_j X_{t+j},$$

όπου $c_j = \sum_r a_{j1} a_{(j-r)2}$ είναι τα βάρη για το συνολικό φίλτρο. Τα βάρη υπολογίζονται με τη μέθοδο της συνέλιξης (*convolution method*), η οποία στην περίπτωση των βαρών c_j μπορεί να γραφεί στη μορφή $\{c_j\} = \{a_{r1} * a_{r2}\}$, όπου "*" παριστάνει την πράξη της συνέλιξης. Για παράδειγμα το φίλτρο $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ μπορεί

να γραφεί στη μορφή
$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Μέθοδος των διαφορών (*differencing*). Ένας ειδικός τύπος φίλτρου, ο οποίος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στη μετακίνηση μίας κλίσης, επιτυγχάνεται όταν λάβουμε τις διαφορές σε μία δεδομένη χρονοσειρά μέχρι να γίνει στάσιμη. Για δεδομένα χωρίς περιοδικότητα, πρώτης τάξης διαφορά είναι συνήθως αρκετή για να πετύχουμε φανερή στασιμότητα. Η καινούργια σειρά $\{Y_1, \dots, Y_N\}$ σχηματίζεται από την αρχική σειρά $\{X_1, \dots, X_N\}$ ως εξής

$$Y_t = X_t - X_{t-1} = \Delta X_t, \quad t = 2, \dots, N \quad (4.8)$$

Η μέθοδος των διαφορών χρησιμοποιείται ευρέως σε προβλήματα που σχετίζονται με την οικονομία.

Μερικές φορές είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε δευτέρας τάξης διαφορά η οποία δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\Delta^2 X_t = \Delta(X_t - X_{t-1}) = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.$$

4.6. Ανάλυση χρονοσειρών που περιέχουν μία περιοδικότητα

Η ανάλυση των χρονοσειρών που περιέχουν μία περιοδικότητα εξαρτάται από το αν θέλει κάποιος

- (i) να περιγράψει την περιοδική μεταβολή, και
- (ii) να την εξαλείψει

Για χρονοσειρές που έχουν σχετικά μικρή κλίση, μία πολυπλοκότερη προσέγγιση είναι απαραίτητη. Στην περίπτωση που τα δεδομένα μας αποτελούνται από μηνιαίες μετρήσεις, ο πιο κοινός τρόπος εξαλείψης της περιοδικής μεταβολής γίνεται με τον υπολογισμό της ακόλουθης συνάρτησης

$$Sm(X_t) = \frac{\frac{1}{2}X_{t-6} + X_{t-5} + \dots + X_{t+5} + \frac{1}{2}X_{t+6}}{12} \quad (4.9)$$

Ας σημειωθεί ότι, στην (4.9), το άθροισμα των συντελεστών είναι 1. Ένας απλός μετακινούμενος μέσος όρος των τιμών δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί καθώς αυτό θα συνδέει 12 μήνες και δεν θα έχει στο κέντρο μία ακεραία τιμή του t . Ένας απλός μετακινούμενος μέσος όρος για 13 μήνες δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, καθώς αυτό θα έδινε διπλάσιο βάρος στο μήνα που εμφανίζεται και στα δύο άκρα. Για τριμηνιαία δεδομένα η περιοδική μεταβολή μπορεί να εξαλειφθεί με τον εξής τρόπο

$$Sm(X_t) = \frac{\frac{1}{2}X_{t-2} + X_{t-1} + \dots + X_{t+1} + \frac{1}{2}X_{t+2}}{4} \quad (4.10)$$

Η περιοδική μεταβολή μπορεί να αφαιρεθεί από τα δεδομένα αν υπολογίσουμε $X_t - Sm(X_t)$ ή $X_t / Sm(X_t)$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μία ή την άλλη μέθοδο ανάλογα αν η περιοδική μεταβολή είναι προσθετική ή πολλαπλασιαστική.

Μία περιοδική μεταβολή μπορεί να αφαιρεθεί με τη μέθοδο των διαφορών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που έχουμε μηνιαία δεδομένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τελεστή Δ_{12} , όπου

$$\Delta_{12} X_t = X_t - X_{t-12} \quad (4.11)$$

Με τις μεθόδους που περιγράψαμε ανωτέρω μπορούμε να αφαιρέσουμε την κλίση και τις περιοδικότητες που υπάρχουν σε μία δεδομένη χρονοσειρά. Με τον τρόπο αυτό μετασχηματίσαμε τη χρονοσειρά σε μία στάσιμη χρονοσειρά η οποία μπορεί να

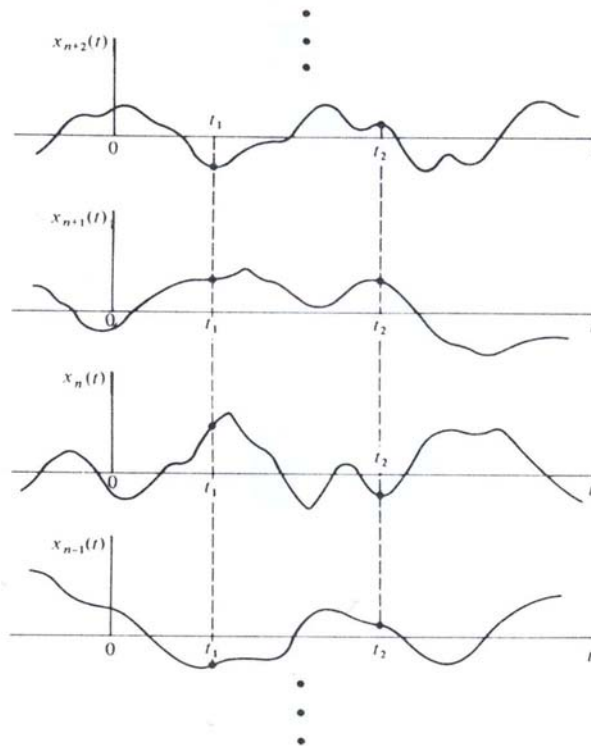
αναλυθεί με τεχνικές που περιγράφονται σε επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 5

ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ

5.1. Εισαγωγή

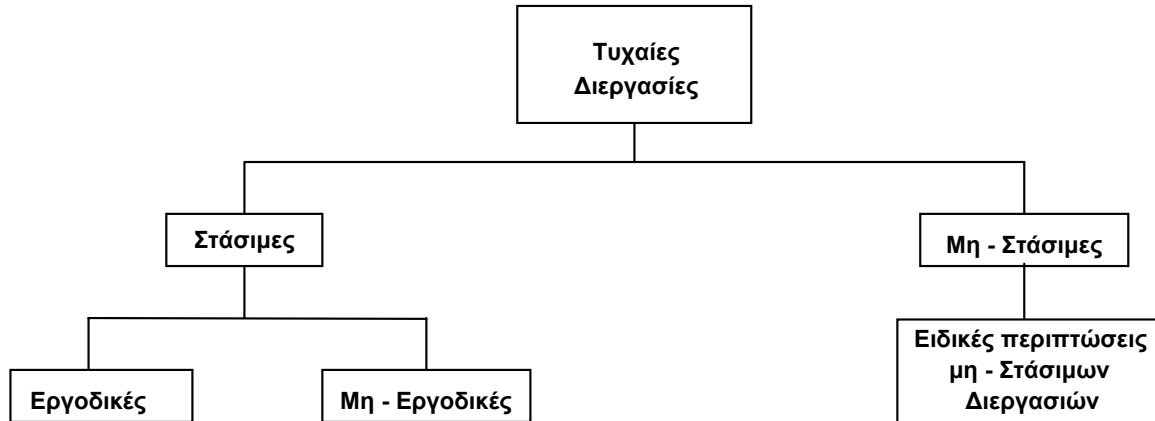
Θεωρούμε τη στοχαστική διεργασία $\{X(t), t \in T\}$. Ο σκοπός μας στο κεφάλαιο αυτό είναι να μελετήσουμε τις περιπτώσεις εκείνες των στοχαστικών διεργασιών, στις οποίες η $X(t)$ είναι συνεχής ή διακριτή και η παράμετρος t παίρνει διακριτές τιμές. Ένα παράδειγμα περιγράφεται στο Σχ. 5.1.



Σχήμα 5.1. Δειγματοσυναρτήσεις μιας στοχαστικής διεργασίας όπου η παράμετρος t παίρνει διακριτές τιμές.

Οι στοχαστικές διεργασίες μπορούν να χωρισθούν σε δύο κατηγορίες, τις

στάσιμες και τις μη - στάσιμες (βλέπε Σχ. 5.2). Οι στάσιμες διεργασίες μπορούν περαιτέρω να χωρισθούν σε εργοδικές και σε μη - εργοδικές. Οι μη - στάσιμες διεργασίες μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με το είδος της μη - στασιμότητας που παρατηρείται.



Σχήμα 5.2 Ταξινόμηση Στοχαστικών Διεργασιών.

Ένας τρόπος περιγραφής μιας χρονοσειράς βασίζεται στην από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ για τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_n και για κάθε τιμή του n . Αλλά αυτό είναι πολύπλοκο και αποφεύγεται στην πράξη. Μία απλούστερη, περισσότερο χρήσιμη μέθοδος περιγραφής μιας χρονοσειράς είναι να υπολογίσουμε τις ροπές (moments) της χρονοσειράς, ειδικότερα την πρώτη ροπή και τη δεύτερη ροπή, οι οποίες είναι γνωστές σαν μέση τιμή, διασπορά και συνδιασπορά της χρονοσειράς αντίστοιχα.

Συγκεκριμένα έχουμε:

(α) **Η μέση τιμή**, $\mu(t)$, ορίζεται ως εξής

$$\mu(t) = E\{X(t)\}$$

(β) **Η συνάρτηση διασποράς**, $\sigma^2(t)$, ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma^2(t) = Var\{X(t)\}$$

(γ) **Η συνάρτηση αυτοδιασποράς**, $\gamma(t_1, t_2)$, δίνεται από τον τύπο

$$\gamma(t_1, t_2) = cov\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{[X(t_1) - \mu(t_1)][X(t_2) - \mu(t_2)]\}$$

(δ) **Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης**, $\rho(t_1, t_2)$, δίνεται από τη σχέση

$$\rho(t_1, t_2) = \gamma(t_1, t_2) / \sqrt{Var\{x(t_1)\} Var\{x(t_2)\}}$$

Η συνάρτηση διασποράς είναι ειδική περίπτωση της συνάρτησης αυτοδιασποράς όταν θέσουμε $t_1=t_2$. Ροπές μεγαλύτερης τάξης μπορούν να ορισθούν μ' έναν ανάλογο τρόπο, αλλά χρησιμοποιούνται αραιά στην πράξη, επειδή ο υπολογισμός των συναρτήσεων $\mu(t)$ και $\gamma(t_1, t_2)$ είναι συχνά επαρκής.

5.2. Στάσιμες χρονοσειρές

Μία σπουδαία ομάδα χρονοσειρών είναι εκείνες που είναι στάσιμες (*stationary*). Μία χρονοσειρά λέγεται αυστηρώς στάσιμη αν η από κοινού κατανομή (*joint distribution*) των $X(t_1), \dots, X(t_n)$ είναι ίδια με την από κοινού κατανομή των $X(t_1+\tau), \dots, X(t_n+\tau)$ για όλα τα t_1, t_2, \dots, t_n . Με άλλα λόγια, μετατοπίζοντας την αρχή του χρόνου κατά μία ποσότητα δεν μεταβάλλουμε την από κοινού κατανομή, η οποία γι' αυτό το λόγο, πρέπει να εξαρτάται μόνο από τα διαστήματα μεταξύ των t_1, \dots, t_n . Ο παραπάνω ορισμός ισχύει για κάθε τιμή του n . Ειδικότερα, εάν $n=1$, συνεπάγεται ότι η κατανομή της $X(t)$ πρέπει να είναι ίδια για όλα τα t , έτσι ώστε

$$\mu(t) = \mu \text{ και } \sigma^2(t) = \sigma^2,$$

δηλ. η μέση τιμή και η διασπορά είναι σταθερές και δεν εξαρτώνται από την τιμή του t . Περαιτέρω, αν $n=2$, η από κοινού κατανομή των $X(t_1)$ και $X(t_2)$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά t_2-t_1 , η οποία καλείται καθυστέρηση (*lag*). Έτσι η συνάρτηση αυτοδιασποράς εξαρτάται μόνο από τη διαφορά t_2-t_1 και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\gamma(\tau) = E\{[X(t+\tau)-\mu][X(t)-\mu]\}$$

Η συνάρτηση $\gamma(\tau)$ ονομάζεται **συνάρτηση αυτοδιασποράς** με καθυστέρηση τ . Όταν η μέση τιμή της χρονοσειράς είναι μηδέν τότε η συνάρτηση αυτοδιασποράς είναι γνωστή ως συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (*autocorrelation function*).

Η κανονικοποιημένη συνάρτηση αυτοδιασποράς μας δίνει το **συντελεστή αυτοσυσχέτισης** (*autocorrelation coefficient*), ο οποίος ορίζεται ως εξής :

$$\rho(\tau) = \gamma(\tau) / \gamma(0)$$

Ο συντελεστής αυτός περιγράφει τη συσχέτιση μεταξύ των σημείων $X(t)$ και διάστημα $X(t+\tau)$ της χρονοσειράς, που απέχουν μεταξύ τους τ βήματα.

Δευτέρας-τάξης στασιμότητα. Στην πράξη είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη στασιμότητα μ' ένα λιγότερο περιοριστικό τρόπο απ' αυτόν που περιγράψαμε παραπάνω. Μια χρονοσειρά καλείται δευτέρας-τάξεως στάσιμη (ή ασθενώς στάσιμη), αν η μέση τιμή είναι σταθερά και αν η αυτοδιασπορά εξαρτάται μόνο από την καθυστέρηση έτσι ώστε

$$E\{X(t)\}=\mu \text{ και } Cov\{X(t+\tau), X(t)\}=\gamma(\tau)$$

Προϋποθέσεις για ροπές μεγαλύτερης τάξης απ' αυτές της δευτέρας τάξης δε γίνονται. Ακόμη πρέπει να σημειωθεί ότι η μέση τιμή και η διασπορά είναι πεπερασμένες.

Η κανονική κατανομή πολλών μεταβλητών είναι τελείως καθορισμένη από την πρώτη και δεύτερη ροπή, και επομένως από τις συναρτήσεις μ και $\gamma(\tau)$. Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η στασιμότητα δευτέρας τάξης συνεπάγεται αυστηρή στασιμότητα στην περίπτωση χρονοσειρών με κανονικές κατανομές. Όμως για χρονοσειρές που δεν ακολουθούν κανονικές κατανομές, οι συναρτήσεις μ και $\gamma(\tau)$ μπορεί να μη περιγράφουν επαρκώς τη χρονοσειρά.

5.3. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης

Στην παράγραφο αυτή εξετάζουμε τις ιδιότητες του συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Υποθέτουμε ότι η στάσιμη χρονοσειρά $X(t)$ έχει μέση τιμή μ , διασπορά σ^2 , και συνάρτηση αυτοδιασποράς $\gamma(\tau)$. Τότε

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}$$

Ας σημειωθεί ότι $\rho(0)=1$.

Πρώτη ιδιότητα: Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι μία άρτια συνάρτηση ως προς την καθυστέρηση, δηλ.

$$\rho(\tau) = \rho(-\tau)$$

Από τον ορισμό της $\gamma(\tau)$ έχουμε

$$\gamma(\tau) = \text{cov}\{X(t+\tau), X(t)\} = \text{cov}\{X(t'), X(t'-\tau)\} = \gamma(-\tau) \text{ (θέτουμε } t' = t+\tau)$$

και επομένως συνεπάγεται ότι $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$.

Δευτέρα ιδιότητα: Για κάθε τιμή του τ έχουμε ότι

$$|\rho(\tau)| \leq 1$$

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται αν λάβουμε υπόψη μας ότι

$$\text{Var} [\lambda_1 X(t) + \lambda_2 X(t+\tau)] \geq 0 \quad \text{για όλες τις σταθερές } \lambda_1, \lambda_2.$$

Από τον ορισμό της διασποράς προκύπτει ότι :

$$\lambda_1^2 \text{Var}\{X(t)\} + \lambda_2^2 \text{Var}\{X(t+\tau)\} + 2\lambda_1 \lambda_2 \text{cov}\{X(t), X(t+\tau)\} =$$

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \sigma^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \gamma(\tau) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 [\gamma(\tau) / \sigma^2] \geq 0 \Rightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \rho(\tau) \geq 0$$

Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα διώνυμο ως προς λ_1 , για να ισχύει η παραπάνω ανισότητα πρέπει η διακρίνουσα του διωνύμου να είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν, δηλ.

$$4\rho^2(\tau) - 4 \leq 0 \Rightarrow \rho^2(\tau) \leq 1 \Rightarrow |\rho(\tau)| \leq 1$$

Τρίτη ιδιότητα (Μη-μοναδικότητα): Για ένα συγκεκριμένο συντελεστή αυτοσυσχέτισης αντιστοιχεί μόνο μία δυνατή στάσιμη χρονοσειρά με κανονική κατανομή, επειδή η στάσιμη κανονική χρονοσειρά είναι τελείως καθορισμένη από τη μέση τιμή, τη διασπορά και το συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Όμως, είναι πάντοτε δυνατό να βρεθούν πολλές χρονοσειρές που δεν είναι κανονικές με τον ίδιο συντελεστή αυτοσυσχέτισης και αυτό δημιουργεί μια περαιτέρω δυσκολία στην

ερμηνεία του συντελεστή αυτοσυσχέτισης μιας χρονοσειράς. Οι *Jenkins and Watts* (1968, σελ. 170) δίνουν ένα παράδειγμα δύο διαφορετικών χρονοσειρών που έχουν τον ίδιο συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

5.4. Μερικές χρήσιμες χρονοσειρές

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε διάφορα μοντέλα που είναι κατάλληλα για την περιγραφή μιας χρονοσειράς. Αρχίζουμε με την περιγραφή μίας καθαρώς τυχαίας διεργασίας.

5.4.1. Η καθαρώς τυχαία διεργασία

Η διακριτή διεργασία $\{Z_t\}$ καλείται μία καθαρώς τυχαία διεργασία αν οι τυχαίες μεταβλητές Z_t αποτελούν μία ακολουθία αμοιβαία ανεξαρτήτων μεταβλητών με την ίδια κατανομή. Από τον ορισμό προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διασπορά είναι σταθερές και ότι

$$\gamma(k) = \text{cov}\{Z_t, Z_{t+k}\} = 0 \quad \text{για } k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Καθώς η μέση τιμή και η αυτοδιασπορά είναι ανεξάρτητες από το χρόνο, η διεργασία είναι δευτέρας τάξεως στάσιμη. Στην πραγματικότητα η διεργασία είναι επίσης και αυστηρώς στάσιμη. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον τύπο

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Μία καθαρώς τυχαία διεργασία καλείται μερικές φορές λευκός θόρυβος (*white noise*) ιδιαίτερα από τους μηχανικούς. Διεργασίες του τύπου αυτού είναι χρήσιμες σε πολλές περιπτώσεις, όπως, για παράδειγμα, στα μοντέλα μετακινούμενου μέσου όρου (*moving average*) που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Υπάρχει μια αμφιβολία όσον αφορά στη δυνατότητα ύπαρξης μιας καθαρώς

τυχαίας διεργασίας σε συνεχή χρόνο. Μια τέτοια διεργασία θα είχε ένα συντελεστή αυτοσυσχέτισης που δίνεται από τον τύπο

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

και η οποία προφανώς δεν είναι συνεχής συνάρτηση. Μπορεί να αποδειχτεί ότι μια τέτοια διεργασία θα έχει άπειρη διασπορά, και επομένως δεν είναι πραγματικό φαινόμενο. Όμως, αποδεικνύεται ότι αποτελεί ένα χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο για θεωρητικούς σκοπούς, και επίσης είναι μια προσέγγιση ορισμένων διεργασιών που συμβαίνουν στην πράξη, όπως οι μεταβολές δυναμικού σ' ένα αγωγό που οφείλεται σε θερμικό θόρυβο, και οι ωθήσεις που εξασκούνται σ' ένα σωματίδιο μετεωρούμενο σε υγρό κατά μήκος ενός δεδομένου άξονα για την παραγωγή της κίνησης *Brown*.

Ένας λευκός θόρυβος μπορεί να προσεγγιστεί από μία διεργασία σε συνεχή χρόνο με συντελεστή αυτοσυσχέτισης $\rho(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$. Η συνάρτηση αυτή γίνεται μικρή πολύ γρήγορα καθώς $\lambda \rightarrow \infty$ (Βλέπε *Cox and Miller, 1968*).

5.4.2. Τυχαίος δρόμος (random walk)

Υποθέτουμε ότι $\{Z_t\}$ είναι μία διακριτή, καθαρώς τυχαία διεργασία με μέση τιμή μ και διασπορά σ_z^2 . Μία χρονοσειρά $\{X_t\}$ λέγεται ότι είναι τυχαίος δρόμος αν

$$X_t = X_{t-1} + Z_t$$

Επειδή η χρονοσειρά X_t συνήθως αρχίζει στο μηδέν θα έχουμε ότι

$$X_1 = Z_1 \quad \text{και} \quad X_t = \sum_{i=1}^t Z_i$$

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε ότι

$$E\{X_t\} = t\mu \quad \text{και} \quad Var\{X_t\} = t\sigma_z^2$$

Καθώς η μέση τιμή και η διασπορά μεταβάλλονται με το χρόνο t , η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη. Όμως είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι πρώτες διαφορές ενός τυχαίου δρόμου, που δίνονται από τη σχέση

$$Z_t = X_t - X_{t-1}$$

σχηματίζουν μία καθαρώς τυχαία διεργασία, η οποία ως γνωστό είναι στάσιμη.

Πολύ γνωστά παραδείγματα χρονοσειρών που συμπεριφέρονται σαν τυχαίοι δρόμοι είναι οι τιμές των μετοχών. Όταν αυτές αναλύονται, ένα μοντέλο που δίνει καλή προσέγγιση στα δεδομένα είναι

$$\text{Τιμή μετοχής την ημέρα } t = \text{τιμή μετοχής την ημέρα } (t-1) + \text{τυχαίο σφάλμα.}$$

Ο τυχαίος δρόμος εφαρμόζεται με μεγάλη επιτυχία σε προβλήματα βιοπληροφορικής.

5.4.3. Μοντέλα μετακινούμενου μέσου όρου

Υποθέτουμε ότι $\{Z_t\}$ είναι μία καθαρώς τυχαία διεργασία με μέση τιμή θ και διασπορά σ_z^2 . Η χρονοσειρά $\{X_t\}$ θα λέμε ότι περιγράφεται από ένα μοντέλο μετακινούμενου μέσου όρου τάξεως q , $MA(q)$ αν

$$X_t = \beta_0 Z_t + \beta_1 Z_{t-1} + \dots + \beta_q Z_{t-q} , \quad (5.1)$$

όπου $\{\beta_j\}$ είναι σταθερές. Οι μεταβλητές Z_t συνήθως λαμβάνονται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε $\beta_0 = 1$. Προκύπτει αμέσως από την (5.1) ότι

$$E\{X_t\} = \theta \quad \text{και} \quad Var\{X_t\} = \sigma_z^2 \sum_{j=0}^q \beta_j^2 ,$$

επειδή οι μεταβλητές Z_t είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης έχουμε:

$$\gamma(k) = \text{cov}\{X_t, X_{t+k}\} = \text{cov}(\beta_0 Z_t + \dots + \beta_q Z_{t-q}, \beta_0 Z_{t+k} + \dots + \beta_q Z_{t+k-q})$$

$$\Rightarrow \gamma(k) = \begin{cases} 0 & k > q \\ \sigma_z^2 \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} & k=0,1,\dots,q \\ \gamma(-k) & k < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Καθώς η $\gamma(k)$ δεν εξαρτάται από το χρόνο t , και η μέση τιμή είναι σταθερά, η χρονοσειρά είναι δευτέρας – τάξης στάσιμη για όλες τις τιμές των $\{\beta_i\}$. Επιπλέον αν οι μεταβλητές Z_t ακολουθούν μία κανονική κατανομή, την ίδια κατανομή ακολουθούν και οι μεταβλητές X_t , και επομένως έχουμε μία κανονική κατανομή τελείως καθορισμένη από τη μέση τιμή και τη συνάρτηση διασποράς. Η χρονοσειρά είναι τότε αυστηρώς στάσιμη.

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης για ένα μοντέλο $MA(q)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k}}{\sum_{j=0}^q \beta_j^2} & k=1,\dots,q \\ 0 & k > q \\ \rho(-k) & k < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης κόβεται απότομα (μηδενίζεται) στην καθυστέρηση q , το οποίο είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των MA μοντέλων. Ειδικότερα για το $MA(1)$ μοντέλο με $\beta_0 = 1$ ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον τύπο:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \beta_1 / (1 + \beta_1^2) & k = \pm 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παρ' ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί στις παραμέτρους $\{\beta_i\}$ για να είναι το MA

μοντέλο στάσιμο, οι *Box and Jenkins (1970, σελ. 50)* προτείνουν περιορισμούς στις παραμέτρους $\{\beta_i\}$ για να εξασφαλίσουν αυτό που αποκαλούν αντιστρεψιμότητα. Θεωρούμε τα εξής *MA* μοντέλα πρώτης-τάξεως:

$$\text{I. } X_t = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad \text{και} \quad \text{II. } X_t = Z_t + (1/\theta)Z_{t-1}$$

Μπορεί να δειχτεί εύκολα ότι αυτά τα δύο διαφορετικά μοντέλα έχουν ακριβώς τον ίδιο συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Έτσι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα *MA* μοντέλο μοναδικά από ένα δεδομένο συντελεστή αυτοσυσχέτισης. Αν όμως εκφράσουμε τα μοντέλα I και II θέτοντας τις μεταβλητές Z_t σαν συναρτήσεις των X_t, X_{t-1}, \dots , τότε βρίσκουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις ότι:

$$\text{I. } Z_t = X_t - \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} - \dots$$

$$\text{II. } Z_t = X_t - (1/\theta)X_{t-1} + (1/\theta^2)X_{t-2} - \dots$$

Αν $|\theta| < 1$, η σειρά I συγκλίνει ενώ η σειρά II δεν συγκλίνει. Έτσι το σωστό μοντέλο είναι το μοντέλο I. Επίσης αν $|\theta| < 1$, το μοντέλο I λέμε ότι είναι αντιστρέψιμο, ενώ το μοντέλο II δεν είναι. Η επιβολή της συνθήκης αντιστρεψιμότητας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα μοναδικό μοντέλο για ένα δεδομένο συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

Η εξίσωση (5.1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X_t = (\beta_0 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q)Z_t = \Gamma(B)Z_t$$

όπου $\Gamma(B)$ είναι ένα πολυώνυμο τάξεως q ως προς B , και B είναι ο τελεστής που μεταθέτει προς τα πίσω, δηλ. $B^j X_t = X_{t-j}$ για όλα τα j . Ένα μοντέλο τάξης q είναι αντιστρεπτό αν οι ρίζες της εξίσωσης (θεωρούμε το B σαν μία μιγαδική μεταβλητή και όχι σαν ένα τελεστή)

$$\Gamma(B) = \beta_0 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q = 0$$

όλες βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

Σημειώνουμε επίσης ότι μία αυθαίρετη σταθερά μ μπορεί να προστεθεί στη δεξιά μεριά της εξίσωσης (5.1) στην περίπτωση που η χρονοσειρά μας έχει μέση τιμή μ . Αυτό δεν επηρεάζει το συντελεστή αυτοσυσχέτισης και έχει παραλειφθεί για απλούστευση.

5.4.4. Αυτοπαλινδρομικά μοντέλα (Autoregressive models)

Υποθέτουμε ότι $\{Z_t\}$ είναι μία καθαρώς τυχαία διεργασία με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_z^2 . Τότε μία χρονοσειρά $\{X_t\}$ περιγράφεται από ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο τάξεως p αν

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t \quad (5.4)$$

Αυτό το μοντέλο ομοιάζει μ' ένα πολλαπλό παλινδρομικό μοντέλο, αλλά η μεταβλητή X_t δεν εξαρτάται από άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές αλλά από προηγούμενες τιμές του X_t . Ένα αυτοπαλινδρομικό μοντέλο τάξεως p μπορεί να γραφεί με σύντομο τρόπο σαν ένα $AR(p)$ μοντέλο.

5.4.4.1. Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο πρώτης-τάξης

Για απλούστευση, αρχίζουμε με την εξέταση του $AR(1)$ μοντέλου. Η εξίσωση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t \quad (5.5)$$

Μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις στην (5.5) έχουμε

$$\begin{aligned} X_t &= \alpha[\alpha X_{t-2} + Z_{t-1}] + Z_t = \alpha^2[\alpha X_{t-3} + Z_{t-2}] + \alpha Z_{t-1} + Z_t = \dots \\ &= Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots \quad (\text{αρκεί } -1 < \alpha < 1) \end{aligned}$$

δηλ. η χρονοσειρά X_t μπορεί να εκφραστεί σαν ένα MA μοντέλο άπειρης τάξης.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε διαδοχικές αντικαταστάσεις στο παραπάνω υπολογισμό, είναι απλούστερο να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο με τον τελεστή B που μεταθέτει προς τα πίσω. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (5.5) παίρνει την εξής μορφή:

$$(1 - \alpha B)X_t = Z_t, \quad \text{έτσι ώστε}$$

$$X_t = (1 - \alpha B)^{-1} Z_t = (1 + \alpha B + \alpha^2 B^2 + \dots)Z_t = Z_t + \alpha Z_{t-1} + \alpha^2 Z_{t-2} + \dots$$

Από τη σχέση αυτή είναι εύκολο να βρούμε ότι

$$E\{X_t\} = 0 \quad \text{και} \quad \text{Var}\{X_t\} = \sigma_z^2 (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)$$

Η διασπορά θα είναι πεπερασμένη αρκεί $|a| < 1$ οπότε

$$\text{Var}\{X_t\} = \sigma_z^2 / (1 - \alpha^2) = \sigma_x^2$$

Η συνάρτηση αυτοδιασποράς υπολογίζεται από την εξής σχέση

$$\gamma(k) = E\{X_t X_{t+k}\} = E\left\{ \left[\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i Z_{t-i} \right] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j Z_{t+k-j} \right] \right\} = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \alpha^{k+i} \quad \forall k \geq 0$$

Η συνάρτηση αυτή συγκλίνει για $|a| < 1$ οπότε έχουμε

$$\gamma(k) = \alpha^k [\sigma_z^2 / (1 - \alpha^2)] = \alpha^k \sigma_x^2$$

Για αρνητικές τιμές του k θα ισχύει ότι $\gamma(k) = \gamma(-k)$.

Η συνάρτηση $\gamma(k)$ δεν εξαρτάται από το χρόνο t . Μία χρονοσειρά X_t που περιγράφεται από ένα $AR(1)$ μοντέλο θα είναι δευτέρας - τάξης στάσιμη, αρκεί $|a| < 1$. Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης δίνεται από την εξής σχέση:

$$\rho(k) = a^{|k|} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

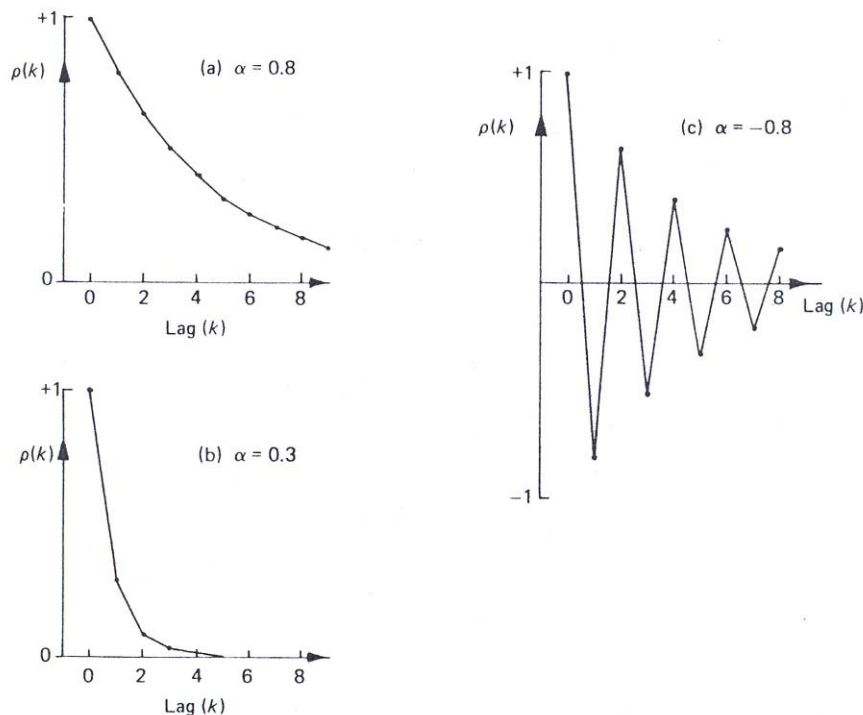
Η απόλυτη τιμή στον εκθέτη δικαιολογείται από το γεγονός ότι η $\rho(k)$ είναι άρτια συνάρτηση.

Ο υπολογισμός του συντελεστή αυτοσυσχέτισης είναι δυνατό να γίνει μ' ένα διαφορετικό τρόπο αν θεωρήσουμε εκ των προτέρων ότι η χρονοσειρά είναι στάσιμη με μέση τιμή 0. Πολλαπλασιάζοντας την (5.5) με X_{t-k} και παίρνοντας μέσες τιμές βρίσκουμε για κάθε $k > 0$, ότι

$$\gamma(k) = a\gamma(k-1)$$

Θεωρήσαμε ότι $E\{Z_t X_{t-k}\} = 0$ για κάθε $k > 0$.

Για $k=0$ έχουμε $\gamma(0) = \sigma_x^2$ και επομένως $\gamma(k) = a^k \sigma_x^2$ ($k \geq 0$). Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης θα δίνεται από τη σχέση $\rho(k) = a^k$ για κάθε $k \geq 0$. Επιπλέον επειδή $|\rho(k)| \leq 1$, έχουμε ότι $|a| \leq 1$. Αλλά αν $|a|=1$, τότε $|\rho(k)|=1$ για όλα τα k , η οποία είναι μία εκφυλισμένη περίπτωση. Επομένως για μία κατάλληλη στάσιμη χρονοσειρά πρέπει να ισχύει ότι $|a| < 1$.



Σχήμα 5.3. Τρία παραδείγματα συντελεστών αυτοσυσχέτισης ενός αυτοπαλινδρομικού $AR(1)$ μοντέλου με (a) $a=0.8$ (b) $a=0.3$ και (c) $a=-0.8$.

Η παραπάνω μέθοδος επίτευξης του συντελεστή αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται συχνά, παρ'ότι χρειάζεται την προϋπόθεση της συνθήκης στασιμότητας.

Τρία παραδείγματα για το συντελεστή αυτοσυσχέτισης μιας σειράς που περιγράφεται από ένα $AR(1)$ μοντέλο δίνονται στο Σχ.5.3 για $a = 0.8, 0.3, -0.8$. Είναι φανερό ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης μικραίνει γρήγορα για $a = 0.3$ και εναλλάσσεται όταν το a είναι αρνητικό.

5.4.4.2. Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο δευτέρας-τάξης

Το μοντέλο αυτό δίνεται από την εξίσωση

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + Z_t \quad (5.6)$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή που μεταθέτει προς τα πίσω βρίσκουμε

$$(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2) X_t = Z_t \quad \eta \quad X_t = \frac{Z_t}{(1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2)} = f(B) Z_t$$

όπου $f(B) = (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2)^{-1} = 1 + c_1 B + c_2 B^2 + \dots$

Η σχέση μεταξύ των συντελεστών α και c είναι εύκολο να υπολογιστεί.

Έχοντας εκφράσει την X_t σαν ένα MA μοντέλο βρίσκουμε ότι

$E\{X_t\} = 0$. Η διασπορά είναι πεπερασμένη αρκεί το άθροισμα $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2$ να

συγκλίνει και αυτό είναι μία αναγκαία συνθήκη η χρονοσειρά να είναι στάσιμη. Η συνάρτηση αυτοδιασποράς δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma(k) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{\infty} c_i c_{i+k} \quad (\text{οπου } c_0 = 1)$$

Μία ικανή συνθήκη για αυτή τη συνάρτηση να συγκλίνει, και επομένως η

χρονοσειρά να είναι στάσιμη, είναι η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|$ να συγκλίνει.

Ένας εναλλακτικός τρόπος είναι να θεωρήσουμε ότι η χρονοσειρά είναι στάσιμη και να πολλαπλασιάσουμε την (5.6) με X_{t-k} , να πάρουμε μέσες τιμές και να διαιρέσουμε με σ_x^2 υποθέτοντας ότι η διασπορά της X_t είναι πεπερασμένη. Στην περίπτωση αυτή, επειδή $\rho(k) = \rho(-k)$ για όλα τα k , βρίσκουμε ότι :

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2) \quad \text{για κάθε } k > 0 \quad (5.7)$$

Η εξίσωση αυτή καλείται εξίσωση *Yule - Walker*. Η γενική λύση της εξίσωσης που είναι μία εξίσωση διαφορών δίνεται από τη σχέση

$$\rho(k) = A_1 \pi_1^{|k|} + A_2 \pi_2^{|k|}, \quad (5.8)$$

όπου $\{\pi_i\}$, $i=1, 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$y^2 - a_1 y - a_2 = 0$$

Οι σταθερές $\{A_i\}$ λαμβάνονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούν την αρχική συνθήκη $\rho(0) = 1$. Από την (5.8) είναι φανερό ότι η $\rho(k)$ τείνει στο μηδέν καθώς το k αυξάνει, αρκεί τα $|\pi_i| < 1$ ($i=1, 2$), και αυτό είναι μία αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η χρονοσειρά στάσιμη.

Από την εξίσωση $y^2 - a_1 y - a_2 = 0$, αν $|\pi_i| < 1$, έχουμε:

$$\left| \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2}}{2} \right| < 1$$

Μπορεί να δειχτεί ότι η περιοχή στην οποία η χρονοσειρά είναι στάσιμη είναι μία τριγωνική περιοχή που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &< 1 \\ a_2 - a_1 &< 1 \\ a_2 &> -1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Οι ρίζες π_1, π_2 είναι πραγματικές αν $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 \geq 0$, οπότε ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ελαττώνεται εκθετικά με το k , ενώ οι ρίζες είναι μιγαδικές αν $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 < 0$ οπότε βρίσκουμε ότι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης είναι ένα αποσβεννόμενο συνημιτονοειδές κύμα. Όταν οι ρίζες είναι πραγματικές οι σταθερές A_1, A_2 βρίσκονται ως εξής:

Επειδή $\rho(0)=1$ έχουμε $A_1 + A_2 = 1$.

Επιπλέον από την εξίσωση *Yule-Walker* έχουμε

$$\rho(1) = \alpha_1 \rho(0) + \alpha_2 \rho(-1) = \alpha_1 + \alpha_2 \rho(1) \Rightarrow \rho(1) = \alpha_1 / (1 - \alpha_2),$$

δηλαδή $\rho(1) = A_1 \pi_1 + (1 - A_1) \pi_2 = \alpha_1 / (1 - \alpha_2)$

Επομένως

$$A_1 = \frac{\left[\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} - \pi_2 \right]}{\pi_1 - \pi_2} \quad \text{και} \quad A_2 = 1 - A_1$$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν και στην περίπτωση που οι ρίζες είναι μιγαδικές.

5.4.4.3. Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο τάξης p

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση του μοντέλου δίνεται από τη σχέση:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t$$

Χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα που παραθέσαμε για το μοντέλο $AR(2)$ βρίσκουμε ότι

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \dots + \alpha_p \rho(k-p) \quad \text{για κάθε } k \geq 0$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής έχει τη μορφή

$$\rho(k) = A_1 \pi_1^{|k|} + \dots + A_p \pi_p^{|k|}$$

όπου $\{\pi_i\}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$y^p - a_1 y^{p-1} - \dots - a_p = 0$$

Οι σταθερές $\{A_i\}$ εκλέγονται για να ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες που εξαρτώνται από τη σχέση $\rho(0) = 1$. Έτσι έχουμε $\sum_{i=1}^p A_i = 1$ και οι πρώτες (p-1) *Yule - Walker* εξισώσεις παρέχουν (p-1) περαιτέρω περιορισμούς για τις σταθερές $\{A_i\}$, όταν ληφθούν υπόψη και οι σχέσεις $\rho(0) = 1$ και $\rho(k) = \rho(-k)$. Για να είναι η χρονοσειρά μας στάσιμη, πρέπει οι ρίζες της εξίσωσης

$$H(B) = 1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_p B^p = 0$$

να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Αυτή είναι μία αναγκαία και ικανή συνθήκη.

Για απλούστευση έχουμε θεωρήσει μόνο χρονοσειρές με μέση τιμή θ , αλλά χρονοσειρές με μη - μηδενικές μέσες τιμές μπορούν να εξετασθούν αν γράψουμε την (5.4) στη μορφή

$$X_t - \mu = \alpha_1 (X_{t-1} - \mu) + \dots + \alpha_p (X_{t-p} - \mu) + Z_t$$

Αυτό δεν επηρεάζει το συντελεστή αυτοσυσχέτισης

5.4.5. Μικτά μοντέλα (mixed models)

Μία χρήσιμη ομάδα μοντέλων για χρονοσειρές είναι επίσης εκείνη που σχηματίζεται με το συνδυασμό των *MA* και *AR* μοντέλων. Ένα μικτό αυτοπαλινδρομικό μοντέλο μετακινούμενης μέσου όρου που περιέχει p *AR* όρους και q *MA* όρους (συντομογραφία *ARMA* (p, q) μοντέλο) λέγεται ότι είναι τάξης (p ,

g). Το μοντέλο αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_q X_{t-p} \quad (5.10)$$

Χρησιμοποιώντας το τελεστή που μεταθέτει προς τα πίσω μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (5.10) στη μορφή

$$H(B)X_t = \Gamma(B)Z_t,$$

όπου $H(B)$, $\Gamma(B)$ είναι πολυώνυμα p , q τάξεως αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$H(B) = 1 - a_1 B - \dots - a_p B^p \quad \text{και} \quad \Gamma(B) = 1 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q$$

Οι τιμές των α_i που κάνουν τη διεργασία στάσιμη είναι τέτοιες ώστε οι ρίζες του $H(B)=0$ να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Οι τιμές των β_i που κάνουν τη διεργασία αντιστρεπτή είναι τέτοιες ώστε οι ρίζες της εξίσωσης $\Gamma(B)=0$ να βρίσκονται έξω από το μοναδιαίο κύκλο.

Είναι αλγεβρικά πολύ κοπιαστικό να υπολογίσουμε το συντελεστή αυτοσυσχέτισης ενός $ARMA$ μοντέλου και γι' αυτό δεν θα συζητηθεί εδώ.

Η σπουδαιότητα των $ARMA$ μοντέλων βρίσκεται στο γεγονός ότι οι στάσιμες χρονοσειρές μπορούν συχνά να περιγραφούν μ' ένα $ARMA$ μοντέλο που περιέχει λιγότερες παραμέτρους από ένα MA ή AR μοντέλο αυτό καθ' εαυτό.

5.5. Παραδείγματα

1. Να δειχθεί ότι η χρονοσειρά $X_t = a \cos(\omega t + \theta)$ είναι δευτέρας - τάξης στάσιμη όταν θεωρήσουμε ότι a είναι μία σταθερά, ω είναι επίσης μία σταθερά στο διάστημα $(0, \pi)$ και θ είναι μία τυχαία μεταβλητή με μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 2\pi)$. (Η μεταβλητή θ θεωρείται σταθερή για μία απλή πραγμάτωση)

Λύση:

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μεταβλητής θ δίνεται από τον τύπο:

$$p(\theta) = 1 / 2\pi, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Η μέση τιμή της μεταβλητής X_t μπορεί να υπολογισθεί τώρα ως εξής:

$$E\{X_t\} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) d\theta = \frac{a}{2\pi} \int_{\omega t}^{2\pi + \omega t} \cos \phi d\phi = \frac{a}{2\pi} [\sin(2\pi + \omega t) - \sin(\omega t)] = 0$$

(θέσαμε $\phi = \omega t + \theta$)

Επίσης βρίσκουμε ότι

$$E\{X_t X_s\} = \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega s + \theta) d\theta =$$

$$\frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta) (\cos \omega s \cos \theta - \sin \omega s \sin \theta) d\theta =$$

$$= \frac{a^2}{2} (\cos \omega t \cos \omega s + \sin \omega t \sin \omega s) = \frac{a^2}{2} \cos \omega(t-s)$$

Από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται ότι η χρονοσειρά είναι δευτέρας - τάξης στάσιμη. Επειδή η θ θεωρείται σταθερά για μία απλή πραγμάτωση, αν υπολογισθεί μία φορά από αρκετές τιμές της X_t , τότε όλες οι επόμενες τιμές της X_t είναι τελείως καθορισμένες. Είναι λοιπόν φανερό ότι το παραπάνω μοντέλο ορίζει μία καθαρώς καθορισμένη διεργασία. Αναφέρουμε, στο σημείο αυτό, ότι όλες οι στάσιμες διεργασίες που ορίζονται από τα *ARMA* μοντέλα είναι καθαρώς μη - καθορισμένες (*non - deterministic* ή *probabilistic*) διεργασίες.

Η χρονοσειρά X_t , όπως ορίζεται παραπάνω, γίνεται πιο ενδιαφέρουσα και δεν είναι πλέον καθαρώς καθορισμένη αν προσθέσουμε ένα τυχαίο σφάλμα (μία καθαρώς τυχαία διεργασία) ως εξής:

$$X_t = a \cos(\omega t + \theta) + Z_t \tag{5.11}$$

Το μοντέλο αυτό περιγράφει μία συνημιτονοειδή ταλάντωση με περιοδικότητα ω .

2. Η Εξίσωση του $AR(2)$ μοντέλου δίνεται από την τύπο:

$$X_t = \frac{1}{5}X_{t-1} + \frac{6}{25}X_{t-2} + Z_t$$

Να υπολογισθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho(k)$ για $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Λύση:

Επειδή η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον τύπο

$$\rho(k) = A_1 \pi_1^{|k|} + A_2 \pi_2^{|k|},$$

θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες π_1 , π_2 και A_1 , A_2 .

Ως γνωστό π_1 , π_2 είναι οι ρίζες του διωνύμου $y^2 - (1/5)y - 6/25 = 0$. Άρα βρίσκουμε $\pi_1 = 3/5$ και $\pi_2 = -2/5$. Επίσης από τη θεωρία είναι γνωστό ότι:

$$A_1 = \frac{a_1 - \pi_2}{\pi_1 - \pi_2} \quad \text{και} \quad A_2 = 1 - A_1$$

οπότε λαμβάνουμε $A_1 = 63/95$ και $A_2 = 32/95$.

Επομένως η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από τον σχέση:

$$\rho(k) = \frac{63}{95} \left(\frac{3}{5}\right)^{|k|} + \frac{32}{95} \left(-\frac{2}{5}\right)^{|k|} \quad \text{για } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός $ARMA(1,1)$ μοντέλου δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\rho(1) = \frac{(1 + \varphi\theta)(\varphi + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\varphi\theta}$$

$$\rho(k) = \varphi \rho(k-1) \quad (k=2, 3, \dots)$$

Λύση:

Το μοντέλο $ARMA(1,1)$ δίνεται από τον τύπο

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad (5.12)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (5.12) με X_t και πάρουμε τις μέσες τιμές, βρίσκουμε ότι:

$$\gamma(0) - \varphi\gamma(1) = \sigma_z^2 + (\theta + \varphi)\theta\sigma_z^2$$

επειδή $E\{X_t Z_t\} = \sigma_z^2$ και $E\{X_t Z_{t-1}\} = (\theta + \varphi)\sigma_z^2$

Ομοίως βρίσκουμε, αν πολλαπλασιάσουμε την (5.12) με X_{t-1} και πάρουμε εκ νέου τις μέσες τιμές:

$$\gamma(-1) - \varphi\gamma(0) = \theta\sigma_z^2$$

Λύνοντας αυτές τις εξισώσεις ως προς $\gamma(0)$ και $\gamma(1)=[\gamma(-1)]$ λαμβάνουμε

$$\gamma(0) = \sigma_z^2(1 + 2\varphi\theta + \theta^2) / (1 - \varphi^2)$$

$$\gamma(1) = \sigma_z^2(1 + \varphi\theta)(1 + \theta\varphi) / (1 - \varphi^2)$$

Αρα
$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(1 + \theta\varphi)(\theta + \varphi)}{1 + 2\varphi\theta + \theta^2}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την (5.12) με X_{t-k} ($k > 1$) και πάρουμε μέσες τιμές, βρίσκουμε ότι

$$\gamma(k) = \varphi\gamma(k-1)$$

επειδή $E\{Z_t X_{t-k}\} = E\{Z_{t-1} X_{t-k}\} = 0$ για $k > 1$.

Επομένως $\rho(k) = \varphi\rho(k-1)$ για $k = 2, 3, \dots$

5.6. Εκτίμηση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης

Οι ιδιότητες μιας χρονοσειράς μπορούν να εξετασθούν με τη βοήθεια των συντελεστών αυτοσυσχέτισης, οι οποίοι δίνουν τη συσχέτιση μεταξύ των παρατηρήσεων της χρονοσειράς σε διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ τους. Οι συντελεστές αυτοί μας πληροφορούν για το πιθανοκρατικό μοντέλο που είναι κατάλληλο για τα δεδομένα.

Έστω ότι X και Y είναι δυο τυχαίες μεταβλητές. Έστω, ακόμη ότι (X_1, \dots, X_N) και (Y_1, \dots, Y_N) δύο τυχαία δείγματα από τις τυχαίες μεταβλητές X και Y . Τότε ο εκτιμητής του συντελεστού αυτοσυσχέτισης μεταξύ των δύο t . μεταβλητών δίνεται από τη σχέση

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (5.13)$$

Ο ορισμός αυτός μπορεί να επεκταθεί στις χρονοσειρές για να φανεί αν διαδοχικές παρατηρήσεις συσχετίζονται μεταξύ τους.

Στην περίπτωση μιας διακριτής χρονοσειράς με N παρατηρήσεις X_1, \dots, X_N μπορούμε να σχηματίσουμε τα εξής ζεύγη:

$$(X_1, X_2), (X_2, X_3), \dots, (X_{N-1}, X_N)$$

Αν θεωρήσουμε την πρώτη παρατήρηση σε κάθε ζευγάρι σαν μια τυχαία μεταβλητή, και τη δεύτερη παρατήρηση σαν μια δεύτερη τυχαία μεταβλητή, τότε ο εκτιμητής του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ X_t και X_{t+1} δίνεται

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X}_{(1)})(X_{t+1} - \bar{X}_{(2)})}{\sqrt{\left[\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}_{(1)})^2 \sum_{t=1}^{N-1} (X_{t+1} - \bar{X}_{(2)})^2 \right]}} \quad (5.14)$$

Η σχέση (5.14) προκύπτει προφανώς από τη σχέση (5.12). Με $\bar{X}_{(1)}$

συμβολίζουμε τη μέση τιμή των πρώτων $(N-1)$ παρατηρήσεων και με $\bar{X}_{(2)}$ τη μέση τιμή των τελευταίων $(N-1)$ παρατηρήσεων, δηλ.

$$\bar{X}_{(1)} = \sum_{t=1}^{N-1} X_t / (N-1) \quad \text{και} \quad \bar{X}_{(2)} = \sum_{t=2}^{N-1} X_t / (N-1)$$

Επειδή ο εκτιμητής που δίνεται από τη (5.14) μετράει συσχέτιση μεταξύ δύο διαδοχικών παρατηρήσεων, για το λόγο αυτό ονομάζεται εκτιμητής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης.

Για μεγάλο N η (5.14) μπορεί να γραφεί σε μια απλούστερη μορφή ως εξής

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{N-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad (5.15)$$

όπου $\bar{X}_{(1)} \cong \bar{X}_{(2)} \cong \bar{X}$ και $\bar{X} = \sum_{t=1}^N X_t / N$ είναι η μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη συσχέτιση μεταξύ παρατηρήσεων που απέχουν k διαστήματα. Ο εκτιμητής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2} \quad (5.16)$$

Ο r_k είναι γνωστός ως εκτιμητής του συντελεστή αυτοσυσχέτισης με καθυστέρηση k .

Στήν πράξη οι εκτιμητές των συντελεστών αυτοσυσχέτισης υπολογίζονται από τους συντελεστές αυτοδιασποράς $\{c_k\}$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) \quad (5.17)$$

Από τη σχέση (5.16) προκύπτει ότι

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (5.18)$$

Οι συντελεστές r_k υπολογίζονται για $k=1,2,\dots,m$, όπου $m < N$. Στήν πράξη η τιμή του m δεν υπερβαίνει συνήθως την τιμή $N/4$.

Μερικοί συγγραφείς προτείνουν τον εξής εκτιμητή για την αυτοδιασπορά c_k

$$c_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \quad (5.19)$$

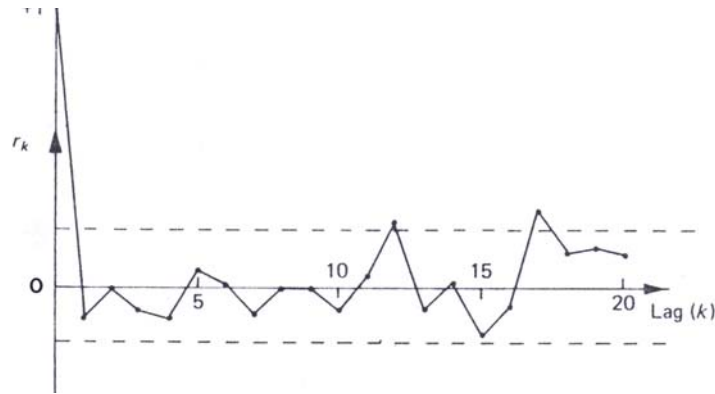
Για μεγάλο N δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ των εκτιμητών (5.17) και (5.19).

5.7. Συσχετόγραμμα

Μία χρήσιμη προσέγγιση στην ερμηνεία των εκτιμητών των συντελεστών αυτοσυσχέτισης είναι μία γραφική παράσταση που καλείται συσχετόγραμμα. Στο συσχετόγραμμα παριστάνουμε γραφικά τους συντελεστές r_k συναρτήσει της καθυστέρησης k . Μία ματιά στο συσχετόγραμμα είναι συνήθως πολύ χρήσιμη.

Περιγράφουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα χρονοσειρών.

α) Μία τυχαία χρονοσειρά: Αν μία χρονοσειρά είναι τελείως τυχαία, τότε για μεγάλο N , $r_k \cong 0$ για όλες τις τιμές του k που είναι διάφορες του 0. Πράγματι, για μία τυχαία χρονοσειρά μπορεί να αποδειχθεί ότι ο r_k ακολουθεί προσεγγιστικά μία κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $1/N$. Έτσι, στην περίπτωση που η χρονοσειρά είναι τυχαία, 19 από τις 20 τιμές των r_k αναμένεται να βρίσκονται μεταξύ $\pm 2/\sqrt{N}$. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχ. 5.4. Βλέπουμε ότι δύο συντελεστές βρίσκονται έξω από τα όρια $\pm 2/\sqrt{N}$, αν και οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες. Αυτό το παράδειγμα περιγράφει μία από τις δυσκολίες στην ερμηνεία του συσχετογράμματος. Η δυσκολία αυτή έγκειται στο γεγονός ότι ένας μεγάλος αριθμός συντελεστών αυτοσυσχέτισης είναι πολύ πιθανό να περιέχει μία (ή περισσότερες) ασυνήθιστες τιμές, ακόμη κι όταν δεν υπάρχουν πραγματικές επιδράσεις.



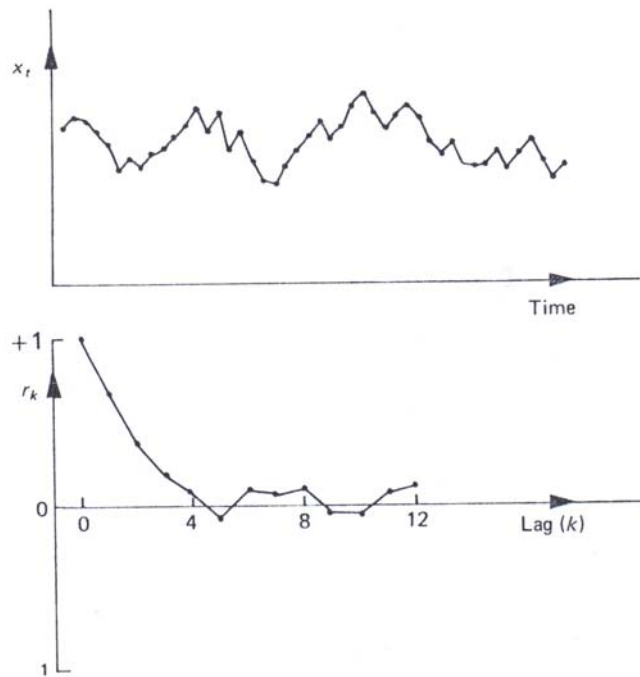
Σχήμα 5.4. Ο εκτιμητής της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης μιας καθαρώς τυχαίας χρονοσειράς.

β) Μικρής διάρκειας συσχέτιση: Στάσιμες χρονοσειρές παρουσιάζουν μικρής διάρκειας συσχέτιση που χαρακτηρίζεται από μία αρκετά μεγάλη τιμή του r_1 , η οποία ακολουθείται από 2 ή 3 ακόμη συντελεστές, οι οποίοι, ενώ είναι σημαντικά μεγαλύτεροι από το μηδέν, τείνουν να γίνουν διαδοχικά μικρότεροι. Τιμές των r_k για μεγαλύτερες καθυστερήσεις τείνουν να είναι προσεγγιστικά μηδέν. Ένα παράδειγμα από ένα τέτοιο συσχετόγραμμα παριστάνεται στο Σχ. 5.5. Μία χρονοσειρά που δίνει ένα τέτοιο συσχετόγραμμα έχει σαν χαρακτηριστικά της ότι μία παρατήρηση πάνω από τη μέση τιμή να ακολουθείται από μία ή περισσότερες περαιτέρω παρατηρήσεις πάνω από τη μέση τιμή, και ομοίως για παρατηρήσεις κάτω από τη μέση τιμή. Το αυτοπαλινδρομικό μοντέλο τάξης είναι κατάλληλο για χρονοσειρές του τύπου αυτού.

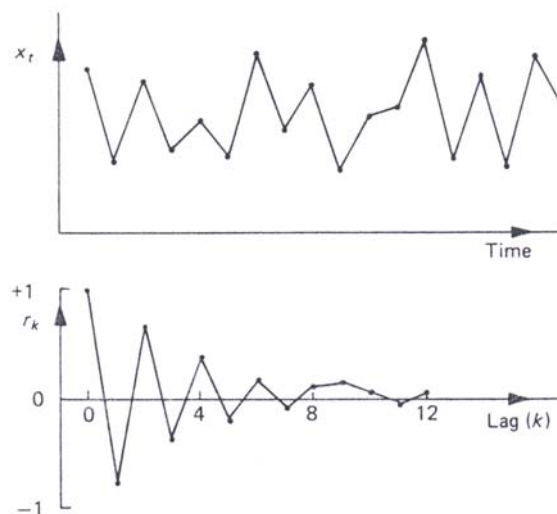
γ) Εναλλασσόμενες χρονοσειρές: Αν μία χρονοσειρά έχει την τάση να εναλλάσσεται, με διαδοχικές παρατηρήσεις σε διαφορετικές πλευρές της ολικής μέσης τιμής, τότε το συσχετόγραμμα επίσης τείνει να εναλλάσσεται. Η τιμή του r_1 θα είναι αρνητική. Όμως η τιμή του r_2 θα είναι θετική καθώς οι παρατηρήσεις με καθυστέρηση 2 θα τείνουν να είναι στην ίδια πλευρά της μέσης τιμής. Μία τυπική εναλλασσόμενη χρονοσειρά μαζί με το συσχετόγραμμά της παριστάνεται στο Σχ. 5.6.

δ) Μη-στάσιμες χρονοσειρές: Αν μία χρονοσειρά περιέχει μία κλίση, οι τιμές των r_k δεν θα προσεγγίζουν το μηδέν εκτός αν το k γίνει πολύ μεγάλο. Αυτό συμβαίνει επειδή μία παρατήρηση στην μία πλευρά της ολικής μέσης τιμής τείνει να ακολουθείται από ένα μεγάλο αριθμό κι άλλων παρατηρήσεων στην ίδια πλευρά της μέσης τιμής λόγω κλίσης. Μία τυπική μη-στάσιμη χρονοσειρά μαζί με το

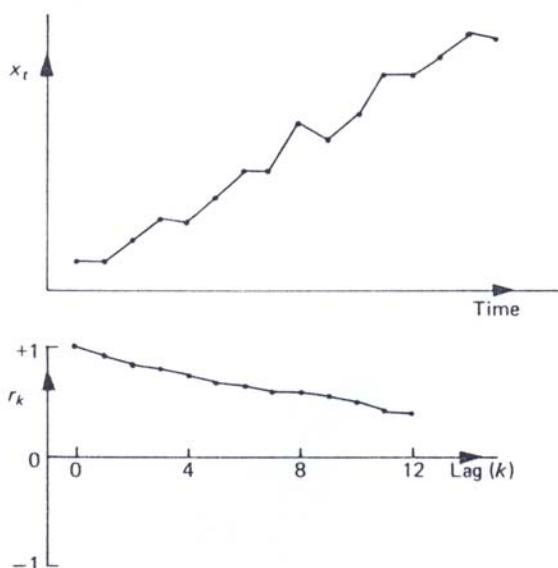
συσχετόγραμμα της παριστάνεται στο Σχ. 5.7.



Σχήμα 5.5. Μία χρονοσειρά που δείχνει μικρής διάρκειας συσχέτιση μαζί με το συσχετόγραμά της.



Σχήμα 5.6. Μία εναλλασσόμενη χρονοσειρά μαζί με το συσχετόγραμά της.



Σχήμα 5.7. Μία μη-στάσιμη χρονοσειρά μαζί με το συσχετόγραμμα της.

Πολύ λίγα μπορούν να εξαχθούν από το συσχετόγραμμα αυτού του τύπου, καθώς η κλίση υπερισχύει όλων των άλλων χαρακτηριστικών. Στην πραγματικότητα, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης πρέπει να υπολογίζονται μόνο για στάσιμες χρονοσειρές και έτσι κάθε κλίση πρέπει να μετακινείται πριν τον υπολογισμό τους.

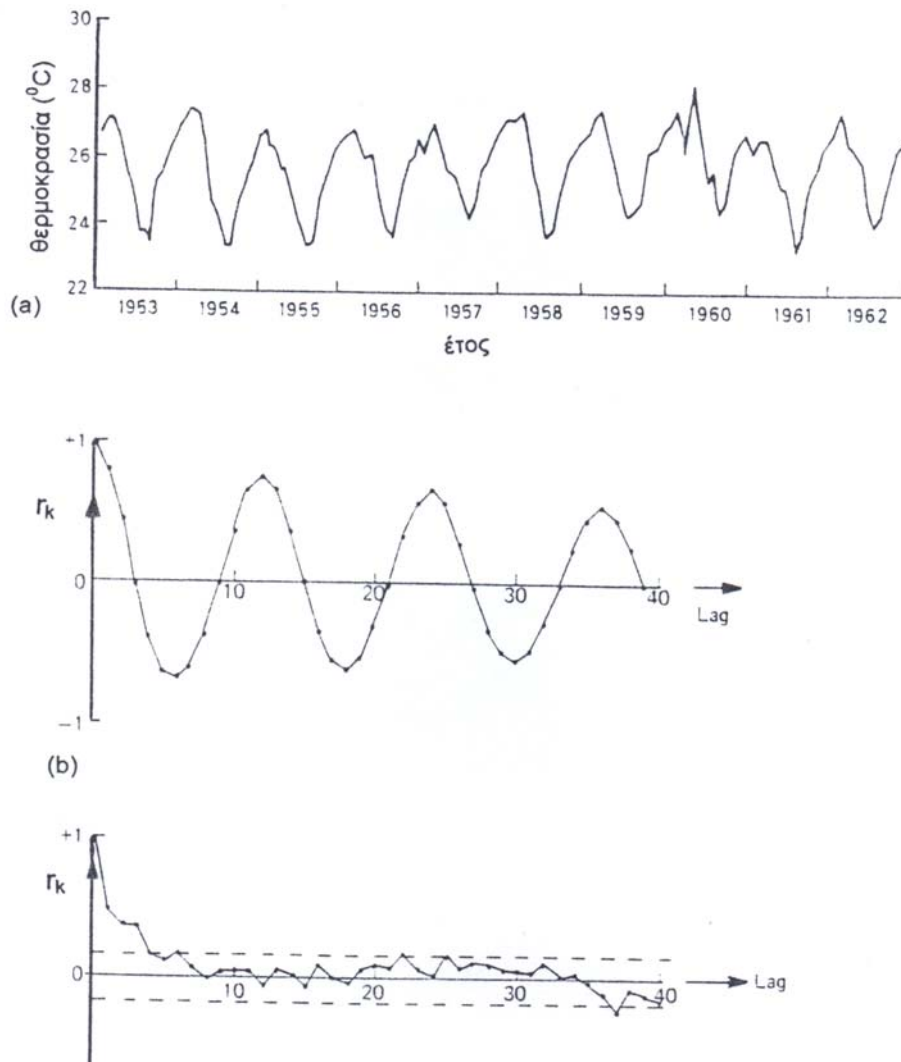
ε) Περιοδικές μεταβολές: Αν μία χρονοσειρά περιέχει μία περιοδική μεταβολή, τότε το συσχετόγραμμα θα παρουσιάζει μία διακύμανση στην ίδια συχνότητα. Για παράδειγμα, με τις μηνιαίες παρατηρήσεις (βλέπε Σχ. 5.8(α)), ο r_6 θα είναι μεγάλος και αρνητικός, ενώ ο r_{12} θα είναι μεγάλος και θετικός. Ειδικότερα αν η x_t έχει ημιτονοειδή μορφή, τότε την ίδια μορφή θα έχουν και οι συντελεστές r_k . Στην περίπτωση που η χρονοσειρά μας έχει τη μορφή

$$x_t = a \cos \omega t,$$

όπου a είναι μία σταθερά και η συχνότητα ω είναι τέτοια ώστε $0 < \omega < \pi$, τότε μπορεί να δειχθεί ότι

$$r_k \cong \cos k\omega \quad \text{για μεγάλο } N.$$

Στο Σχ. 5.8(β) παριστάνεται το συσχετόγραμμα των θερμοκρασιών του αέρα στο Recife. Η ημιτονοειδής μορφή του συσχετογράμματος είναι φανερή, αλλά για



Σχήμα 5.8 (α) Μέσες τιμές της θερμοκρασίας του αέρος διαδοχικών μηνών στο Recife της Βραζιλίας (β) Το συσχετόγραμμα των παρατηρήσεων της θερμοκρασίας (γ) Το συσχετόγραμμα των δεδομένων από τα οποία έχει αφαιρεθεί η περιοδική μεταβολή.

δεδομένα του τύπου αυτού το συσχετόγραμμα δεν μας δίνει άλλη πληροφορία, επειδή η περιοδική επίδραση καλύπτει όλα τα άλλα χαρακτηριστικά των δεδομένων.

Αν η περιοδική μεταβολή μετακινηθεί από τα δεδομένα, τότε το συσχετόγραμμα μπορεί να μας δώσει χρήσιμες πληροφορίες. Στα δεδομένα του Σχ. 5.8(α) η περιοδική μεταβολή μετακινήθηκε με τον απλό τρόπο του υπολογισμού των 12 μηνιαίων τιμών και αφαιρώντας την κατάλληλη μέση τιμή από κάθε ξεχωριστή παρατήρηση. Στο Σχ. 5.8(γ) παριστάνεται το συσχετόγραμμα της χρονοσειράς χωρίς την περιοδική μεταβολή. Είναι φανερό ότι οι τρεις πρώτοι συντελεστές είναι σημαντικά διάφοροι από το μηδέν. Αυτό δηλώνει μικρής διάρκειας συσχέτιση, δηλ. ένας μήνας που είναι ψυχρότερος από τη μέση τιμή θα τείνει να ακολουθείται από ένα ή δύο περαιτέρω μήνες, οι οποίοι είναι ψυχρότεροι από τη μέση τιμή.

Κεφάλαιο 6

ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

6.1. Εισαγωγή

Το φάσμα ισχύος μας βοηθάει να μελετήσουμε τις ιδιότητες μιας στάσιμης χρονοσειράς στο πεδίο συχνοτήτων, σε αντίθεση με τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης που περιγράφει τις ιδιότητες της χρονοσειράς στο πεδίο τιμών του χρόνου.

Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το φάσμα ισχύος είναι δύο ισοδύναμοι τρόποι περιγραφής μιας στάσιμης χρονοσειράς. Από πρακτική σκοπιά μπορούμε να πούμε ότι η μία συνάρτηση είναι συμπληρωματική της άλλης. Και οι δύο συναρτήσεις περιέχουν την ίδια πληροφορία αλλά την εκφράζουν με διαφορετικό τρόπο. Σε μερικές περιπτώσεις μία προσέγγιση στο πεδίο τιμών του χρόνου είναι προτιμότερη από μία προσέγγιση στο πεδίο συχνοτήτων και αντιστρόφως.

Η ονομασία φάσμα ισχύος (*power spectrum*) δόθηκε από τους μηχανικούς οι οποίοι χρησιμοποιούν την λέξη "ισχύ" σε συνδυασμό με το πέρασμα ενός ηλεκτρικού ρεύματος μέσω μιας αντίστασης. Για ένα ημιτονοειδές σήμα, η ισχύς είναι ανάλογος προς το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης. Για ένα πολυπλοκότερο σήμα, το φάσμα ισχύος περιγράφει πως η ισχύς κατανέμεται με την συχνότητα. Στην περίπτωση των χρονοσειρών, η διασπορά θεωρείται σαν η ολική ισχύς.

Πριν δώσουμε τον ορισμό του φάσματος ισχύος θα εξετάσουμε την **φασματική συνάρτηση κατανομής**.

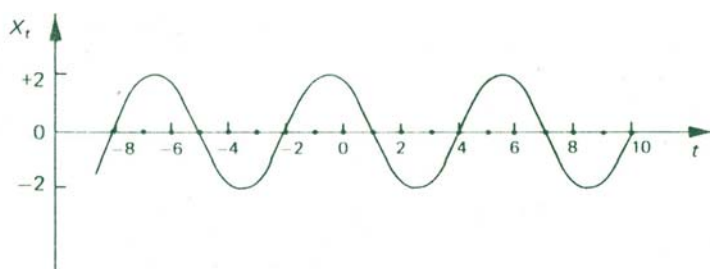
Υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά μας περιέχει μία περιοδική συνιστώσα σε γνωστή συχνότητα. Τότε ένα κατάλληλο μοντέλο για τη χρονοσειρά μας είναι

$$X_t = R \cos(\lambda t + \theta) + Z_t, \quad (6.1)$$

όπου λ είναι η γωνιακή συχνότητα της περιοδικής μεταβολής, R είναι το πλάτος της μεταβλητής, θ είναι η φάση και Z_t είναι μία καθαρώς τυχαία χρονοσειρά. Η ποσότητα $\lambda t + \theta$ μετρείται σε ακτίνια και η συχνότητα λ σε ακτίνια ανά μονάδα χρόνου.

Μερικές φορές είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη συχνότητα $f = \frac{\lambda}{2\pi}$ η οποία δίνεται σε κύκλους ανά μονάδα χρόνου. Η συχνότητα είναι ευκολότερο να ερμηνευθεί από φυσική σκοπιά. Η περίοδος ενός ημιτονοειδούς σήματος είναι ίση με $2\pi/\lambda$ ή $1/f$.

Ένα παράδειγμα που περιγράφει την ποσότητα $R \cos(\lambda t + \theta)$ δίνεται στο Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1. Γραφική παράσταση της $R \cos(\lambda t + \theta)$ όταν $R=2$, $\lambda = \pi/3$ και $\theta = \pi/6$.

Το μοντέλο (6.1) είναι ένα πολύ απλό μοντέλο. Στην πράξη συνήθως η μεταβολή σε μία χρονοσειρά μπορεί να προέρχεται από τη μεταβολή σε πολλές διαφορετικές συχνότητες. Για παράδειγμα, πωλήσεις διαφόρων αγαθών μπορεί να περιέχουν εβδομαδιαίες, μηνιαίες και ετήσιες μεταβολές. Με άλλα λόγια τα δεδομένα παρουσιάζουν μεταβολή σε υψηλές, μεσαίες και χαμηλές συχνότητες. Για το λόγο αυτό είναι δυνατό να γενικεύσουμε το μοντέλο (6.1) ως εξής :

$$X_t = \sum_{j=1}^n R_j \cos(\lambda_j t + \theta_j) + Z_t, \quad (6.2)$$

όπου R_j είναι το πλάτος σε συχνότητα λ_j .

Τα μοντέλα (6.1) και (6.2) δεν είναι στάσιμα αν R , θ , $\{R_j\}$ και $\{\theta_j\}$

θεωρηθούν σαν σταθερές, επειδή $E\{X_t\}$ θα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Για το λόγο αυτό θεωρούμε ότι $\{R_j\}$ είναι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές με τιμή θ ή ότι $\{\theta_j\}$ είναι τυχαίες μεταβλητές με μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Αυτό είναι ένα μαθηματικό τέχνασμα το οποίο μας βοηθάει να θεωρήσουμε χρονοσειρές με μία ή περισσότερες καθορισμένες συνιστώσες σαν στάσιμες χρονοσειρές.

Το μοντέλο (6.2) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X_t = \sum_{j=1}^k (a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t) + Z_t, \quad (6.3)$$

επειδή $\cos(\lambda_j t + \theta_j) = \cos \lambda_j t \cos \theta_j - \sin \lambda_j t \sin \theta_j$, $a_j = R_j \cos \theta_j$ και $b_j = -R_j \sin \theta_j$.

Θέτουμε τώρα το εξής ερώτημα : "γιατί πρέπει να υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός συχνοτήτων στο μοντέλο (6.3)". Στην πραγματικότητα, αν $k \rightarrow \infty$, είναι δυνατόν να δειχθεί ότι κάθε διακριτή στάσιμη χρονοσειρά που ορίζεται σε μοναδιαία διαστήματα παίρνει τη μορφή

$$X_t = \int_0^\pi \cos \lambda t \, d u(\lambda) + \int_0^\pi \sin \lambda t \, d v(\lambda), \quad (6.4)$$

όπου $u(\lambda)$ και $v(\lambda)$ είναι ασυσχέτιστες συνεχείς ανελίξεις με ορθογώνιες προσανυξήσεις για όλα τα λ στο διάστημα $(0, \pi)$. Η εξίσωση (6.4) είναι γνωστή ως η **φασματική απεικόνιση της χρονοσειράς**.

Θα μπορούσε τώρα να ρωτήσει κάποιος γιατί τα ανώτερα όρια των ολοκληρωμάτων στην (6.4) είναι π και όχι ∞ . Για μία συνεχή χρονοσειρά ($t \in \mathbb{R}$), τα ανωτέρω όρια θα είναι πράγματι ∞ , αλλά για μία διακριτή χρονοσειρά ($t \in \mathbb{Z}$) που ορίζεται σε μοναδιαία διαστήματα του χρόνου δεν χάνουμε τίποτα με το να περιορίσουμε το λ στην περιοχή $(0, \pi)$ επειδή

$$\cos(\lambda t + k \pi t) = \begin{cases} \cos \lambda t & k, t \text{ ακέραιοι και } k \text{ άρτιος} \\ \cos(\pi - \lambda)t & k, t \text{ ακέραιοι και } k \text{ περιττός} \end{cases}$$

και επομένως η μεταβολή σε συχνότητες μεγαλύτερες από το π δεν ξεχωρίζεται

από τη μεταβολή σε αντίστοιχες συχνότητες στο $(0, \pi)$.

Η συχνότητα $\lambda=\pi$, καλείται *Nyquist* συχνότητα. Για μία διακριτή χρονοσειρά που ορίζεται σε ίσα χρονικά διαστήματα μήκους Δt , η συχνότητα *Nyquist* είναι $\pi/\Delta t$.

6.2. Φασματική Συνάρτηση Κατανομής

Ορίσαμε την φασματική απεικόνιση κυρίως για να δείξουμε ότι κάθε συχνότητα στο διάστημα $(0, \pi)$ μπορεί να συνεισφέρει στη μεταβολή της χρονοσειράς. Οι συναρτήσεις $u(\lambda)$ και $v(\lambda)$ παρουσιάζουν λίγο πρακτικό ενδιαφέρον. Αντίθετα η συνάρτηση $F(\lambda)$, η οποία καλείται συνάρτηση φασματικής κατανομής και η οποία συνδέεται με τις συναρτήσεις $u(\lambda)$ και $v(\lambda)$ (βλέπε *Bartlett*, 1966) παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για μια στάσιμη χρονοσειρά με συνάρτηση αυτοδιασποράς $\gamma(k)$ υπάρχει μία μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση $F(\lambda)$ τέτοια ώστε

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} dF(\lambda) \quad (6.5)$$

Η σχέση (6.5) ονομάζεται η φασματική απεικόνιση της συνάρτησης αυτοδιασποράς. Η φυσική σημασία της συνάρτησης $F(\lambda)$ είναι η εξής : $F(\lambda)$ = συνεισφορά στην διασπορά της χρονοσειράς που εξηγείται από τις συχνότητες στο διάστημα $(0, \lambda)$.

Επειδή δεν υπάρχει μεταβολή σε αρνητικές συχνότητες έχουμε ότι

$$F(\lambda) = 0 \quad \text{για } \lambda < 0.$$

Για μια διακριτή χρονοσειρά που ορίζεται σε μοναδιαία χρονικά διαστήματα, η μεγαλύτερη δυνατή συχνότητα είναι $\lambda=\pi$ και επομένως όλη η μεταβολή εξηγείται με συχνότητες μικρότερες από π . Άρα

$$F(\pi) = \text{Var}(X_t) = \sigma_x^2$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την (6.5) για $k=0$.

Η συνάρτηση $F(\lambda)$ είναι μονοτονικά αύξουσα μεταξύ $\lambda=0$ και $\lambda=\pi$ Στην πραγματικότητα η συνάρτηση $F(\lambda)$ συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση κατανομής μιας συνάρτησης πιθανότητας εκτός από το γεγονός ότι το ανώτερο όριο είναι σ_x^2 και όχι 1.

Αν η χρονοσειρά περιέχει μία καθορισμένη ημιτονοειδή συνιστώσα σε συχνότητα λ που περιγράφεται με την εξίσωση $R\cos(\lambda t + \theta)$, όπου R είναι σταθερά και θ είναι μία τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 2\pi)$, τότε θα υπάρχει μία βηματική αύξηση στην $F(\lambda)$ στην συχνότητα λ ίση προς

$$E[R^2 \cos^2(\lambda t + \theta)] = \frac{1}{2} R^2$$

Επειδή $F(\lambda)$ είναι μία μονοτονικά αύξουσα συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο συναρτήσεις $F_1(\lambda)$ και $F_2(\lambda)$ έτσι ώστε

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda), \quad (6.6)$$

όπου $F_1(\lambda)$ είναι μία μη-φθίνουσα συνεχής συνάρτηση και $F_2(\lambda)$ είναι μία μη-φθίνουσα βηματική συνάρτηση. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει την $F_1(\lambda)$ να σχετίζεται με μία καθαρώς μη-καθορισμένη συνιστώσα της χρονοσειράς και την $F_2(\lambda)$ να σχετίζεται με μία καθορισμένη συνιστώσα. Θα ασχοληθούμε κυρίως με καθαρώς μη-καθορισμένες χρονοσειρές, δηλ. $F(\lambda) = F_1(\lambda)$ το οποίο σημαίνει ότι η $F(\lambda)$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, \pi)$.

Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τον εξής ορισμό :

$F^*(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\sigma_x^2} =$ ποσοστό της διασποράς που εξηγείται από τις συχνότητες στο διάστημα $(0, \pi)$.

Η $F^*(\lambda)$ ονομάζεται κανονικοποιημένη φασματική συνάρτησης κατανομής.

6.3. Ορισμός του φάσματος ισχύος

Για μια καθαρώς μη-καθορισμένη διακριτή χρονοσειρά η $F(\lambda)$ είναι

συνεχής στο διάστημα $(0, \pi)$ και επομένως μπορούμε να την παραγωγίσουμε ως προς λ στο $(0, \pi)$, οπότε θα έχουμε

$$f(\lambda) = \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \quad (6.7)$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται φάσμα ισχύος ή φασματική συνάρτηση πυκνότητας. Αντικαθιστώντας την (6.7) στην (6.5) βρίσκουμε

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f(\lambda) d\lambda \quad (6.8)$$

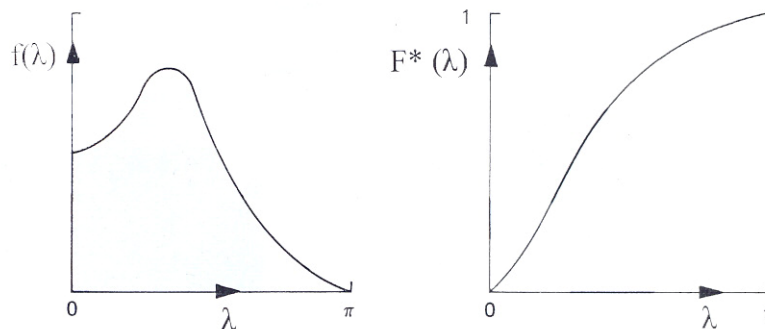
Ένας παρόμοιος τύπος για τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $\rho(k)$ δίνεται από τη σχέση

$$\rho(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} f^*(\lambda) d\lambda, \quad (6.9)$$

όπου $f^*(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\sigma_x^2}$ είναι το κανονικοποιημένο φάσμα ισχύος.

Η φυσική ερμηνεία του φάσματος είναι η εξής :

Η ποσότητα $f(\lambda)d\lambda$ παριστάνει τη συνεισφορά στη διασπορά των συνιστωσών με συχνότητες στο διάστημα $(\lambda, \lambda+d\lambda)$. Όταν το φάσμα ισχύος παριστάνεται γραφικά, το ολικό εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι ίσο με την διασπορά της χρονοσειράς. Ένα παράδειγμα φάσματος ισχύος και της φασματικής συνάρτησης κατανομής περιγράφεται στο Σχ.6.2.



Σχήμα 6.2. Ένα παράδειγμα φάσματος ισχύος μαζί με την αντίστοιχη φασματική συνάρτηση κατανομής.

Ένα μέγιστο στο φάσμα δείχνει μία σπουδαία συνεισφορά σε συχνότητες στην κατάλληλη περιοχή. Αντιστρέφοντας την (6.8) παίρνουμε μία σχέση που δίνει το φάσμα ισχύος ως μία συνάρτηση της $\gamma(k)$, δηλαδή

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k} \quad (6.10)$$

Το φάσμα ισχύος υπάρχει αν $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma(k)| < +\infty$. Επίσης από την (6.10) βλέπουμε ότι το φάσμα ισχύος είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της $\gamma(k)$. Επειδή η $\gamma(k)$ είναι μία άρτια συνάρτηση, η σχέση (6.10) μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos \lambda k \right], \quad (6.11)$$

και επομένως

$$f^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho(k) \cos \lambda k \right] \quad (6.12)$$

Στην περίπτωση μιας συνεχούς μη-καθορισμένης χρονοσειράς $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, με συνάρτηση αυτοδιασποράς $\gamma(\tau)$ το φάσμα ισχύος δίνεται από την σχέση

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau \quad (6.13)$$

αρκεί $\int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < +\infty$.

Επίσης ισχύει η ακόλουθη αντίστροφη σχέση

$$\gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda\tau} d\lambda. \quad (6.14)$$

6.4. Ιδιότητες του φάσματος ισχύος

Το φάσμα ισχύος μιας διακριτής χρονοσειράς πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες :

- (i) $f(\lambda) \geq 0$, δηλαδή το φάσμα ισχύος είναι πάντοτε μία μη-αρνητική συνάρτηση.
- (ii) $f(\lambda) = f(-\lambda)$, δηλαδή το φάσμα ισχύος είναι μία άρτια συνάρτηση.
- (iii) $f(\lambda+2\pi) = f(\lambda)$, δηλαδή το φάσμα ισχύος είναι μία περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π .
- (iv) $f(2\pi-\lambda) = f(\lambda)$, δηλαδή στην πράξη το φάσμα ισχύος πρέπει να παριστάνεται γραφικά στην περιοχή συχνοτήτων $(0, \pi)$.

6.5. Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.5.1. Έστω $\{Z_t\}$ μία καθαρώς τυχαία χρονοσειρά με μέση τιμή θ και

$$\text{cov}\{Z_{t+k}, Z_t\} = \begin{cases} \sigma_z^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Να υπολογισθεί το φάσμα ισχύος της χρονοσειράς αυτής.

Από τον (6.11) έχουμε

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi}, \quad -\pi < \lambda < \pi.$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι το φάσμα ισχύος μιας διακριτής καθαρώς τυχαίας χρονοσειράς είναι σταθερό στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Παράδειγμα 6.5.2. Να δειχθεί ότι το φάσμα ισχύος ενός $MA(1)$ μοντέλου δίνεται από την σχέση

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} (1 + 2\beta \cos \lambda + \beta^2), \quad -\pi < \lambda < \pi.$$

Χρησιμοποιώντας την (6.11) και τις σχέσεις $\gamma(0) = \sigma_z^2(1 + \beta^2)$,

$$\gamma(k) = \begin{cases} \beta\sigma_z^2 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases},$$

Βρίσκουμε

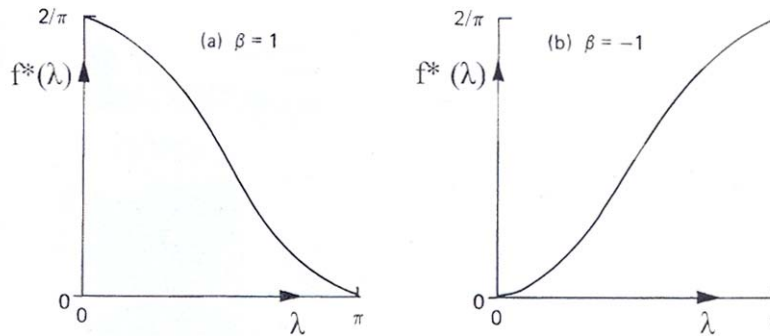
$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos \lambda \right] = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} (1 + \beta^2 + 2\beta \cos \lambda)$$

και επομένως

$$f^*(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{\sigma_z^2} = \frac{1}{2\pi} (1 + 2\beta \cos \lambda / (1 + \beta^2))$$

είναι το τυποποιημένο φάσμα ισχύος.

Το σχήμα της συνάρτησης $f(\lambda)$ εξαρτάται από την τιμή του β . Αν $\beta > 0$, η ισχύς συγκεντρώνεται σε χαμηλές συχνότητες [Σχ. 6.3α], ενώ, αν $\beta < 0$, η ισχύς συγκεντρώνεται σε υψηλές συχνότητες [Σχ. 6.3β].



Σχήμα 6.3. Δύο παραδείγματα φασμάτων ισχύος μιας $MA(1)$ ανέλιξης με (α) $\beta=1$ και (β) $\beta=-1$

Παράδειγμα 6.5.3. Ναδειχθεί ότι το φάσμα ισχύος ενός $AR(1)$ μοντέλου δίνεται από την σχέση

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2} \quad (-\pi < \lambda < \pi)$$

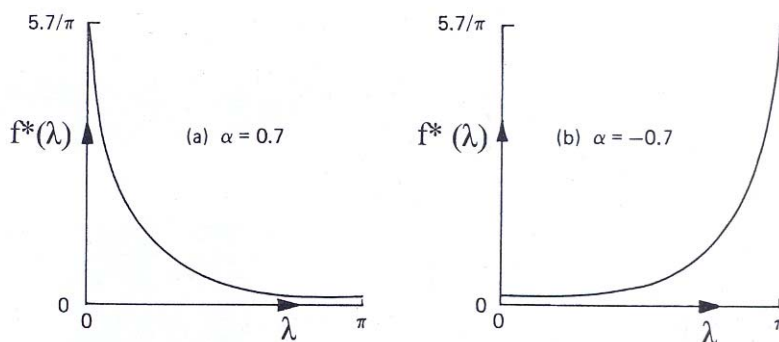
Από τον ορισμό του φάσματος ισχύος έχουμε

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) e^{i\lambda k} \right]$$

επειδή $\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0)$ ($k > 0$),

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \left[\gamma(0) + \gamma(0) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k e^{-i\lambda k} + \gamma(0) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k e^{i\lambda k} \right] \\ &= \frac{\gamma(0)}{2\pi} \left[1 + \frac{\alpha e^{-i\lambda}}{1 - \alpha e^{-i\lambda}} + \frac{\alpha e^{i\lambda}}{1 - \alpha e^{i\lambda}} \right] = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \left[\frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2} \right] \\ &= \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2} \Rightarrow f^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2}, \quad -\pi < \lambda < \pi. \end{aligned}$$

Όταν $\alpha > 0$, η ισχύς συγκεντρώνεται σε χαμηλές συχνότητες, ενώ αν $\alpha < 0$ η ισχύς συγκεντρώνεται σε υψηλές συχνότητες.



Σχήμα 6.4. Δύο παραδείγματα φασμάτων ισχύος μιας $AR(1)$ με (α) $\alpha=0.7$ και (β) $\alpha=-0.7$.

Παράδειγμα 6.5.4. Μία καθορισμένη ημιτονοειδή διατάραξη.

Έστω $X_t = \cos(\omega_0 t + \theta)$, όπου ω_0 , είναι μία σταθερά στο διάστημα $(0, \pi)$ και θ είναι μία τ.μ. η οποία ακολουθεί μία ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Η χρονοσειρά αυτή είναι μία καθαρά καθορισμένη ανέλιξη. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της χρονοσειράς δίνεται από την σχέση

$$\gamma(k) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 k$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή δεν τείνει στο μηδέν καθώς k αυξάνει. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό των περισσότερων καθορισμένων χρονοσειρών. Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\text{Var} \{X_t\} = E \{X_t^2\} = \frac{1}{2}$$

Η φασματική συνάρτηση κατανομής θα δίνεται από την σχέση

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda < \omega_0 \\ 1/2 & \lambda \geq \omega_0 \end{cases}$$

Επειδή $F(\lambda)$ είναι μία βηματική συνάρτηση, η παραγωγός της δεν υπάρχει στο σημείο ω_0 και επομένως το φάσμα ισχύος δεν ορίζεται στο ω_0 . Από τον τύπο του φάσματος ισχύος έχουμε

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma(k) e^{-i\lambda k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda+\omega_0)k} + \right.$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda-\omega_0)k} \Big\} = \frac{1}{4} [\delta(\lambda-\omega_0) + \delta(\lambda+\omega_0)],$$

δηλαδή η ισχύς της χρονοσειράς αυτής συγκεντρώνεται στα σημεία $\pm \omega_0$. Με $\delta(u)$ συμβολίζουμε την δέλτα *Dirac* συνάρτηση (βλέπε Papoulis,).

Κεφάλαιο 7

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

7.1. Εισαγωγή

Η φασματική ανάλυση ασχολείται με την εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας δεδομένης χρονοσειράς. Θα ασχοληθούμε κυρίως με μη-καθορισμένες χρονοσειρές, οι οποίες έχουν ένα συνεχές φάσμα, αλλά οι ίδιες τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης για καθορισμένες χρονοσειρές με σκοπό τον προσδιορισμό περιοδικών συνιστωσών όταν υπάρχει θόρυβος.

7.2. Ανάλυση Fourier

Η φασματική ανάλυση είναι ουσιαστικά μία τροποποίηση της ανάλυσης *Fourier* για την εφαρμογή της σε στοχαστικές παρά σε καθορισμένες συναρτήσεις του χρόνου. Η ανάλυση *Fourier*, όπως είναι γνωστό, ασχολείται βασικά με την προσέγγιση μιας συνάρτησης από ένα άθροισμα όρων ημίτονων και συνημίτονων. Υποθέτουμε ότι μία συνάρτηση $f(t)$ ορίζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ και ικανοποιεί την συνθήκη *Dirichlet* (δηλ. η συνάρτηση είναι απολύτως ολοκλήρωση στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών ο αριθμός από μέγιστα και ελάχιστα είναι πεπερασμένος). Τότε η $f(t)$ μπορεί να προσεγγισθεί από τη σειρά *Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{r=1}^k (a_r \cos rt + b_r \sin rt),$$

όπου

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad \alpha_r = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos rtdt,$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η σειρά *Fourier* συγκλίνει στη συνάρτηση $f(t)$ καθώς $k \rightarrow \infty$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας στα οποία συγκλίνει στην τιμή $[f(t+0) + f(t-0)] / 2$.

Για να εφαρμόσουμε την ανάλυση *Fourier* σε διακριτές χρονοσειρές χρειάζεται να προσεγγίσουμε την $f(t)$ με μία σειρά *Fourier* και ο χρόνος t παίρνει τιμές στους ακεραίους αριθμούς $1, 2, \dots, N$. Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο πως η ζητούμενη σειρά *Fourier* προκύπτει φυσιολογικά από τη θεώρηση ενός απλού ημιτονοειδούς μοντέλου.

7.3. Το απλό ημιτονοειδές μοντέλο

Υποθέτουμε ότι μία δεδομένη χρονοσειρά, της οποίας τα σημεία λαμβάνονται σε μοναδιαία χρονικά διαστήματα, περιέχει μία καθορισμένη ημιτονοειδή συνιστώσα στη συχνότητα λ μαζί με τον όρο του τυχαίου σφάλματος. Θεωρούμε σ' αυτή την περίπτωση το ακόλουθο μοντέλο

$$X_t = \mu + a \cos \lambda t + b \sin \lambda t + Z_t, \quad (7.1)$$

όπου Z_t είναι μία καθαρώς τυχαία χρονοσειρά και μ, a, b είναι άγνωστοι παράμετροι που θα εκτιμηθούν από τα δεδομένα.

Οι παρατηρήσεις της χρονοσειράς συμβολίζονται με X_1, \dots, X_N . Θεωρούμε ότι το N είναι ένας άρτιος αριθμός. Αυτό θα μας διευκολύνει στους υπολογισμούς που θα ακολουθήσουν. Δεν υπάρχει πραγματική δυσκολία να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα στην περίπτωση που το N είναι περιττός αριθμός (βλέπε, για παράδειγμα, *Bloomfield (1976)*). Στην πράξη, αν το N είναι περιττός αριθμός και αρκετά μεγάλος, μπορούμε να αφαιρέσουμε την πρώτη παρατήρηση και να κάνουμε το N άρτιο αριθμό. Με τον τρόπο αυτό χάνουμε λίγη πληροφορία αλλά κερδίζουμε στην απλοποίηση των υπολογισμών.

Το μοντέλο (7. 1) μπορεί να τεθεί στην εξής μορφή

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}, \quad \text{όπου } \mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_N), \quad \boldsymbol{\theta}' = (\mu, a, b)$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cos \lambda & \sin \lambda \\ 1 & \cos 2\lambda & \sin 2\lambda \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos N\lambda & \sin N\lambda \end{bmatrix}$$

Εκτιμητές για τις παραμέτρους μ , a και b υπολογίζονται με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων

$$\sum_{t=1}^N (X_t - \mu - a \cos \lambda t - b \sin \lambda t)^2$$

Όπως είναι γνωστό από την ανάλυση των παλινδρομικών μοντέλων, οι εκτιμητές αυτοί δίνονται από την σχέση $\hat{\theta} = (A'A)^{-1} A'X$

Η μεγαλύτερη συχνότητα που μπορούμε να προσαρμόσουμε στα δεδομένα είναι η *Nyquist* συχνότητα, η οποία συμβαίνει όταν $\lambda = \pi$, ενώ η μικρότερη συχνότητα υπολογίζεται από την σχέση $\frac{2\pi}{\lambda} = N$, δηλ. $\lambda = \frac{2\pi}{N}$. Οι εκτιμητές ελάχιστων τετραγώνων απλοποιούνται όταν το λ λαμβάνει τις τιμές $\lambda_j = \frac{2\pi j}{N}$ ($j = 1, \dots, \frac{N}{2}$), επειδή, στην περίπτωση αυτή ο πίνακας $(A'A)$ είναι διαγώνιος. Αυτό συμβαίνει επειδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\sum_{t=1}^N \cos \lambda_j t = \sum_{t=1}^N \sin \lambda_j t = 0 \quad (7.2)$$

$$\sum_{t=1}^N \cos \lambda_j t \cos \lambda_k t = \begin{cases} 0 & \text{για } j \neq k \\ N & \text{για } j = k = N/2 \\ \frac{N}{2} & \text{για } j = k \neq N/2 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\sum_{t=1}^N \sin \lambda_j t \sin \lambda_k t = \begin{cases} 0 & \text{για } j \neq k \\ N & \text{για } j = k = N/2 \\ \frac{N}{2} & \text{για } j = k \neq N/2 \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\sum_{t=1}^N \cos \lambda_j t \cos \lambda_k t = 0 \quad \text{για όλα τα } j, k. \quad (7.5)$$

Για $j \neq N/2$, έχουμε

$$(A' A) = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & N/2 \end{pmatrix}, \quad A' X = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^N X_t \\ \sum_{t=1}^N X_t \cos \lambda_j t \\ \sum_{t=1}^N X_t \sin \lambda_j t \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{t=1}^N X_t / N = \bar{X} \\ \hat{\alpha} &= 2 \sum_{t=1}^N X_t \cos \lambda_j t / N \\ \hat{\beta} &= 2 \sum_{t=1}^N X_t \sin \lambda_j t / N \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Για $j = N/2$, έχουμε $(A' A) = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

και επομένως

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{X} \\ \hat{\alpha} &= \sum_{t=1}^N (-1)^t X_t / N \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Το μοντέλο αυτό είναι χρήσιμο στον υπολογισμό μιας καθορισμένης περιοδικής συνιστώσας σε μία γνωστή συχνότητα την οποία επιθυμούμε να ξεχωρίσουμε.

Όπως είναι γνωστό η ολική μεταβολή στη χρονοσειρά δίνεται από το άθροισμα των τετραγώνων $\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2$. Το άθροισμα αυτό μπορεί να χωριστεί σε δύο συνιστώσες, το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων και το άθροισμα των

τετραγώνων που επεξηγείται από την περιοδική συνιστώσα στην συχνότητα λ_i . Η τελευταία συνιστώσα δίνεται από την σχέση

$$\sum_{t=1}^N (\hat{\alpha} \cos \lambda_j t + \hat{\beta} \sin \lambda_j t)^2$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\left. \begin{array}{ll} (\hat{\alpha}^2 + \hat{\beta}^2) \frac{N}{2} & \text{για } j \neq N/2 \\ \hat{\alpha}^2 N & \text{για } j = N \end{array} \right\} \quad (7.8)$$

7.4. Η συχνότητα Nyquist

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι για μία διακριτή χρονοσειρά της οποίας τα σημεία λαμβάνονται σε μοναδιαία διαστήματα, δεν χάνουμε τίποτα αν περιορίσουμε τον υπολογισμό του φάσματος ισχύος, στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Αν οι παρατηρήσεις λαμβάνονται σε ίσα διαστήματα μήκους Δt , τότε η συχνότητα *Nyquist*, δίνεται από την σχέση $\frac{\pi}{\Delta t}$ ή $\frac{1}{2\Delta t}$ (δηλ. κύκλους ανά μονάδα χρόνου).

Θεωρούμε τώρα το εξής παράδειγμα : Η θερμοκρασία ενός συγκεκριμένου τόπου μετριέται κάθε μέρα το μεσημέρι. Είναι φανερό ότι οι παρατηρήσεις δεν μας λένε τίποτα για τη μεταβολή της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας. Ιδιαίτερα δεν γνωρίζουμε αν οι νύκτες είναι θερμότερες ή ψυχρότερες.

Με μία μόνο παρατήρηση κάθε μέρα, η συχνότητα *Nyquist* είναι ένας κύκλος ανά δύο ημέρες. Η τιμή αυτή είναι μικρότερη από τις συχνότητες που επεξηγούν τη μεταβολή κατά τη διάρκεια της ημέρας. Αν θέλαμε να έχουμε συχνότητα 1 κύκλου ανά ημέρα πρέπει να πάρουμε δύο παρατηρήσεις ανά ημέρα.

Τώρα αν ενδιαφερόμαστε για μεταβολές κατά τη διάρκεια ενός έτους στη χαμηλή συχνότητα ενός κύκλου ανά έτος, τότε πρέπει να έχουμε παρατηρήσεις τουλάχιστον για ένα χρόνο. Επομένως όσο χαμηλότερη είναι η συχνότητα που μας ενδιαφέρει, τόσο μεγαλύτερη είναι η χρονική περίοδος στην οποία χρειάζεται να κάνουμε μετρήσεις, ενώ όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα που μας ενδιαφέρει, τόσο συχνότερα πρέπει να παίρνουμε παρατηρήσεις.

7.5. Ανάλυση περιοδογράμματος (Periodogram Analysis)

Οι πρώτες προσπάθειες που έγιναν για τον προσδιορισμό κρυμμένων περιοδικοτήτων σε μία δεδομένη χρονοσειρά βασίστηκαν στην ανάλυση που αναπτύξαμε στην Παρ. 7.3 σ' όλες τις συχνότητες $\frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \pi$. Λόγω των σχέσεων (7.3)-(7.5) οι διαφορετικοί όροι είναι ορθογώνιοι και αυτό μας βοηθά να καταλήξουμε σε μία πεπερασμένη απεικόνιση σειράς *Fourier* $\{X_t\}$, η οποία δίνεται από την σχέση

$$x_t = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[\hat{a}_j \cos\left\{\frac{2\pi jt}{N}\right\} + \hat{\beta}_j \sin\left\{\frac{2\pi jt}{N}\right\} \right] + \hat{a}_{N/2} \cos\pi t \quad (7.9)$$

$(t = 1, \dots, N),$

όπου οι συντελεστές $\{\hat{a}_j, \hat{\beta}_j\}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_0 &= \bar{X} \\ \hat{a}_{N/2} &= \sum_{t=1}^N (-1)^t X_t / N \\ \hat{a}_j &= 2 \left[\sum_{t=1}^N X_t \cos\left\{\frac{2\pi jt}{N}\right\} / N \right] \\ \hat{\beta}_j &= 2 \left[\sum_{t=1}^N X_t \sin\left\{\frac{2\pi jt}{N}\right\} / N \right] \end{aligned} \right\} j = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (7.10)$$

Μία ανάλυση αυτής της μορφής λέγεται ανάλυση *Fourier* ή αρμονική ανάλυση.

Η ανάλυση *Fourier* δεδομένων έχει ως σκοπό το διαχωρισμό της ολικής μεταβολής της χρονοσειράς σε συνιστώσες στις συχνότητες $2\pi/N, 4\pi/N, \dots, \pi$. Η συνιστώσα σε συχνότητα $\lambda_j = 2\pi j / N$ καλείται η αρμονική j . Για $j \neq N/2$, είναι συχνά χρήσιμο να γράψουμε την αρμονική j στην ισοδύναμη μορφή

$$\hat{\alpha}_j \cos \lambda_j t + \hat{\beta}_j \sin \lambda_j t = R_j \cos(\lambda_j t + \lambda_j), \quad (7.11)$$

όπου

$$R_j = \text{πλάτος της αρμονικής } j = \sqrt{\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2} \quad (7.12)$$

και

$$\varphi_j = \text{φάση της αρμονικής } j = \tan^{-1} \left[-\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\alpha}_j} \right] \quad (7.13)$$

Η συνεισφορά της αρμονικής j στο ολικό άθροισμα των τετραγώνων δίνεται από τη σχέση

$$\frac{N[\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2]}{2} = \frac{N}{2} R_j^2$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε

$$\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2 = N \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{R_j^2}{2} + N \hat{\alpha}_{N/2}^2 \quad (7.14)$$

Διαιρώντας τώρα την (7.14) με το N επιτυγχάνουμε

$$\frac{\sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X})^2}{N} = \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{R_j^2}{2} + \hat{\alpha}_{N/2}^2 \quad (7.15)$$

Το αριστερό μέρος της (7.15) είναι ουσιαστικά η διασπορά των δεδομένων μας. Έτσι $R_j^2/2$ είναι η συνεισφορά της αρμονικής j στη διασπορά, και επομένως η (7.15) περιγράφει πως η ολική διασπορά διαχωρίζεται. Αν θεωρήσουμε $R_j^2/2$ τη συνεισφορά στη διασπορά στο διάστημα $\lambda_j \pm \pi N$, μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά ένα ιστόγραμμα του οποίου το ύψος στην περιοχή $\lambda_j \pm \pi N$ είναι τέτοιο ώστε:

$$R_j^2/2 = \text{εμβαδό του ορθογωνίου ιστογράμματος}$$

$$\dots = \text{ύψος του ιστογράμματος} \times \frac{2\pi}{N}$$

Έτσι το ύψος του ιστογράμματος δίνεται από τη σχέση

$$I(\lambda_j) = \frac{NR_j^2}{4\pi} \quad (7.16)$$

Επειδή η (7.16) δεν ισχύει για $j=N/2$, μπορούμε να θεωρήσουμε $\hat{\alpha}_{N/2}^2$ τη συνεισφορά στη διασπορά στο διάστημα $\left[\frac{\pi(N-1)}{N}, \pi \right]$, τέτοια ώστε:

$$I(\pi) = N \hat{\alpha}_{N/2}^2 / \pi$$

Η γραφική παράσταση της $I(\lambda)$ συναρτήσεως του λ καλείται συνήθως περιοδόγραμμα αν και η $I(\lambda)$ είναι μία συνάρτηση συχνότητας και όχι περιόδου. Ένας διαφορετικός ορισμός του περιοδογράμματος γίνεται με τη βοήθεια των μιγαδικών συναρτήσεων ως εξής

$$\frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{it\lambda} \right|^2 \quad (7.17)$$

Η σχέση αυτή είναι $I(\lambda)/2$, όπου $I(\lambda)$ δίνεται από την (7.16). Το πλεονέκτημα του ορισμού (7.16) είναι ότι το ολικό εμβαδό κάτω από το περιοδόγραμμα είναι ίσο με τη διασπορά της χρονοσειράς.

Η σχέση (7.17) μπορεί να υπολογισθεί κατ' ευθείαν από τα δεδομένα από τον τύπο

$$f(\lambda_j) = \left[\left(\sum_{t=1}^N X_t \cos \frac{2\pi jt}{N} \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^N X_t \sin \frac{2\pi jt}{N} \right)^2 \right] / 2\pi N \quad (7.18)$$

Η εξίσωση (7.18) ισχύει επίσης για $j=N/2$.

Το περιοδόγραμμα φαίνεται ότι είναι ένας φυσικός τρόπος εκτίμησης του φάσματος ισχύος, αλλά θα δούμε ότι είναι ένας πτωχός εκτιμητής και χρειάζεται να τροποποιηθεί.

7.6. Σχέση συνάρτησης αυτοδιασποράς και περιοδογράμματος

Το περιοδόγραμμα, $I(\lambda)$, και η συνάρτηση αυτοδιασποράς, C_k , περιγράφουν τις ιδιότητες δευτέρας τάξεως της χρονοσειράς X_t . Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως συνδέονται αυτές οι δύο συναρτήσεις. Λόγω της (7.2) η (7.18) γράφεται στη μορφή

$$I(\lambda_j) = \left[\left\{ \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}) \cos \lambda_j t \right\}^2 + \left\{ \sum_{t=1}^N (X_t - \bar{X}) \sin \lambda_j t \right\}^2 \right] / 2\pi N$$

$$= \sum_t \sum_s (X_t - \bar{X})(X_s - \bar{X})(\cos \lambda_j t \cos \lambda_j s + \sin \lambda_j t \sin \lambda_j s) / N\pi$$

Αλλά

$$c_k = \sum_{t=1}^{N-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}) / N$$

και $\cos \lambda_j t \cos \lambda_j (t+k) + \sin \lambda_j t \sin \lambda_j (t+k) = \cos [\lambda_j (t+k) - \lambda_j t] = \cos \lambda_j k$,

έτσι ώστε

$$I(\lambda_j) = \left[c_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cos \lambda_j k \right] / 2\pi \quad (7.19)$$

$$= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} c_k e^{-i\lambda_j k} / 2\pi \quad (7.20)$$

Η εξίσωση (7.20) είναι η πλέον χρήσιμη σχέση που συνδέει το περιοδόγραμμα και τον εκτιμητή της συνάρτησης αυτοδιασποράς. Η σχέση αυτή μας λέει ότι το περιοδόγραμμα είναι ο πεπερασμένος μετασχηματισμός *Fourier* της c_k .

7.7. Ιδιότητες του περιοδογράμματος

Από τη σχέση (7.20) είναι φανερό ότι το περιοδόγραμμα είναι ένας εκτιμητής του φάσματος ισχύος

$$f(\lambda) = \left[\gamma(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(k) \cos \lambda k \right] / 2\pi, \quad -\pi < \lambda < \pi.$$

Αλλά, αν και το περιοδόγραμμα είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής επειδή

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{I(\lambda)\} \rightarrow f(\lambda), \quad (7.21)$$

θα δούμε ότι η διασπορά του $I(\lambda)$ δεν ελαττούται καθώς το N αυξάνει.

Έτσι το $I(\lambda)$ δεν είναι ένας συνεπής εκτιμητής του $f(\lambda)$. Στην επόμενη παράγραφο θα θεωρήσουμε εναλλακτικούς τρόπους εκτίμησης του φάσματος ισχύος που ουσιαστικά βασίζονται στην εξομάλυνση του περιοδογράμματος.

Θεωρούμε τώρα ότι οι παρατηρήσεις (X_1, \dots, X_N) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν μία κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. (Το αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε παρακάτω ισχύουν και για άλλες χρονοσειρές των οποίων οι παρατηρήσεις δεν ακολουθούν μία κανονική κατανομή με συνεχή φάσματα ισχύος, βλέπε *Bartlett, 1966, σ. 308*).

Από την (7.10) βλέπουμε ότι $\hat{\alpha}_j$ και $\hat{\beta}_j$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν μία κανονική κατανομή και επομένως οι μεταβλητές $\hat{\alpha}_j$ και $\hat{\beta}_j$ είναι κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.2) - (7.4) μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μία από τις μεταβλητές $\hat{\alpha}_j$ και $\hat{\beta}_j$ έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $2\sigma^2/N$ για $j \neq N/2$. Επιπλέον έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j\} &= 4 \text{cov}\left\{\left[\sum_{t=1}^N X_t \cos \lambda_j t\right], \left[\sum_{t=1}^N X_t \sin \lambda_j t\right]\right\} / N^2 \\ &= 4\sigma^2 \left[\sum_{t=1}^N \cos \lambda_j t \sin \lambda_j t\right] / N^2, \end{aligned}$$

επειδή οι μεταβλητές X_t είναι ανεξάρτητες. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (7.5), βλέπουμε ότι $\hat{\alpha}_j$ και $\hat{\beta}_j$ είναι ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές. Επειδή $\hat{\alpha}_j$, $\hat{\beta}_j$ ακολουθούν μία κανονική κατανομή με συντελεστή συσχέτισης 0 συνεπάγεται ότι $\hat{\alpha}_j$ και $\hat{\beta}_j$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως

$$\frac{N(\hat{\alpha}_j^2 + \hat{\beta}_j^2)}{2\sigma^2} = \frac{I(\lambda_j) \times 2\pi}{\sigma^2} \approx X_2^2$$

Τώρα η διασπορά της κατανομής X^2 με ν βαθμούς ελευθερίας είναι 2ν , έτσι ώστε

$$\text{Var}\left[I(\lambda_j)x\frac{2\pi}{\sigma^2}\right]=4 \quad \text{και} \quad \text{Var}[I(\lambda_j)]=\frac{\sigma^4}{\pi^2}.$$

Καθώς η διασπορά είναι μία σταθερά, δεν τείνει στο μηδέν για $N \rightarrow \infty$ και επομένως $I(\lambda)$ δεν είναι συνεπής εκτιμητής για την $f(\lambda)$. Επιπλέον μπορεί να δειχθεί ότι γειτονικές συντεταγμένες του περιοδογράμματος είναι ασυμπτωτικά ανεξάρτητες, το οποίο εξηγεί γιατί η συμπεριφορά του είναι πάρα πολύ ακανόνιστη. Για το λόγο αυτό το περιοδόγραμμα χρειάζεται να τροποποιηθεί για να επιτύχουμε ένα συνεπή εκτιμητή του φάσματος ισχύος.

7.8. Συνεπείς εκτιμητές του φάσματος ισχύος

Μία δημοφιλής μέθοδος εκτίμησης του φάσματος ισχύος βασίζεται στον υπολογισμό του μετασχηματισμού *Fourier* της συνάρτησης αυτοδιασποράς χρησιμοποιώντας ένα σύνολο «βαρών» τα οποία καλούνται «*παράθυρα καθυστέρησης*» (*lag windows*). Από την εξίσωση (7.19) έχουμε ότι το περιοδόγραμμα είναι ο διακριτός μετασχηματισμός *Fourier* του εκτιμητή της συνάρτησης αυτοδιασποράς. Αλλά είναι φανερό ότι η ακρίβεια των συντελεστών c_k ελαττούται καθώς το k αυξάνει, και επομένως θα ήταν λογικό να δώσουμε λιγότερο βάρος σε τιμές των c_k καθώς k αυξάνει. Ένας τέτοιος εκτιμητής ορίζεται ως εξής

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left\{ w_0 c_0 + 2 \sum_{k=1}^M w_k c_k \cos \lambda k \right\}, \quad (7.22)$$

όπου $\{w_k\}$ είναι το σύνολο των βαρών και $M (< N)$ είναι το σημείο αποκοπής των συντελεστών αυτοδιασποράς. Συγκρίνοντας την (7.22) με την (7.19) βλέπουμε ότι οι τιμές της c_k για $M < k < N$ δεν χρησιμοποιούνται πλέον, ενώ οι τιμές της c_k για $k \leq M$ πολλαπλασιάζονται με ένα συντελεστή βάρους w_k .

Για τη χρησιμοποίηση του εκτιμητή (7.22) χρειάζεται να εκλέξουμε ένα

κατάλληλο σύνολο "βαρών" κι ένα κατάλληλο σημείο αποκοπής. Δύο σύνολα βαρών που χρησιμοποιούνται συνήθως στην πράξη είναι

α) Σύνολο βαρών του Tukey

Το σύνολο αυτό βαρών δίνεται από τον τύπο

$$w_k = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi k}{M} \right] \quad \text{για} \quad k = 0, 1, \dots, M$$

β) Σύνολο βαρών του Parzen

Στην περίπτωση αυτή τα βάρη δίνονται από τη σχέση

$$w_k = \begin{cases} 1 - 6 \left[\frac{k}{M} \right]^2 + 6 \left[\frac{k}{M} \right]^3 & \text{για} \quad 0 \leq k \leq \frac{M}{2} \\ 2 \left[1 - \frac{k}{M} \right]^3 & \text{για} \quad \frac{M}{2} \leq k \leq M \end{cases}$$

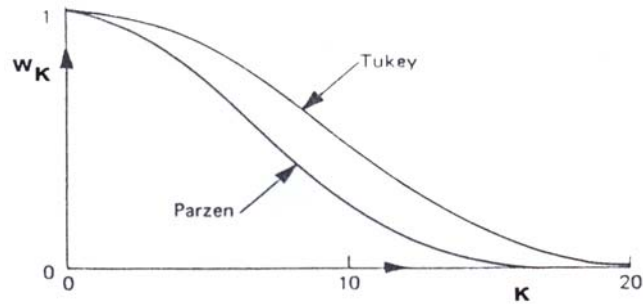
Τα σύνολα βαρών των *Parzen* και *Tukey* δίνουν λίγο-πολύ τον ίδιο εκτιμητή για το φάσμα ισχύος μιας δεδομένης χρονοσειράς. Το παράθυρο *Parzen* έχει ένα πλεονέκτημα σε σχέση με το παράθυρο *Tukey*, διότι δεν δίνει αρνητικούς εκτιμητές για το φάσμα ισχύος. Επίσης ισχύει ότι

$$\text{Var} \{ \hat{f}(\lambda) \} \approx \frac{M}{N} f^2(\lambda) \sum_k w_k^2$$

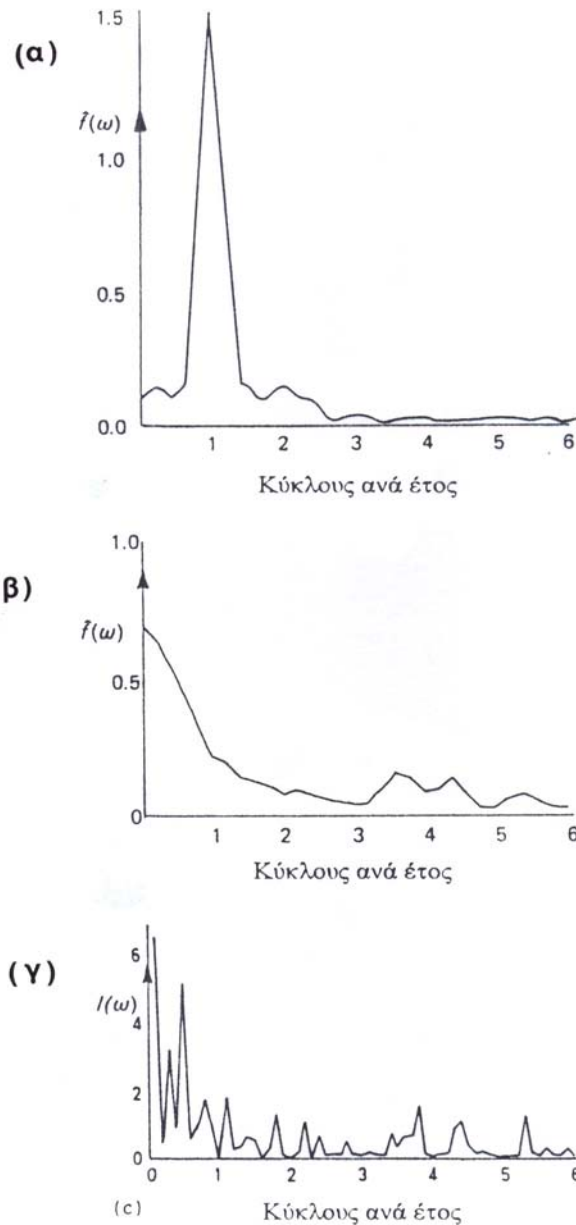
Η εκλογή του σημείου αποκοπής M είναι αρκετά δύσκολη, επειδή πρέπει να γίνει υποκειμενικά για να εξισορροπήσει ακρίβεια και διασπορά. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του M , τόσο μικρότερη θα είναι η διασπορά του $\hat{f}(\lambda)$ αλλά τόσο μεγαλύτερη θα είναι η μεροληψία. Αν M είναι πολύ μικρό, σπουδαία χαρακτηριστικά της $f(\lambda)$ μπορούν να εξαλειφθούν, ενώ αν M είναι πολύ μεγάλο η συμπεριφορά του

$\hat{f}(\lambda)$ γίνεται παρόμοια με την συμπεριφορά του περιοδογράμματος.

Επομένως μία συμβιβαστική τιμή για το M πρέπει να βρεθεί. Μία χρήσιμη προσέγγιση είναι να εκλέξουμε το M περίπου $2\sqrt{N}$, έτσι ώστε αν, για παράδειγμα N



Σχήμα 7.1. Τα παράθρα καθυστέρησης **Tukey** και **Parzen** για $M=20$.



Σχήμα 7.2. Φάσματα ισχύος για μέσες μηνιαίες μετρήσεις της θερμοκρασίας του αέρος στο Recife. (α) Για τα δεδομένα όπως είναι, (β) Για τα δεδομένα χωρίς εποχιακή μεταβολή χρησιμοποιώντας το παράθυρο Tukey με $M=24$. (γ) Το περιοδόγραμμα των δεδομένων χωρίς εποχιακή μεταβολή παριστάνεται γραφικά για σύγκριση.

είναι 100, τότε M θα είναι περίπου 20. Η εκλογή αυτή του M επιβεβαιώνει την ασυμπτωτική κατάσταση ότι καθώς $N \rightarrow \infty$, $\frac{M}{N} \rightarrow 0$. Jenkins και Watts (1968) προτείνουν να δοκιμάζονται τρεις διαφορετικές τιμές για το M στην πράξη. Η σχέση (7.22) μπορεί να υπολογισθεί για κάθε τιμή του λ στο διάστημα $(0, \pi)$, αλλά συνήθως υπολογίζεται σε ίσα διαστήματα στις συχνότητες

$\lambda_j = \frac{\pi j}{Q}$ για $j = 0, 1, \dots, Q$ όπου Q εκλέγεται αρκετά μεγάλο για να δείξει

όλα τα χαρακτηριστικά του $\hat{f}(\lambda)$. Το Q συχνά λαμβάνεται ίσο με το M . Η γραφική παράσταση του $\hat{f}(\lambda)$ συναρτήσει της λ μπορεί να γίνει και να μελετηθεί. Στο Σχ. 7.2 περιγράφεται το φάσμα ισχύος των μέσων μηνιαίων μετρήσεων της θερμοκρασίας του αέρος στο Recife (βλέπε Κεφ. 1, Σχ. 1.3). Στο Σχ. 7.2β περιγράφεται το φάσμα ισχύος των δεδομένων του Σχ. 1.3 όταν η εποχιακή μεταβολή έχει μετακινηθεί. Η ισχύς συγκεντρώνεται σε χαμηλές συχνότητες το οποίο δηλώνει μικράς διάρκειας συσχέτιση όπως στην περίπτωση ενός $AR(1)$ μοντέλου μ' ένα θετικό συντελεστή.

7.9. Μέθοδος εκτίμησης Hanning

Αυτή η μέθοδος εκτίμησης του φάσματος ισχύος είναι ισοδύναμη με την μέθοδο που χρησιμοποιεί το παράθυρο Tukey. Η εκτίμηση του φάσματος ισχύος με την μέθοδο Hanning γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο γίνεται ο υπολογισμός του μετασχηματισμού του συνημίτονου από τη σχέση

$$\hat{f}_1(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left\{ c_0 + 2 \sum_{k=1}^M c_k \cos \lambda k \right\} \quad (7.23)$$

Ο εκτιμητής που δίνεται από την (7.23) υπολογίζεται στις συχνότητες $\lambda_j = \frac{2\pi j}{M}$ για $j = 0, 1, \dots, M$. Αυτός ο εκτιμητής κατόπιν εξομαλύνεται

χρησιμοποιώντας τα βάρη $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ και κατ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε τον εκτιμητή

Hanning

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{4} \hat{f}_1\left(\lambda - \frac{2\pi}{M}\right) + \frac{1}{2} \hat{f}_1(\lambda) + \frac{1}{4} \hat{f}_1\left(\lambda + \frac{2\pi}{M}\right) \quad (7.24)$$

στις συχνότητες

$$\lambda_j = \frac{2\pi j}{M} \quad \text{για } j = 0, 2, \dots, (M-1).$$

Στην συχνότητα μηδέν και στην συχνότητα *Nyquist*, έχουμε

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2} \left[\hat{f}_1(0) + \hat{f}_1\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right]$$

$$\hat{f}(\pi) = \frac{1}{2} \left[\hat{f}_1(\pi) + \hat{f}_1\left(\pi - \frac{2\pi}{M}\right) \right]$$

Είναι εύκολο να δείξουμε τώρα ότι η μέθοδος *Hanning* είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο που χρησιμοποιεί το παράθυρο *Tukey*. Αντικαθιστώντας την (7.23) στην (7.24) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \left[c_0 + 2 \sum_{k=1}^P c_k \left\{ \frac{1}{4} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{P}\right)k + \frac{1}{2} \cos(\lambda)k + \frac{1}{4} \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{P}\right)k \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ c_0 + 2 \sum_{k=1}^P c_k \frac{1}{2} \cos \lambda k \left[1 + \cos \frac{\pi k}{P} \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ c_0 + 2 \sum_{k=1}^P w_k c_k \cos \lambda k \right\} \end{aligned}$$

όπου $P=M/2$.

Και οι δύο μέθοδοι αποφέρουν τους ίδιους εκτιμητές του φάσματος ισχύος και δεν έχει σημασία ποια από τις δύο μεθόδους χρησιμοποιούμε στην πράξη.

Μια άλλη μέθοδος είναι η μέθοδος *Hamming* που χρησιμοποιεί τα βάρη (0.23, 0.54, 0.23) στην (7.24) αντί των βαρών $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Στις συχνότητες $\lambda=0$ και $\lambda=\pi$ η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τα βάρη 0.54 και 0.46. Η μέθοδος *Hamming* δίνει παρόμοια αποτελέσματα με τη μέθοδο *Hanning*.

Στην πράξη, όταν το N είναι αρκετά μεγάλο, χρησιμοποιούμε το γρήγορο μετασχηματισμό *Fourier (Fast Fourier Transform)* για τον υπολογισμό των εκτιμητών του φάσματος ισχύος. Στην περίπτωση αυτή οι υπολογισμοί που απαιτούνται για τον εκτιμητή του φάσματος ισχύος ελαττώνονται από N^2 σε $N \log_2 N$.

Κεφάλαιο 8

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΕΣ

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την ανάλυση μιας μόνο χρονοσειράς. Στο Κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την περίπτωση που έχουμε δύο ή περισσότερες χρονοσειρές με στόχο να βρούμε την σχέση που υπάρχει μεταξύ τους.

8.1. Συνάρτηση Διασυσχέτισης

Υποθέτουμε ότι έχουμε N παρατηρήσεις για δύο μεταβλητές, X και Y , που λαμβάνονται σε μοναδιαία χρονικά διαστήματα για την ίδια χρονική περίοδο. Οι παρατηρήσεις σημειώνονται με $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$. Οι παρατηρήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν σαν μία πεπερασμένη πραγμάτωση (*finite realization*) μιας διακριτής στοχαστικής διεργασίας δύο συνιστωσών (X_t, Y_t) .

Για μία διεργασία δύο συνιστωσών, οι ροπές δευτέρας τάξης αποτελούνται από τις συναρτήσεις αυτοδιασποράς κάθε συνιστώσας, καθώς επίσης και από τη συνάρτηση συνδιασποράς μεταξύ των δύο συνιστωσών η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma_{XY}(t, k) = \text{Cov}(X_t, Y_{t+k}).$$

Θα θεωρήσουμε μόνο διεργασίες δύο συνιστωσών που είναι δευτέρας τάξης στάσιμες. Στην περίπτωση αυτή όλες οι ροπές μέχρι δευτέρας τάξης δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, το οποίο επιτρέπει την χρησιμοποίηση των ακόλουθων συμβολισμών

$$E(X_t) = \mu_X, \quad E(Y_t) = \mu_Y, \quad \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{XX}(k)$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_{YY}(k), \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma_{XX}(k).$$

Η συνάρτηση συνδιασποράς μεταξύ δύο χρονοσειρών διαφέρει από την συνάρτηση αυτοδιασποράς στο γεγονός ότι δεν είναι άρτια συνάρτηση, δηλ.

$$\gamma_{XY}(k) \neq \gamma_{YX}(-k).$$

Για τη συνάρτηση αυτή, όμως, ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\gamma_{XY}(k) = \gamma_{YX}(-k).$$

Η συνάρτηση διασυσχέτισης ορίζεται ως εξής :

$$R_{XY}(k) = E\{X_t Y_{t+k}\}.$$

Η συνάρτηση αυτή θα είναι ίση με την συνάρτηση συνδιασποράς αν $\mu_X = 0$ ή $\mu_Y = 0$.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε και να ορίσουμε την συνάρτηση διασυσχέτισης μεταξύ των δύο χρονοσειρών. Η συνάρτηση αυτή δίνεται από την σχέση

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sqrt{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0)}} \quad (8.1)$$

και περιγράφει την συσχέτιση μεταξύ των χρονοσειρών X_t και Y_{t+k} . Ο συντελεστής διασυσχέτισης έχει τις εξής ιδιότητες

$$(i) \quad \rho_{XY}(k) = \rho_{YX}(-k).$$

$$(ii) \quad |\rho_{XY}(k)| \leq 1$$

Όπως είναι γνωστό οι συναρτήσεις $\rho_{XX}(0)$ και $\rho_{YY}(0)$ είναι ίσες με την μονάδα, αλλά η $\rho_{XY}(0)$ δεν είναι υποχρεωτικά ίση με τη μονάδα, όπως προκύπτει

από την σχέση (8.1). Δίνουμε τώρα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.1. Υποθέτουμε ότι οι χρονοσειρές $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$X_t = Z_t$$

$$Y_t = 0.5Z_{t-1} + 0.5Z_{t-2},$$

όπου $\{Z_t\}$ είναι μία καθαρώς τυχαία διεργασία με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2 . Να μελετηθεί η συνάρτηση διασυσχέτισης των X_t και Y_t .

Από τον ορισμό της συνάρτησης συνδιασποράς μεταξύ X_t και Y_t έχουμε

$$\gamma_{XY}(k) = \text{cov}\{X_t, Y_{t+k}\} = \begin{cases} 0.5\sigma_z^2 & k = 1, 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς οι διασπορές των δύο συνιστωσών δίνονται από τις σχέσεις

$$\gamma_{XX}(0) = \sigma_z^2 \quad \text{και} \quad \gamma_{YY}(0) = \frac{\sigma_z^2}{2}$$

Από τον τύπο της συνάρτησης διασυσχέτισης έχουμε

$$\rho_{XY}(k) = \frac{\gamma_{XY}(k)}{\sqrt{\gamma_{XX}(0)\gamma_{YY}(0)}} = \begin{cases} 0.5\sqrt{2} & k = 1, 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παράδειγμα 8.2. Υποθέτουμε ότι

$$X_t = Z_{1,t} \quad \text{και} \quad Y_t = X_{t-d} + Z_{2,t}$$

όπου $\{Z_{1,t}\}$ και $\{Z_{2,t}\}$ είναι ασυσχέτιστες καθαρώς τυχαίες ανεξίτητες με μέση τιμή θ και διασπορά σ_z^2 και d είναι ένας ακέραιος αριθμός. Να μελετηθεί ο συντελεστής διασυσχέτισης μεταξύ των X_t και Y_t .

Για τη συνάρτηση συνδιασποράς μεταξύ των X_t και Y_t έχουμε

$$\gamma_{XY}(k) = \begin{cases} \sigma_z^2 & k = d \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις αυτοδιασποράς των X_t και Y_t δίνονται από τις σχέσεις

$$\gamma_{XX}(0) = \sigma_z^2 \text{ και } \gamma_{YY}(0) = 2\sigma_z^2$$

Επομένως

$$\rho_{XY}(k) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & k = d \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

8.2. Εκτίμηση της συνάρτησης διασυσχέτισης.

Θεωρούμε ότι έχουμε N ζευγάρια παρατηρήσεων $\{(X_i, Y_i), i=1, \dots, N\}$. Ο εκτιμητής της συνάρτησης συνδιασποράς μεταξύ των X_t και Y_t υπολογίζεται ως εξής

$$c_{XY}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-|k|} (X_i - \bar{X})(Y_{i+k} - \bar{Y}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)$$

και επομένως ο εκτιμητής της συνάρτησης διασυσχέτισης θα δίνεται από τη σχέση

$$r_{XY}(k) = \frac{c_{XY}(k)}{\sqrt{c_{XX}(0)c_{YY}(0)}}, \quad (8.2)$$

όπου $c_{XY}(0)$ και $c_{YY}(0)$ είναι οι εκτιμητές των διασπορών των χρονοσειρών

X_t και Y_t αντίστοιχα.

Μπορεί ναδειχθεί ότι ο εκτιμητής (8.2) είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος και συνεπής. Επίσης μπορεί ναδειχθεί ότι διαδοχικοί εκτιμητές συσχετίζονται μεταξύ τους. Επιπλέον η διασπορά του εκτιμητού (8.2) εξαρτάται από τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των δύο συνιστωσών. Έτσι για σχετικά μεγάλες τιμές του N (N περίπου 100) είναι δυνατό οι δύο χρονοσειρές, αν και ασυσχέτιστες, να παρουσιάσουν μεγάλους συντελεστές διασυσχέτισης οι οποίοι στην πραγματικότητα δεν είναι αληθείς. Για αυτό οι δύο χρονοσειρές προτού υπολογισθεί η συνάρτηση διασυσχέτισης πρέπει να φιλτραρισθούν (βλέπε *Jenkins and Watts, 1968, σελ. 340*). Για δύο φιλτραρισμένες ασυσχέτιστες χρονοσειρές μπορεί ναδειχθεί ότι

$$E\{r_{XY}(k)\} \cong 0 \text{ και } Var\{r_{XY}(k)\} \cong 1/N$$

Τιμές του εκτιμητού $r_{XY}(k)$ έξω από το διάστημα $\pm 2/\sqrt{N}$ είναι σημαντικά διάφορες του μηδενός.

8.3. Η διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας.

Η διαφασματική συν. πυκνότητας χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συσχέτισης μεταξύ δύο χρονοσειρών στο πεδίο συχνοτήτων.

Η διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται ως εξής

$$g_{XY}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{XY}(k) e^{-i\lambda k} \right] \quad (8.3)$$

Προφανώς η $g_{XY}(\lambda)$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση επειδή η $\gamma_{XY}(k)$ δεν είναι άρτια συνάρτηση.

Η αντίστροφη σχέση της (8.3) μας δίνει την συνάρτηση συνδιασποράς σαν συνάρτηση της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας, δηλαδή

$$\gamma_{XY}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} g_{XY}(\lambda) d\lambda \quad (8.4)$$

Η $g_{XY}(\lambda)$ μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή

$$g_{XY}(\lambda) = c(\lambda) - iq(\lambda),$$

όπου

$$c(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{XY}(k) \cos \lambda k = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_{XY}(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \{ \gamma_{XY}(k) + \gamma_{YX}(k) \} \cos \lambda k \right]$$

είναι το πραγματικό μέρος της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητα, και

$$q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{XY}(k) \sin \lambda k = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \{ \gamma_{XY}(k) - \gamma_{YX}(k) \} \sin \lambda k \right]$$

είναι το μιγαδικό μέρος της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας με ένα αρνητικό πρόσημο.

Ένας εναλλακτικός τρόπος έκφρασης της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας είναι ο εξής

$$g_{XY}(\lambda) = a_{XY}(\lambda) e^{i\phi_{XY}(\lambda)},$$

όπου

$$a_{XY}(\lambda) = \sqrt{c^2(\lambda) + q^2(\lambda)} \quad \text{είναι το μέτρο}$$

$$\text{και} \quad \phi_{XY}(\lambda) = \tan^{-1} \{ -q(\lambda) / c(\lambda) \} \quad \text{είναι η φάση.}$$

Μια άλλη χρήσιμη συνάρτηση που σχετίζεται με τη διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας είναι ο συντελεστής συνάφειας που ορίζεται από την σχέση

$$|C(\lambda)|^2 = [c^2(\lambda) + q^2(\lambda)] / g_{XX}(\lambda) g_{YY}(\lambda), \quad (8.5)$$

όπου $g_{XX}(\lambda)$ και $g_{YY}(\lambda)$ είναι τα φάσματα ισχύος των χρονοσειρών X_t και Y_t αντίστοιχα. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$0 \leq |C(\lambda)|^2 \leq 1$$

Ο συντελεστής συνάφειας μετράει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο συνιστωσών της διεργασίας δύο συνιστωσών ανέλιξης στην συχνότητα λ . Όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι ο συντελεστής συνάφειας, τόσο περισσότερο συσχετίζονται οι δύο χρονοσειρές.

Μια άλλη χρήσιμη συνάρτηση είναι η συνάρτηση κέρδους που ορίζεται ως εξής

$$G_{XY}(\lambda) = \sqrt{\frac{g_{YY}(\lambda)|C(\lambda)|^2}{g_{XX}(\lambda)}} = \frac{a_{XY}(\lambda)}{g_{XX}(\lambda)}$$

Σε πρακτικά προβλήματα άλλες φορές είναι χρήσιμο να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις $|C(\lambda)|^2$, $\phi_{XY}(\lambda)$ και $\alpha_{XY}(\lambda)$, κι άλλες φορές τις συναρτήσεις $|C(\lambda)|^2$, $\phi_{XY}(\lambda)$ και $G_{XY}(\lambda)$.

Παράδειγμα 8.1 (συνέχεια). Να υπολογισθεί η διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας, καθώς επίσης και οι συναρτήσεις $c(\lambda)$, $q(\lambda)$, $\alpha_{XY}(\lambda)$, $\phi_{XY}(\lambda)$, $|C(\lambda)|^2$ και $G_{XY}(\lambda)$.

Από τον τύπο της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας έχουμε

$$g_{XY}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{XY}(k) e^{-i\lambda k} = [0.5\sigma_z^2 e^{-i\lambda} + 0.5\sigma_z^2 e^{-2i\lambda}] / 2\pi,$$

και επομένως

$$c(\lambda) = 0.5\sigma_z^2 (\cos \lambda + \cos 2\lambda) / 2\pi \quad \text{και} \quad q(\lambda) = 0.5\sigma_z^2 (\sin \lambda + \sin 2\lambda) / 2\pi.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το μέτρο και τη φάση της μιγαδικής συνάρτησης $g_{XY}(\lambda)$. Για το μέτρο έχουμε

$$\alpha_{XY}(\lambda) = \frac{0.5\sigma_z^2}{2\pi} \sqrt{(\cos \lambda + \cos 2\lambda)^2 + (\sin \lambda + \sin 2\lambda)^2}$$

$$= \frac{0.5\sigma_z^2}{2\pi} \cos(\lambda/2), \quad \text{μετά από μερικές πράξεις.}$$

Για τη φάση βρίσκουμε

$$\tan \phi_{XY}(\lambda) = -(\sin \lambda + \sin 2\lambda) / (\cos \lambda + \cos 2\lambda)$$

Τα φάσματα ισχύος των χρονοσειρών X_t και Y_t δίνονται από τις σχέσεις

$$g_{XX}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \quad \text{και} \quad g_{YY}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \cos^2(\lambda/2),$$

και επομένως $|C(\lambda)|^2 = 1$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in (-\pi, \pi]$.

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση κέρδους παίρνει την μορφή

$$G_{XY}(\lambda) = \sqrt{\frac{g_{YY}(\lambda)}{g_{XX}(\lambda)}} \cos(\lambda/2).$$

Παράδειγμα 8.2 (συνέχεια). Να υπολογισθούν οι συναρτήσεις $g_{XY}(\lambda)$, $a_{XY}(\lambda)$, $\phi_{XY}(\lambda)$, $|C(\lambda)|^2$ και $G_{XY}(\lambda)$.

Αν εργαστούμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα βρίσκουμε

$$g_{XY}(\lambda) = \sigma_z^2 e^{-i\lambda d} / 2\pi, c(\lambda) = \sigma_z^2 \cos \lambda d / 2\pi, q(\lambda) = \sigma_z^2 \sin \lambda d / 2\pi,$$

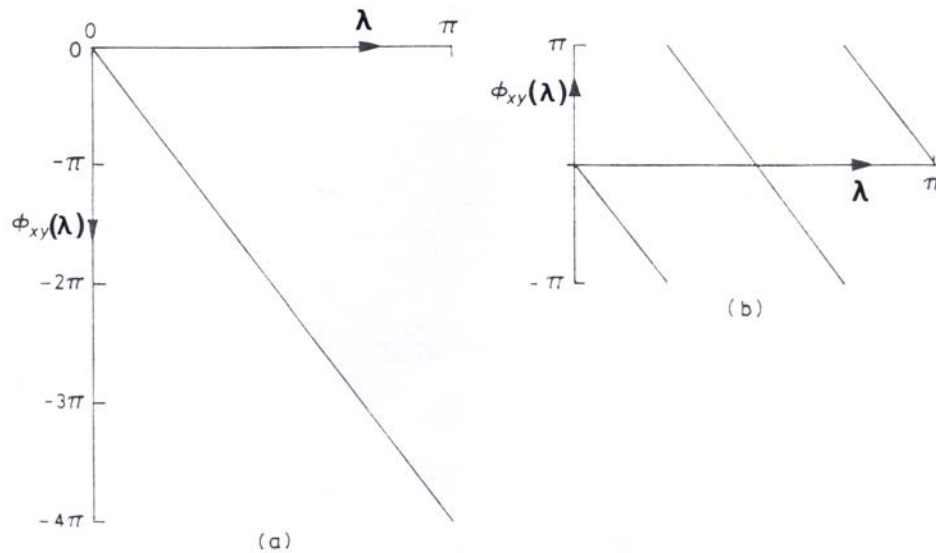
$$a_{XY}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} \text{ και } \tan \phi_{XY}(\lambda) = -\tan \lambda d.$$

Επιπλέον, επειδή $g_{XX}(\lambda) = \sigma_z^2 / 2\pi$ και $g_{YY}(\lambda) = 2\sigma_z^2 / 2\pi$ συνεπάγεται ότι

$$|C(\lambda)|^2 = 1/2 \text{ και } G_{XY}(\lambda) = 1$$

Η συνάρτηση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο παράδειγμα αυτό είναι η φάση, η οποία είναι μία ευθεία γραμμή με κλίση $(-d)$. Από την θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων γνωρίζουμε ότι η φάση είναι ακαθόριστη κατά ένα πολλαπλάσιο του 2π . Αυτή η φανερή μη-μοναδικότητα κάνει τη γραφική παράσταση δύσκολη. Η φάση είναι συνήθως μηδέν στην συχνότητα $\lambda=0$ και είναι συνεχής συνάρτηση του λ στο διάστημα $(0, \pi]$. Όταν η φάση είναι απεριόριστη και παριστάνεται γραφικά συναρτήσει του λ , η γραφική της παράσταση μοιάζει σαν αυτή του Σχ. 8.1(α). Αν, όμως, η φάση περιορισθεί στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (κύριες τιμές) τότε η γραφική παράσταση μοιάζει σαν αυτή του Σχ. 8.1(β), όπου η κλίση κάθε ευθείας είναι $(-d)$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιείται συχνά στον προσδιορισμό σχέσεων μεταξύ χρονοσειρών. Αν η υπολογιζόμενη φάση προσεγγίζει μία ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε το γεγονός αυτό δηλώνει μία καθυστέρηση μεταξύ των δύο χρονοσειρών που είναι ίση με την κλίση της ευθείας.



Σχήμα 8.1. Η φάση του Παραδείγματος 8.2 που υπολογίζεται για (α) φάση απεριόριστη και (β) φάση περιορισμένη.

8.4. Εκτίμηση της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας.

Για την εκτίμηση της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας εργαζόμαστε ως εξής :

Βρίσκουμε πρώτα ένα εκτιμητή του πραγματικού μέρους από την σχέση

$$\begin{aligned} \hat{c}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M w_k c_{XY}(k) \cos \lambda k \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[w_0 c_{XY}(0) + \sum_{k=1}^M w_k \{c_{XY}(k) + c_{XY}(-k)\} \cos \lambda k \right], \end{aligned}$$

όπου M είναι το σημείο αποκοπής και $\{w_k\}$ είναι το παράθυρο καθυστέρησης.

Κατόπιν βρίσκουμε έναν εκτιμητή για το φανταστικό μέρος από τη σχέση

$$\begin{aligned} \hat{q}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^M w_k c_{XY}(k) \sin \lambda k \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^M w_k \{c_{XY}(k) - c_{XY}(-k)\} \sin \lambda k \right], \end{aligned}$$

Η εκλογή του σημείου αποκοπής M και του παραθύρου καθυστέρησης $\{w_k\}$, γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του φάσματος ισχύος μιας χρονοσειράς.

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε για να υπολογίσουμε εκτιμητές του μέτρου, της φάσης και του συντελεστή συνάφειας. Οι εκτιμητές αυτοί υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\hat{\alpha}_{XY}(\lambda) = \sqrt{\hat{c}^2(\lambda) + \hat{q}^2(\lambda)}, \quad \tan \hat{\phi}_{XY}(\lambda) = -\hat{q}(\lambda)/\hat{c}(\lambda)$$

$$\text{και} \quad |\hat{C}(\lambda)|^2 = (\hat{\alpha}_{XY}^2(\lambda) / \hat{g}_{XX}(\lambda) \hat{g}_{YY}(\lambda))^{1/2}$$

Μια εναλλακτική μέθοδος εκτίμησης της διαφ. συνάρτησης πυκνότητας βασίζεται στην εξομάλυνση του περιοδογράμματος μεταξύ δύο χρονοσειρών. Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως εξής

$$I_{XY}(\lambda_j) = \frac{1}{2\pi N} \left[\sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{i\lambda_j t} \right] \left[\sum_{t=0}^{N-1} Y_t e^{i\lambda_j t} \right]$$

Επίσης, επειδή είναι μία μιγαδική συνάρτηση, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$I_{XY}(\lambda_j) = A(\lambda_j) - iB(\lambda_j)$$

Το περιοδόγραμμα $I_{XY}(\lambda_j)$ δεν είναι συνεπής εκτιμητής της $g_{XY}(\lambda_j)$ και επομένως χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο εξομάλυνσης για να βελτιώσουμε τις ιδιότητες του. Αυτό γίνεται ως εξής:

$$\hat{A}(\lambda_j) = \frac{1}{4} A(\lambda_j - \frac{2\pi}{M}) + \frac{1}{2} A(\lambda_j) + \frac{1}{4} A(\lambda_j + \frac{2\pi}{M})$$

$$\hat{B}(\lambda_j) = \frac{1}{4} B(\lambda_j - \frac{2\pi}{M}) + \frac{1}{2} B(\lambda_j) + \frac{1}{4} B(\lambda_j + \frac{2\pi}{M})$$

$$\hat{A}(0) = \frac{1}{2} \left[A(0) + A\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right]$$

και

$$A(\pi) = \frac{1}{2} \left[A\left\{ \pi - \frac{2\pi}{M} \right\} + A(\pi) \right],$$

όπου $\lambda_j = \frac{2\pi j}{M}$, $j = 0, 1, \dots, M$.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως μέθοδος *Hanning*. Με την εφαρμογή της επιτυγχάνουμε ένα καλύτερο εκτιμητή για τη διαφασματική συν. πυκνότητας ο οποίος βασίζεται στο περιοδόγραμμα μεταξύ δύο χρονοσειρών.

Η διαφασματική ανάλυση είναι μία τεχνική που εξετάζει τη σχέση μεταξύ δύο χρονοσειρών σε μία περιοχή συχνοτήτων. Στην ανάλυση αυτή, πιθανόν, η πιο χρήσιμη συνάρτηση είναι ο συντελεστής συνάφειας που δίνει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο χρονοσειρών σε κάθε συχνότητα.

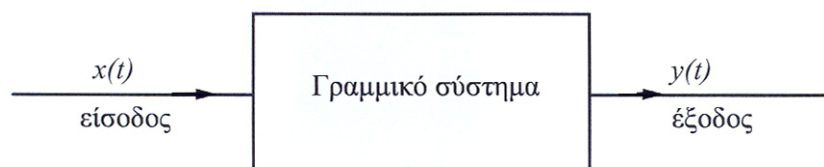
Οι άλλες συναρτήσεις, όπως η συνάρτηση κέρδους και η φάση, θα κατανοηθούν καλύτερα στο επόμενο κεφάλαιο όπου γίνεται συζήτηση για τα γραμμικά συστήματα.

Κεφάλαιο 9

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

9.1. Εισαγωγή

Ένα σπουδαίο πρόβλημα στις φυσικές επιστήμες και στους μηχανικούς είναι εκείνο που έχει σχέση με τον προσδιορισμό ενός μοντέλου για ένα φυσικό σύστημα όταν η είσοδος και η έξοδος του συστήματος δίνονται. Υποθέτουμε ότι το σύστημά μας μπορεί επαρκώς να προσεγγιστεί από ένα γραμμικό σύστημα του οποίου οι παράμετροι δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο, αν και πρόσφατα έχει αυξηθεί το ενδιαφέρον για χρονικά μεταβαλλόμενα και μη-γραμμικά συστήματα. Περιγραφές τέτοιων συστημάτων δίνονται στους *Astrom & Eykhoff* (1971) και *Eykhoff* (1974).



Θα σημειώνουμε με $\{X_i\}$ και $\{Y_i\}$ την είσοδο και την έξοδο στο σύστημα στη διακριτή περίπτωση, και με $\{X(t)\}$, $\{Y(t)\}$ στη συνεχή περίπτωση. Ένα γραμμικό σύστημα ορίζεται ως εξής :

Υποθέτουμε ότι $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ είναι έξοδοι του συστήματος που αντιστοιχούν στις εισόδους $X_1(t)$, $X_2(t)$ αντίστοιχα. Το σύστημα λέγεται γραμμικό τότε και μόνο τότε, αν ο γραμμικός συνδυασμός της μορφής $\lambda_1 X_1(t) + \lambda_2 X_2(t)$ στην είσοδο, παράγει τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό της μορφής $\lambda_1 Y_1(t) + \lambda_2 Y_2(t)$ στην έξοδο, όπου λ_1 και λ_2 είναι σταθερές.

Τα γραμμικά συστήματα που θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι

χρονικώς αμετάβλητα (*time-invariant*). Ένα χρονικώς αμετάβλητο σύστημα ορίζεται ως εξής :

Θεωρούμε ότι η είσοδος $X(t)$ ενός γραμμικού συστήματος παράγει την έξοδο $Y(t)$. Το σύστημα θα λέγεται χρονικώς αμετάβλητο αν μία χρονική καθυστέρηση τ στην είσοδο, παράγει την ίδια καθυστέρηση στην έξοδο. Με άλλα λόγια, η $X(t-\tau)$ παράγει στην έξοδο την $Y(t-\tau)$, έτσι ώστε η σχέση εισόδου-εξόδου να μην μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Η μελέτη των γραμμικών συστημάτων δεν είναι μόνο χρήσιμη στην εξέταση της σχέσης μεταξύ δύο διαφορετικών σημάτων (χρονοσειρών), αλλά και στην εξέταση των ιδιοτήτων των φίλτρων που χρησιμοποιούνται στην αφαίρεση της κλίσης όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

9.2. Γραμμικά συστήματα στο πεδίο τιμών του χρόνου.

Ένα χρονικώς αμετάβλητο γραμμικό σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)du \quad (9.1)$$

στη συνεχή περίπτωση, ή

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k X_{t-k} \quad (9.2)$$

στη διακριτή περίπτωση.

Η συνάρτηση $h(u)$ στη συνεχή περίπτωση ή η ακολουθία $\{h_k\}$ στη διακριτή περίπτωση, παρέχει μία περιγραφή του συστήματος στο πεδίο τιμών του χρόνου. Η συνάρτηση αυτή καλείται κρουστική συνάρτηση απόκρισης για λόγους που θα γίνουν φανεροί αργότερα.

Είναι φανερό ότι οι σχέσεις (9.1) και (9.2) είναι γραμμικές. Η συνάρτηση $h(u)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο επειδή το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο. Το σύστημα θα λέγεται φυσικώς πραγματοποιήσιμο (*physically realisable*) αν $h(u) = 0$ ($u < 0$) και $h_k = 0$ ($k < 0$).

Θα ασχοληθούμε μόνο με ευσταθή (*stable*) συστήματα για τα οποία μία πεπερασμένη είσοδος παράγει μία πεπερασμένη έξοδο, αν και οι μηχανικοί συχνά ασχολούνται με τον έλεγχο ασταθών συστημάτων. Μία επαρκής συνθήκη για να είναι ένα σύστημα ευσταθές είναι η εξής

$$\sum_k |h_k| < C$$

όπου C είναι μία πεπερασμένη σταθερά.

Η κρουστική συνάρτηση απόκρισης περιγράφει πως η έξοδος σχετίζεται με την είσοδο σ' ένα γραμμικό σύστημα. Το όνομα κρουστική απόκριση προέρχεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση περιγράφει την απόκριση του συστήματος στην επίδραση της εισόδου.

9.3. Η βηματική συνάρτηση απόκρισης

Ένας εναλλακτικός, ισοδύναμος τρόπος περιγραφής ενός γραμμικού συστήματος στο πεδίο τιμών του χρόνου μπορεί να γίνει με την βοήθεια της συνάρτησης η οποία καλείται βηματική συνάρτηση απόκρισης και η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$S(t) = \int_{-\infty}^t h(u) du \quad (9.3)$$

στη συνεχή περίπτωση, και

$$S_t = \sum_{k \leq t} h_k \quad (9.4)$$

στη διακριτή περίπτωση.

Το όνομα βηματική απόκριση προέρχεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση περιγράφει την απάντηση του συστήματος σε μία μοναδιαία βηματική αλλαγή στην είσοδο. Για παράδειγμα, στη διακριτή περίπτωση, υποθέτουμε ότι η είσοδος δίνεται από τη σχέση

$$x_t = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

και επομένως

$$Y_t = \sum_k h_k X_{t-k} = \sum_{k \leq t} h_k = S_k,$$

έτσι ώστε η έξοδος είναι ίση με την βηματική συνάρτηση απόκρισης. Οι μηχανικοί μερικές φορές χρησιμοποιούν τη σχέση αυτή για να μετρήσουν τις ιδιότητες ενός φυσικώς πραγματοποιήσιμου συστήματος. Η είσοδος κρατείται σταθερά για κάποιο χρονικό διάστημα και σε κάποια χρονική στιγμή μία μοναδιαία βηματική αλλαγή πραγματοποιείται στην είσοδο. Η έξοδος παρατηρείται κατόπιν και αυτό παρέχει ένα εκτιμητή της βηματικής συνάρτησης απόκρισης και επομένως της παραγώγου της που είναι η κρουστική συνάρτηση απόκρισης.

Η βηματική συνάρτηση απόκρισης για ένα εκθετικό σύστημα με καθυστέρηση δίνεται από την σχέση

$$S(t) = g[1 - e^{-(t-\tau)/\tau}] \quad (t > \tau) \quad (9.5)$$

και η γραφική παράσταση της $Y(t)$ στο Σχήμα 9.1 παριστάνει επίσης την $S(t)$.

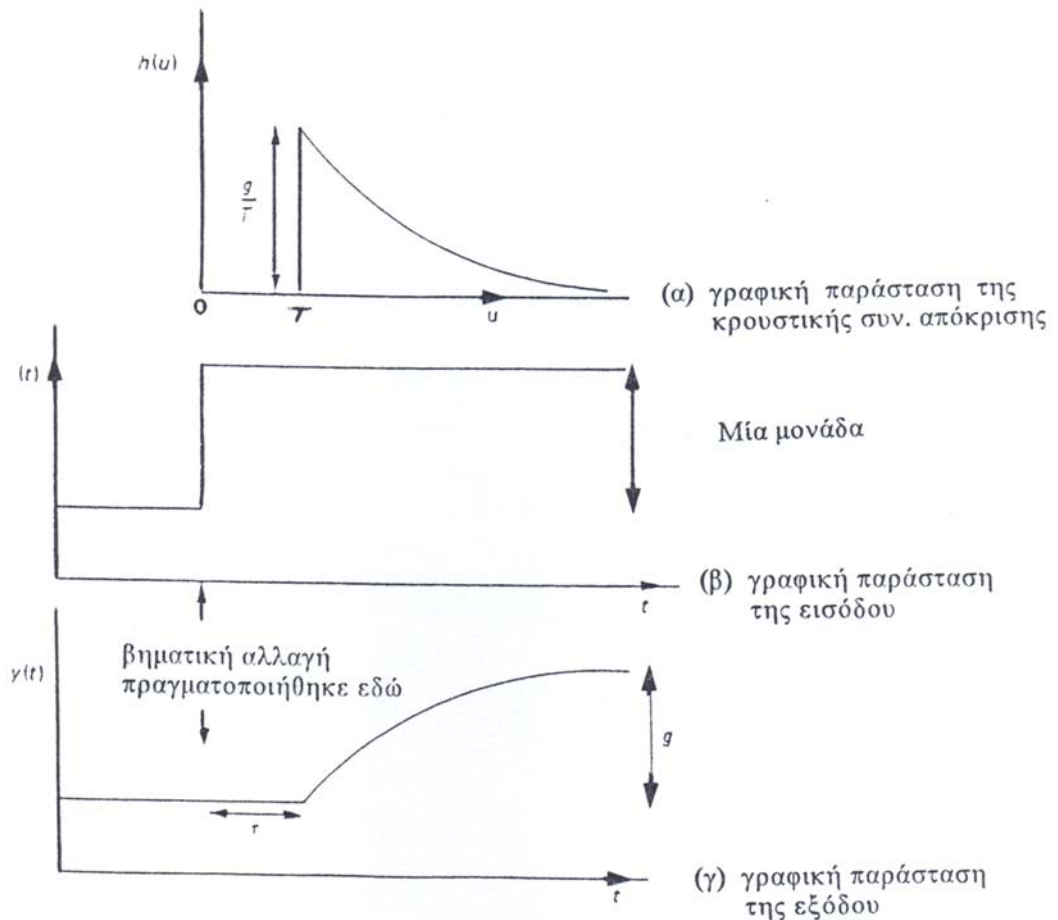
Μπορούμε να δώσουμε μερικά παραδείγματα. Τα γραμμικά φίλτρα που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο αποτελούν παραδείγματα γραμμικών συστημάτων. Για παράδειγμα το φίλτρο

$$Y_t = (X_{t-1} + X_t + X_{t+1})/3$$

έχει κρουστική συνάρτηση απόκρισης

Μπορούμε να δώσουμε μερικά παραδείγματα. Τα γραμμικά φίλτρα που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο αποτελούν παραδείγματα γραμμικών συστημάτων. Για παράδειγμα το φίλτρο

$$Y_t = (X_{t-1} + X_t + X_{t+1})/3$$



Σχήμα 9.1. Μία εκθετική απόκριση με καθυστέρηση σε μία μοναδιαία βηματική αλλαγή στην είσοδο.

έχει κρουστική συνάρτηση απόκρισης

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ας σημειωθεί ότι το φίλτρο αυτό δεν είναι φυσικώς πραγματοποιήσιμο, αν και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα φίλτρο εξομάλυνσης. Μία άλλη γενική ομάδα γραμμικών συστημάτων είναι εκείνα που εκφράζονται ως διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές σε συνεχή χρόνο. Για παράδειγμα, αν T είναι μια σταθερά, τότε η εξίσωση

$$T \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = X(t),$$

δίνει μία περιγραφή ενός γραμμικού συστήματος. Στη διακριτή περίπτωση, το αντίστοιχο των διαφορικών εξισώσεων είναι οι εξισώσεις διαφορών που δίνονται από τη σχέση

$$Y_t + \alpha_1 \Delta Y_t + \alpha_2 \Delta Y_t^2 + \dots = \beta_0 X_t + \beta_1 \Delta X_t + \dots, \quad (9.6)$$

όπου $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. Η εξίσωση (9.6) μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή

$$Y_t = b_1 Y_{t-1} + b_2 Y_{t-2} + \dots + c_0 X_t + c_1 X_{t-1} + \dots \quad (9.7)$$

Είναι φανερό ότι η εξίσωση (9.7) μπορεί να τεθεί στην μορφή (9.2) με διαδοχικές αντικαταστάσεις. Για παράδειγμα, αν $Y_t = \frac{1}{2} Y_{t-1} + X_t$ τότε $Y_t = X_t + \frac{1}{2} X_{t-1} + \frac{1}{4} X_{t-2} + \dots$ έτσι ώστε η κρουστική συνάρτηση απόκρισης παίρνει τη μορφή

$$h_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k = 0, 1 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Δύο πολύ απλά γραμμικά συστήματα είναι τα εξής : $Y_t = X_{t-d}$, δηλ. ένα μοντέλο με απλή καθυστέρηση, όπου ο ακέραιος d συμβολίζει το χρόνο καθυστέρησης, και $Y_t = gX_t$, δηλ. ένα μοντέλο με απλό κέρδος, όπου η σταθερά g ονομάζεται κέρδος.

Οι κρουστικές συναρτήσεις απόκρισης των συστημάτων αυτών δίνονται από τις σχέσεις

$$h_k = \begin{cases} 1 & k = d \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$h_k = \begin{cases} g & k = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

αντίστοιχα.

Μία σπουδαία ομάδα κρουστικών συναρτήσεων απόκρισης, η οποία συχνά παρέχει μία λογική προσέγγιση σε φυσικά πραγματοποιήσιμα συστήματα, έχει την μορφή

$$h(u) = \begin{cases} [ge^{-(u-\tau)}]/T & u > \tau \\ 0 & u < \tau \end{cases}$$

Η συνάρτηση του τύπου αυτού καλείται εκθετική συνάρτηση με καθυστέρηση, και εξαρτάται από τρεις σταθερές g , T και τ . Η σταθερά τ καλείται καθυστέρηση. Όταν $\tau=0$ έχουμε απλή εκθετική απόκριση. Η σταθερά g καλείται το κέρδος και αντιπροσωπεύει την τελική αλλαγή στην έξοδο όταν μία βηματική αλλαγή μοναδιαίου μεγέθους λαμβάνει χώρα στην είσοδο. Η σταθερά T ρυθμίζει το ρυθμό με τον οποίο η έξοδος μεταβάλλεται. Μία γραφική περιγραφή της συνάρτησης αυτής δίνεται στο Σχήμα 9.1.

9.4. Συνάρτηση μεταφοράς.

Ένας εναλλακτικός τρόπος περιγραφής ενός γραμμικού συστήματος μπορεί να γίνει στο πεδίο συχνοτήτων με την βοήθεια της συνάρτησης μεταφοράς (*transfer function*) η οποία ορίζεται ως εξής

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du \quad (0 < \lambda < \infty) \quad (9.8)$$

σε συνεχή χρόνο, και

$$H(\lambda) = \sum_k h_k e^{-i\lambda k} \quad (0 < \lambda < \pi) \quad (9.9)$$

σε διακριτό χρόνο.

Από την (9.8) βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της κρουστικής συνάρτησης απόκρισης. Η συνάρτηση μεταφοράς και η

κρουστική συνάρτηση απόκρισης είναι ισοδύναμοι τρόποι περιγραφής ενός γραμμικού συστήματος. Θα δούμε ότι, σε μερικές περιπτώσεις, η $H(\lambda)$ είναι πολύ πιο χρήσιμη από την $h(u)$.

Θεώρημα 9.1. Ένα ημιτονοειδές κύμα που λαμβάνεται σαν είσοδος σε ένα γραμμικό σύστημα, στην περίπτωση της σταθεράς κατάστασης (*steady state*), παράγει ένα ημιτονοειδές κύμα στην ίδια συχνότητα, στην έξοδο. Το πλάτος του ημιτονοειδούς κύματος μπορεί να αλλάζει και μπορεί επίσης να υπάρχει μία μετατόπιση της φάσης.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνεχή περίπτωση. Η απόδειξη στη διακριτή περίπτωση είναι παρόμοια.

Έστω ότι η είσοδος στο γραμμικό σύστημα, με κρουστική συνάρτηση απόκρισης $h(u)$, δίνεται από τη σχέση

$$X(t) = \cos \lambda t, \quad \text{για κάθε } t.$$

Τότε η έξοδος θα δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cos \lambda(t-u) du \quad (9.10)$$

Επειδή $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ έχουμε

$$Y(t) = \cos \lambda t \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cos \lambda u du + \sin \lambda t \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \sin \lambda u du$$

Καθώς τα δύο ολοκληρώματα δεν εξαρτώνται από το χρόνο t , είναι φανερό ότι η έξοδος $Y(t)$ είναι ένα μίγμα όρων από ημίτονα και συνημίτονα στη συχνότητα λ . Έτσι η έξοδος είναι μία ημιτονοειδή διατάραξη στην ίδια συχνότητα λ , όπως και η είσοδος. Αν γράψουμε τώρα

$$A(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cos \lambda u du \quad \text{και} \quad B(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \sin \lambda u du$$

$$G(\lambda) = \sqrt{A^2(\lambda) + B^2(\lambda)} \quad (9.11)$$

και

$$\tan \varphi(\lambda) = -B(\lambda)/A(\lambda), \quad (9.12)$$

τότε

$$Y(t) = A(\lambda)\cos \lambda t + B(\lambda)\sin \lambda t = G(\lambda)\cos\{\lambda t + \varphi(\lambda)\} \quad (9.13)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το συνημιτονοειδές κύμα ενισχύεται κατά ένα παράγοντα $G(\lambda)$, ο οποίος καλείται το κέρδος του συστήματος. Η εξίσωση επίσης δείχνει ότι το συνημιτονοειδές κύμα μετατοπίζεται κατά μία γωνία $\varphi(\lambda)$ η οποία καλείται η μετατόπιση της φάσης. Από την εξίσωση (9.13) βλέπουμε ότι η μετατόπιση της φάσης δεν είναι μοναδικά ορισμένη. Αν η συνάρτηση κέρδους είναι θετική, τότε η μετατόπιση της φάσης είναι ακαθόριστη κατά ένα πολλαπλάσιο του 2π .

Έχουμε θεωρήσει μέχρι τώρα ένα συνημιτονοειδές κύμα σαν είσοδο στο σύστημα. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί ναδειχθεί ότι ένα ημιτονοειδές κύμα στην είσοδο, $X(t) = \sin \lambda t$, δίνει μία έξοδο της μορφής

$$Y(t) = G(\lambda) \sin \{\lambda t + \varphi(\lambda)\},$$

έτσι ώστε έχουμε την ίδια συνάρτηση κέρδους και την ίδια φάση. Γενικότερα αν θεωρήσουμε μία είσοδο της μορφής

$$X(t) = e^{i\lambda t} = \cos \lambda t + i \sin \lambda t,$$

τότε η έξοδος δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} Y(t) &= G(\lambda)[\cos \{\lambda t + \varphi(\lambda)\} + i \sin \{\lambda t + \varphi(\lambda)\}] \\ &= G(\lambda) e^{i[\lambda t + \varphi(\lambda)]} = G(\lambda) e^{i\varphi(\lambda)} X(t) \end{aligned}$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι

$$G(\lambda)e^{-i\varphi(\lambda)} = A(\lambda) - iB(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)(\cos \lambda u - i \sin \lambda u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du = H(\lambda),$$
(9.14)

οπότε

$$Y(t) = H(\lambda)X(t)$$
(9.15)

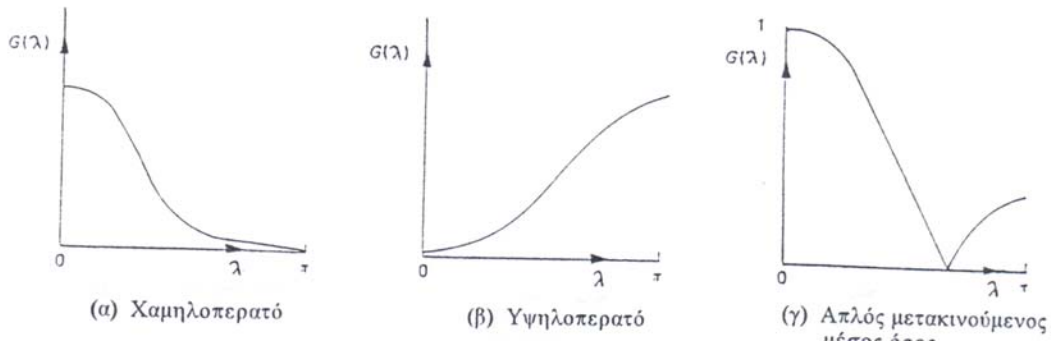
9.5. Διαγράμματα συνάρτησης κέρδους και φάσης.

Η συνάρτηση μεταφοράς, $H(\lambda)$, ενός γραμμικού συστήματος είναι μία μιγαδική συνάρτηση η οποία γράφεται ως εξής

$$H(\lambda) = G(\lambda)e^{i\varphi(\lambda)},$$
(9.16)

όπου $G(\lambda)$ και $\varphi(\lambda)$ είναι η συνάρτηση κέρδους και η φάση αντίστοιχα. Για να κατανοήσουμε τις ιδιότητες του συστήματος στο πεδίο συχνοτήτων, είναι χρήσιμο να παραστήσουμε γραφικά τις $G(\lambda)$ και $\varphi(\lambda)$ συναρτήσει του λ και να επιτύχουμε τα λεγόμενα διαγράμματα συνάρτησης κέρδους και φάσης. Αν η συνάρτηση $G(\lambda)$ είναι μεγάλη για χαμηλές τιμές του λ , αλλά μικρή για υψηλές τιμές του λ , όπως στο Σχήμα 9.2(α), τότε έχουμε το λεγόμενο φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων. Στην περίπτωση αυτή, αν η είσοδος στο σύστημα είναι ένα μίγμα από μεταβολές σε πολλές διαφορετικές συχνότητες, τότε μόνο οι συνιστώσες εκείνες με χαμηλή συχνότητα θα διέλθουν μέσω του συστήματος.

Η γραφική παράσταση της φάσης δεν είναι εύκολη επειδή δεν ορίζεται κατά ένα μοναδικό τρόπο. Αν η συνάρτηση κέρδους είναι θετική, τότε η φάση είναι ακαθόριστη κατά ένα πολλαπλάσιο του 2π και περιορίζεται συχνά στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Μία άλλη προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιείται από τους μηχανικούς, είναι να παραστήσουμε γραφικά τη φάση σαν μία απεριόριστη συνάρτηση του λ επιτρέποντας την $G(\lambda)$ να είναι θετική, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\varphi(0)=0$, αρκεί $G(0)$ να παίρνει μία πεπερασμένη τιμή. Δίνουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα.



Σχήμα 9.2. Διαγράμματα για συναρτήσεις κέρδους: (α) Ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων, (β) Ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων και (γ) Ένας απλός μέσος όρος τριών διαδοχικών παρατηρήσεων.

Παράδειγμα 9.1. Θεωρούμε ότι

$$Y_t = (X_{t-1} + X_t + X_{t+1}) / 3,$$

είναι ένα γραμμικό σύστημα με κρουστική συνάρτηση απόκρισης

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Από τη σχέση (9.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου ως εξής

$$H(\lambda) = \sum_k h_k e^{-i\lambda k} = \frac{1}{3} e^{-i\lambda} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{i\lambda} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \lambda \quad (0 < \lambda < \pi)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι πραγματική και όχι μιγαδική και επομένως

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad (0 < \lambda < \pi)$$

Η $H(\lambda)$ είναι αρνητική για $\lambda > \frac{2\pi}{3}$ και επομένως, στην περίπτωση αυτή, για να είναι η συνάρτηση κέρδους θετική, θα πρέπει να ισχύει

$$G(\lambda) = \left| \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \lambda \right| = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \lambda, & 0 < \lambda < \frac{2\pi}{3} \\ -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cos \lambda, & \frac{2\pi}{3} < \lambda < \pi \end{cases}$$

και

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0 & 0 < \lambda < \frac{2\pi}{3} \\ \pi & \frac{2\pi}{3} < \lambda < \pi \end{cases}$$

Η συνάρτηση κέρδους παριστάνεται γραφικά στο *Σχήμα 9.2(γ)* και φανερώνει ότι έχουμε ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων. Το αποτέλεσμα αυτό το περιμένουμε καθώς το φίλτρο μας εξομαλύνει τοπικές μεταβολές (μεταβολή σε υψηλές συχνότητες) και μετράει την κλίση (μεταβολή σε χαμηλές συχνότητες).

Παράδειγμα 9.2. Ένα γραμμικό σύστημα με μία απλή εκθετική απόκριση έχει ως κρουστική συνάρτηση απόκρισης την ακόλουθη συνάρτηση.

$$h(u) = g e^{-u/T} / T \quad (u > 0).$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (9.1) για τη συνάρτηση μεταφοράς βρίσκουμε

$$H(\lambda) = g(1 - i\lambda T) / (1 + \lambda^2 T^2) \quad (\lambda > 0)$$

Από τη σχέση αυτή παίρνουμε

$$G(\lambda) = g / \sqrt{1 + \lambda^2 T^2},$$

και $\tan \varphi(\lambda) = -\lambda T.$

Καθώς η συχνότητα λ αυξάνει, η $G(\lambda)$ ελαττώνεται και το σύστημά μας μοιάζει σαν ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων. Η φάση ελαττώνεται επίσης καθώς λ αυξάνει μέχρι το σημείο που η είσοδος και η έξοδος βρίσκονται εκτός φάσης.

Παράδειγμα 9.3. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα που αποτελείται από μία καθαρή καθυστέρηση, τέτοια ώστε

$$Y(t) = X(t-\tau)$$

Από το ορισμό της κρουστικής συνάρτησης απόκρισης που δίνεται από την σχέση (9.1) έχουμε

$$h(u) = \delta(u-\tau),$$

επειδή η *Dirac* δέλτα συνάρτηση ορίζεται ως εξής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-\tau)\varphi(u)du = \varphi(\tau).$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την σχέση

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-\tau)e^{-i\lambda u} du = e^{-i\lambda\tau}$$

Γι' αυτό το γραμμικό σύστημα, η συνάρτηση κέρδους είναι σταθερά

$$G(\lambda) = 1,$$

ενώ η φάση δίνεται από την σχέση

$$\varphi(\lambda) = -\lambda\tau.$$

9.6. Γενική σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου.

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει μόνο εισόδους με ημιτονοειδή μορφή στο γραμμικό σύστημα. Σ' αυτή την παράγραφο θεωρούμε κάθε είδους είσοδο και αποδεικνύουμε, εν γένει, ότι είναι ευκολότερο να εργασθούμε με γραμμικά συστήματα στο πεδίο συχνοτήτων παρά στο πεδίο τιμών του χρόνου.

Η γενική σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου στο πεδίο τιμών του χρόνου δίνεται από την εξίσωση (9.1), δηλ.

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)du$$

Όταν η είσοδος $X(t)$ δεν είναι απλής μορφής, τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού μπορεί να είναι δύσκολος. Αν θεωρήσουμε, όμως, το μετασχηματισμό *Fourier* έχουμε

$$\begin{aligned} Y(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)e^{-i\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)e^{-i\lambda t} dudt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\lambda u} X(t-u)e^{-i\lambda(t-u)} dudt \end{aligned}$$

Αλλά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)e^{-i\lambda(t-u)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-i\lambda t} dt,$$

για όλες τις τιμές του u , και είναι επομένως ο μετασχηματισμός *Fourier* της $X(t)$ το οποίο σημειώνουμε με $X(\lambda)$. Επιπλέον

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du$$

έτσι ώστε $Y(\lambda) = H(\lambda) X(\lambda)$.

Άρα το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (9.1) αντιστοιχεί σε ένα πολλαπλασιασμό στο πεδίο συχνοτήτων, αρκεί οι μετασχηματισμοί *Fourier* να υπάρχουν. Ένα

παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει στη διακριτή περίπτωση.

Μία γενικότερη σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου μπορεί να επιτευχθεί όταν η είσοδος $X(t)$ είναι μία στάσιμη διεργασία με συνεχές φάσμα ισχύος. Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ πιο χρήσιμο και περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 9.2. Θεωρούμε ένα ευσταθές (*stable*) σύστημα με συνάρτηση κέρδους $G(\lambda)$. Υποθέτουμε ότι η είσοδος $X(t)$ είναι μία στάσιμη διεργασία με συνεχές φάσμα ισχύος $g_{XX}(\lambda)$, τότε η έξοδος $Y(t)$ είναι επίσης στάσιμη διεργασία, της οποίας το φάσμα ισχύος, $g_{YY}(\lambda)$, δίνεται από την σχέση

$$g_{YY}(\lambda) = G^2(\lambda)g_{XX}(\lambda) \quad (9.18)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη περιγράφεται μόνο για τη συνεχή περίπτωση, αλλά με παρόμοιο τρόπο μπορεί να γίνει και για τη διακριτή περίπτωση. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι μία στάσιμη είσοδος σ' ένα ευσταθές σύστημα δημιουργεί μία στάσιμη έξοδο. Για μαθηματική ευκολία θα θεωρήσουμε ότι η είσοδος έχει μέση τιμή μηδέν, δηλ. $E\{X(t)\} = 0$. Τότε προκύπτει από την (9.1) ότι και η έξοδος έχει μέση τιμή μηδέν. Η συνάρτηση αυτοδιασποράς της εξόδου $Y(t)$ θα δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{YY}(\tau) = E\{Y(t)Y(t-\tau)\} \quad \text{επειδή} \quad E\{Y(t)\} = 0.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \gamma_{YY}(\tau) &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)du \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)X(t-\tau-v)dv\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h(v)E\{X(t-u)X(t-\tau-v)\}dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h(v)\gamma_{XX}(\tau+v-u)dudv \end{aligned} \quad (9.19)$$

επειδή $E\{X(t-u)X(t-\tau-v)\} = \gamma_{XX}(\tau-v-u)$

Η σχέση (9.19) μεταξύ των συναρτήσεων αυτοδιασποράς της εξόδου και της εισόδου δεν είναι απλής μορφής. Αν, όμως, πάρουμε τους μετασχηματισμούς *Fourier* και των δύο πλευρών έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{YY}(\tau) e^{-i\lambda\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)h(v) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{XX}(\tau+v-u) e^{-i\lambda\tau} d\tau \right] \\ &\Rightarrow g_{YY}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\lambda u} h(v) e^{-i\lambda v} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{XX}(\tau+v-u) e^{-i\lambda(\tau+v-u)} d\tau \right] dudv \\ &\Rightarrow g_{YY}(\lambda) = g_{YY}(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-i\lambda u} du \int_{-\infty}^{+\infty} h(v) e^{i\lambda v} dv = H(\lambda) \overline{H(\lambda)} g_{XX}(\lambda). \end{aligned}$$

όπου $\overline{H(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{i\lambda u} du$ είναι η συζυγής συνάρτηση της $H(\lambda)$. Επομένως

$$g_{YY}(\lambda) = |H(\lambda)|^2 g_{XX}(\lambda) = G^2(\lambda) g_{XX}(\lambda)$$

Η σχέση μεταξύ των φασμάτων ισχύος της εισόδου και της εξόδου ενός γραμμικού συστήματος είναι πολύ απλή. Για μία φορά ακόμη, ένα αποτέλεσμα στο πεδίο συχνοτήτων είναι πολύ απλούστερο από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο πεδίο τιμών του χρόνου.

Δίνουμε τώρα μερικές εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος.

Παράδειγμα 9.4. Ένα MA μοντέλο τάξης q δίνεται από την εξίσωση

$$X_t = \beta_0 Z_t + \dots + \beta_q Z_{t-q},$$

όπου Z_t είναι μία καθαρώς τυχαία ανέλιξη με $E\{X_t\} = 0$ και $Var\{X_t\} = \sigma_z^2$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει ένα γραμμικό σύστημα με είσοδο την $\{Z_t\}$ και έξοδο την $\{X_t\}$, του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την σχέση

$$H(\lambda) = \sum_{k=0}^q \beta_k e^{-i\lambda k}$$

Από τη σχέση (9.18) βρίσκουμε

$$g_{XX}(\lambda) = \left| \sum_{k=0}^q \beta_k e^{-i\lambda k} \right|^2 \sigma_z^2 / 2\pi, \quad \text{επειδή} \quad g_{XX}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi}$$

Στην περίπτωση ενός MA(1) μοντέλου, $X_t = Z_t + \beta Z_{t-1}$, έχουμε $H(\lambda) = 1 + \beta e^{-i\lambda}$ και επομένως

$$G^2(\lambda) = |H(\lambda)|^2 = 1 + 2\beta \cos \lambda + \beta^2,$$

έτσι ώστε

$$g_{XX}(\lambda) = \frac{\sigma_z^2}{2\pi} (1 + 2\beta \cos \lambda + \beta^2),$$

ένα αποτέλεσμα που έχει ήδη υπολογισθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί και στην περίπτωση που η $\{Z_t\}$ δεν είναι μία καθαρώς τυχαία ανέλιξη. Θεωρούμε λοιπόν ότι η ανέλιξη $\{Z_t\}$ έχει ένα φάσμα ισχύος της μορφής $g_{ZZ}(\lambda)$. Τότε το φάσμα ισχύος της $\{X_t\}$ δίνεται από τη σχέση

$$g_{XX}(\lambda) = \left| \sum_{k=0}^q \beta_k e^{-i\lambda k} \right|^2 g_{ZZ}(\lambda)$$

Παράδειγμα 9.5. Το μοντέλο $AR(1)$, $X_t = \alpha X_{t-1} + Z_t$, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γραμμικό σύστημα με είσοδο Z_t και έξοδο X_t . Μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ένα γραμμικό σύστημα που έχει σαν είσοδο την X_t και σαν έξοδο την Z_t δηλ.

$$Z_t = X_t - \alpha X_{t-1}.$$

Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε

$$H(\lambda) = 1 - \alpha e^{-i\lambda}.$$

Επομένως

$$G^2(\lambda) = |H(\lambda)|^2 = 1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2 ,$$

έτσι ώστε

$$g_{zz}(\lambda) = (1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2) g_{xx}(\lambda)$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε

$$g_{xx}(\lambda) = \frac{g_{zz}(\lambda)}{(1 - 2\alpha \cos \lambda + \alpha^2)} .$$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των φασμάτων ισχύος AR μοντέλων μεγαλύτερης τάξης.

Παράδειγμα 9.6. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα το οποίο μετατρέπει μία συνεχή είσοδο $X(t)$ σε μία έξοδο $Y(t)$ με τον εξής τρόπο

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} \quad (9.20)$$

Ο τελεστής διαφορίσης είναι μεγάλου μαθηματικού ενδιαφέροντος, αν και στην πράξη μπορούμε μόνο να τον προσεγγίσουμε. Αν η είσοδος στο σύστημα είναι ένα ημιτονοειδές κύμα, $X(t) = e^{i\lambda t}$, τότε η έξοδος δίνεται από τη σχέση

$$Y(t) = i\lambda e^{i\lambda t} .$$

Χρησιμοποιώντας την (9.15) βρίσκουμε ότι

$$H(\lambda) = i\lambda .$$

Αν η είσοδος είναι μία στάσιμη διεργασία με φάσμα ισχύος $g_{xx}(\lambda)$, τότε το φάσμα ισχύος της εξόδου είναι της μορφής

$$g_{yy}(\lambda) = |i\lambda|^2 g_{xx}(\lambda) = \lambda^2 g_{xx}(\lambda) \quad (9.21)$$

Το αποτέλεσμα αυτό, ισχύει όταν το γραμμικό σύστημα είναι ευσταθές. Στην πράξη το γεγονός αυτό συμβαίνει μόνο για ορισμένους τύπους διεργασίας εισόδου. Για παράδειγμα, είναι φανερό ότι η απόκριση σε μία μοναδιαία βηματική αλλαγή είναι μία απεριόριστη ώθηση. Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές πρέπει η διασπορά της εξόδου να είναι πεπερασμένη. Αλλά

$$\text{Var}\{Y(t)\} = \int_0^\infty g_{YY}(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \lambda^2 g_{XX}(\lambda) d\lambda,$$

και επειδή

$$\gamma_{XX}(k) = \int_0^\infty g_{XX}(\lambda) \cos \lambda k d\lambda$$

έχουμε

$$\frac{d^2 \gamma_{XX}(k)}{dk^2} = - \int_0^\infty \lambda^2 g_{XX}(\lambda) \cos \lambda k d\lambda,$$

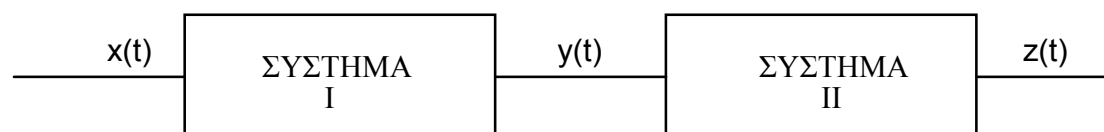
έτσι ώστε

$$\text{Var}\{Y(t)\} = - \left[\frac{d^2 \gamma_{XX}(k)}{dk^2} \right]_{k=0}$$

Επομένως η $Y(t)$ έχει πεπερασμένη διασπορά αρκεί η $\gamma_{XX}(k)$ να είναι παραγωγίσιμη δύο φορές στο σημείο $k=0$, και τότε μόνο η εξίσωση (9.21) ισχύει.

9.7. Γραμμικά συστήματα σε σειρά

Τα πλεονεκτήματα χρησιμοποίησης των μεθόδων του πεδίου συχνοτήτων είναι επίσης φανερά όταν θεωρούμε δύο γραμμικά συστήματα σε σειρά. Ένα παράδειγμα δύο γραμμικών συστημάτων σε σειρά περιγράφεται στο Σχήμα 9.3.



Σχήμα 9.3. Δύο γραμμικά συστήματα σε σειρά.

Μας ενδιαφέρει συχνά να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του ολικού συστήματος το οποίο είναι γραμμικό, όπου $X(t)$ είναι η είσοδος και $Z(t)$ είναι η έξοδος. Σημειώνουμε τις κρουστικές συναρτήσεις απόκρισης και τις συναρτήσεις μεταφοράς των συστημάτων I και II με $h_1(u)$, $h_2(u)$, $H_1(\lambda)$ και $H_2(\lambda)$. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (9.17) βρίσκουμε

$$Y(\lambda) = H_1(\lambda) X(\lambda) \quad \text{και} \quad Z(\lambda) = H_2(\lambda) Y(\lambda) = H_1(\lambda) H_2(\lambda) X(\lambda),$$

όπου $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ και $Z(\lambda)$ είναι οι μετασχηματισμοί *Fourier* των $X(t)$, $Y(t)$ και $Z(t)$. Έτσι η ολική συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από την σχέση

$$H(\lambda) = H_1(\lambda) H_2(\lambda) \tag{9.22}$$

Αν $H_1(\lambda) = G_1(\lambda)e^{i\varphi_1(\lambda)}$ και $H_2(\lambda) = G_2(\lambda)e^{i\varphi_2(\lambda)}$

τότε $H(\lambda) = G_1(\lambda)G_2(\lambda)e^{i[\varphi_1(\lambda)+\varphi_2(\lambda)]}$.

Επομένως η ολική συνάρτηση κέρδους είναι το γινόμενο των συναρτήσεων κέρδους των δύο συστημάτων, ενώ η ολική φάση είναι το άθροισμα των φάσεων των δύο συστημάτων.

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν στην κατάσταση όπου έχουμε k γραμμικά συστήματα σε σειρά.

9.8. Σχεδιασμός φίλτρων.

Τα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις ιδιότητες των φίλτρων που αναφέραμε προηγουμένως. Όταν δίνεται μια χρονοσειρά, $\{X_t\}$, τα φίλτρα για την αφαίρεση της κλίσης είναι της μορφής

$$Y_t = \sum_k h_k X_{t-k},$$

και μπορούν να θεωρηθούν ως γραμμικά συστήματα με συνάρτηση μεταφοράς

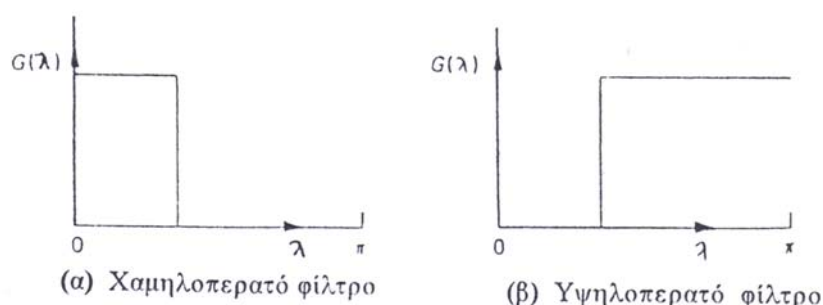
$$H(\lambda) = \sum_k h_k e^{-i\lambda k}.$$

Αν μία χρονοσειρά έχει φάσμα ισχύος $g_{XX}(\lambda)$, τότε το φάσμα ισχύος της εξομαλυμένης σειράς δίνεται από την σχέση

$$g_{YY}(\lambda) = G^2(\lambda)g_{XX}(\lambda) \quad (9.23)$$

όπου $G(\lambda) = |H(\lambda)|$.

Πως πρέπει να αρχίσουμε για να εκλέξουμε ένα κατάλληλο φίλτρο για τη χρονοσειρά; Ο σχεδιασμός ενός φίλτρου απαιτεί την εκλογή των $\{h_k\}$ και επομένως των $H(\lambda)$ και $G(\lambda)$. Δύο τύποι ιδανικών φίλτρων περιγράφονται στο Σχήμα 9.4. Το φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων τελείως αφαιρεί τη μεταβολή σε υψηλές συχνότητες και το φίλτρο υψηλών συχνοτήτων αφαιρεί τελείως τη μεταβολή σε χαμηλές συχνότητες.

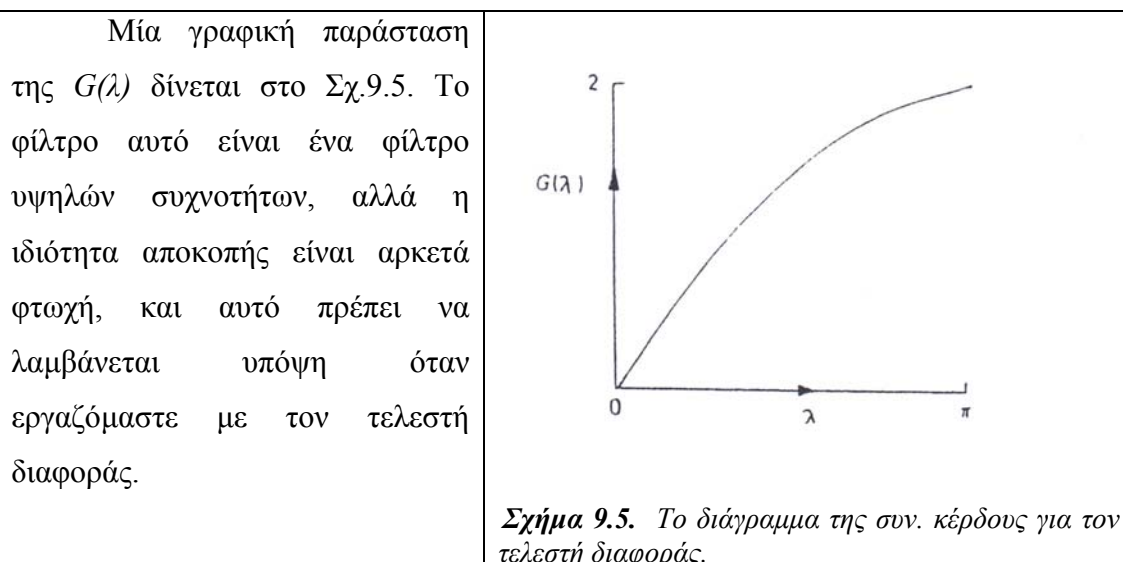


Σχήμα 9.4. Δύο τύποι ιδανικών φίλτρων (α) ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων και (β) ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων.

Αλλά ιδανικά φίλτρα του τύπου αυτού είναι αδύνατο να επιτύχουμε με ένα πεπερασμένο σύνολο βαρών. Όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των βαρών που χρησιμοποιούνται, τόσο χειρότερη θα είναι, εν γένει, η ιδιότητα αποκοπής του φίλτρου. Για παράδειγμα το διάγραμμα της συνάρτησης κέρδους ενός απλού μέσου όρου τριών διαδοχικών παρατηρήσεων (Σχ.9.2(γ)) είναι ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων αλλά έχει χειρότερη ιδιότητα αποκοπής από ένα ιδανικό φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων (Σχ. 9.4(α)).

Ο τελεστής της διαφοράς, $Y_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ είναι ένα φίλτρο για την αφαίρεση της κλίσης. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του φίλτρου δίνεται από την σχέση $H(\lambda) = 1 - e^{-i\lambda}$, οπότε

$$G(\lambda) = \sqrt{2(1 - \cos \lambda)}.$$



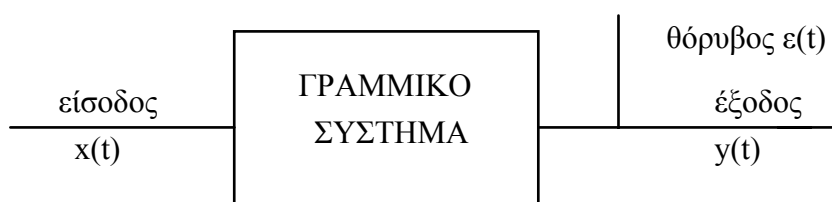
9.9. Η αναγνώριση των γραμμικών συστημάτων.

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει ότι η κατασκευή του γραμμικού συστήματος που μελετούμε είναι γνωστή. Όταν δίνεται η κρουστική συνάρτηση απόκρισης ενός συστήματος μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδο που αντιστοιχεί σε μία δεδομένη είσοδο.

Πολλά προβλήματα, όμως, που αντιστοιχούν στα γραμμικά συστήματα είναι τελείως διαφορετικού τύπου. Συνήθως η κατασκευή του συστήματος δεν είναι γνωστή και το πρόβλημα είναι ο προσδιορισμός της σχέσης μεταξύ εισόδου και εξόδου με σκοπό να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του συστήματος. Αυτή η διαδικασία καλείται η αναγνώριση (*identification*) του συστήματος. Τα συστήματα που θα μελετήσουμε εδώ επηρεάζονται από θόρυβο όπως περιγράφεται στο Σχήμα 9.6.

Ο θόρυβος αυτός μπορεί να μην είναι μία καθαρώς τυχαία διεργασία, αλλά συνήθως θεωρείται ότι είναι ασυσχέτιστος με την είσοδο $X(t)$. Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε πως η διαφασματική ανάλυση μεταξύ της εισόδου και της

εξόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε ένα εκτιμητή της συνάρτησης μεταφοράς ενός γραμμικού συστήματος.



Σχήμα 9.6. Ένα γραμμικό σύστημα με προστιθέμενο θόρυβο.

9.10. Εκτίμηση της συνάρτησης μεταφοράς.

Θεωρούμε ότι έχουμε την περίπτωση του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται στο Σχήμα 9.6, όπου ο θόρυβος θεωρείται ότι είναι ασυσχέτιστος με την είσοδο και ότι έχει μέση τιμή μηδέν.

Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε παρατηρήσεις για την είσοδο και την έξοδο για ένα χρονικό διάστημα και ότι επιθυμούμε να βρούμε ένα εκτιμητή της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος. Σημειώνουμε με $h(u)$ και $H(\lambda)$ την κρουστική συνάρτηση απόκρισης και τη συνάρτηση μεταφοράς αντίστοιχα.

Η σχέση $g_{YX}(\lambda) = G^2(\lambda)g_{XX}(\lambda)$ δεν ισχύει λόγω της παρουσίας του θορύβου και επομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της συνάρτησης κέρδους. Θα υπολογίσουμε λοιπόν μία νέα σχέση η οποία θα στηρίζεται στη διαφασματική συνάρτηση μεταξύ εισόδου και εξόδου.

Η εξίσωση που δίνει την έξοδο $Y(t)$, στην συνεχή περίπτωση, έχει τη μορφή

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(u)X(t-u)du + \varepsilon(t) \quad (9.24)$$

Για μαθηματική ευκολία θεωρούμε ότι $E\{X(t)\}=0$ και επομένως $E\{Y(t)\}=0$. Πολλαπλασιάζοντας την (9.24) με $X(t-\tau)$ και παίρνοντας τις μέσες τιμές βρίσκουμε

$$\gamma_{XY}(\tau) = \int_0^{\infty} h(u)\gamma_{XX}(\tau-u)du, \quad (9.25)$$

επειδή $E\{\varepsilon(t)X(t-\tau)\} = 0$.

Η εξίσωση (9.25) είναι γνωστή ως η *Wiener-Hopf* ολοκληρωτική εξίσωση, και όταν δίνονται οι συναρτήσεις $\gamma_{XY}(\tau)$ και $\gamma_{XX}(\tau)$, μπορεί, εν γένει, να λυθεί και έτσι να υπολογίσουμε την κρουστική συνάρτηση απόκρισης, $h(u)$. Αλλά είναι συχνά ευκολότερο να εργασθούμε με την αντίστοιχη σχέση στο πεδίο συχνοτήτων.

Παίρνοντας τώρα το μετασχηματισμό *Fourier* και στα δύο μέλη της (9.25) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} g_{XY}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \gamma_{XX}(\tau-u) du e^{-i\lambda\tau} d\tau \\ \Rightarrow g_{XY}(\lambda) &= \int_0^{\infty} h(u) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{XX}(\tau-u) e^{-i\lambda(\tau-u)} d\tau \right\} e^{-i\lambda u} du \quad (9.26) \\ &= g_{XX}(\lambda) \int_0^{\infty} h(u) e^{-i\lambda(\tau-u)} du = H(\lambda) g_{XX}(\lambda), \end{aligned}$$

όπου $g_{XY}(\lambda)$ είναι η διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας μεταξύ της $X(t)$ και της $Y(t)$, και $g_{XX}(\lambda)$ είναι το φάσμα ισχύος της $X(t)$. Έτσι μία συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε ένα πολλαπλασιασμό στο πεδίο συχνοτήτων.

Αν τώρα $\hat{g}_{XY}(\lambda)$ και $\hat{g}_{XX}(\lambda)$ είναι εκτιμητές των συναρτήσεων $g_{XY}(\lambda)$ και $g_{XX}(\lambda)$ αντίστοιχα, τότε $\hat{H}(\lambda) = \hat{g}_{XY}(\lambda) / \hat{g}_{XX}(\lambda)$.

Προφανώς, από τη σχέση αυτή μπορούμε να βρούμε εκτιμητές για τη συνάρτηση κέρδους και τη φάση. Για τη συνάρτηση κέρδους έχουμε

$$\hat{G}(\lambda) = |\hat{H}(\lambda)| = \frac{|\hat{g}_{XY}(\lambda)|}{\hat{g}_{XX}(\lambda)} = \frac{\hat{\alpha}_{XY}(\lambda)}{\hat{g}_{XX}(\lambda)}.$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τη διαφασματική ανάλυση για να υπολογίσουμε τις ιδιότητες του θορύβου $\varepsilon(t)$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (9.25) με $Y(t-\tau)$ και παίρνοντας μέσες τιμές βρίσκουμε

$$\gamma_{YY}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(u)h(v)\gamma_{XX}(\tau+v-u)dudv + \gamma_{\varepsilon\varepsilon}(\tau)$$

επειδή οι $X(t)$ και $\varepsilon(t)$ είναι ασυσχέτιστες.

Αν πάρουμε τώρα τον μετασχηματισμό *Fourier* και στα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης βρίσκουμε

$$g_{YY}(\lambda) = H(\lambda) \bar{H}(\lambda) g_{XX}(\lambda) + g_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda).$$

Αλλά $H(\lambda) \bar{H}(\lambda) = G^2(\lambda) = |C(\lambda)|^2 g_{YY}(\lambda)/g_{XX}(\lambda)$,

οπότε

$$g_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) = g_{YY}(\lambda) [1 - |C(\lambda)|^2]. \quad (9.27)$$

Ενας εκτιμητής λοιπόν για το φάσμα ισχύος της $\varepsilon(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\hat{g}_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) = \hat{g}_{YY}(\lambda) [1 - |\hat{C}(\lambda)|^2]. \quad (9.28)$$

Από την εξίσωση (9.27) βλέπουμε ότι, αν $|C(\lambda)|^2 = 1$ για όλα τα λ τότε $g_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) = 0$ και επομένως υπάρχει μία καθαρή γραμμική σχέση μεταξύ εισόδου και εξόδου. Αντίθετα, αν $|C(\lambda)|^2 = 0$ για όλα τα λ τότε $g_{YY}(\lambda) = g_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ και επομένως η έξοδος δεν συσχετίζεται γραμμικά με την είσοδο.

Τα αποτελέσματα της παραγράφου αυτής δεν μας δείχνουν μόνο πως να αναγνωρίσουμε ένα μοντέλο με την βοήθεια της διαφασματικής συνάρτησης πυκνότητας, αλλά μας βοηθούν επίσης στην ερμηνεία των συναρτήσεων που προέρχονται από τη διαφασματική συνάρτηση πυκνότητας, όπως η συνάρτηση κέρδους, η φάση και ο συντελεστής συνάφειας.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Astrom, K.J. and Eykhoff, P. (1971) System identification a survey, *Automatica*, 7, 123-62.
2. Bartlett, M.S. (1966). *An Introduction to Stochastic Processes*, 2nd Edn, Cambridge: Cambridge Univ. Press.
3. Bloomfield, P. (1976). *Fourier Analysis of Time Series : An Introduction*, New York: Wiley.
4. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 2nd Edn, San Fransisco : Holden-Day.
5. Brillinger, D.R. (1981). *Time Series Analysis: Data Analysis and Theory*, New York: Holt, Rinehart & Winston.
6. Brockwell, P.J. and Davis, R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods*, 2nd Edn, New York: Springer-Verlag.
7. Candy, J.V. (1988). *Signal Processing: The Modern Approach*, New York: McGraw-Hill.
8. Chatfield, C. (1989). *The Analysis of Time Series: An Introduction* (4th edn), London: Chapman and Hall.
9. Cox, D.R. and Miller, H.D. (1968). *The Theory of Stochastic Processes*, New York: Wiley.
10. Eykhoff, P. (1974). *System Identification – Parameter and State Estimation*, New York: Wiley.
11. Gray, R.M. and Davisson, L.D. (1986). *Random Processes: A Mathematical Approach for Engineers*, New Jersey: Prentice-Hall.
12. Janacek, G. and Swift, L. (1993). *The Series: Forecasting, Simulation and Applications*, New York: Horwood.
13. Jenkins, G.M. and Watts, D.C. (1968). *Spectral Analysis and its Applications*, San Fransisco: Holden-Day.
14. Leon-Garcia, A. (1989). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*, Messachusetts : Addison-Wesley.
15. Ljung, L. (1987). *System Identification: Theory for the User*, New Jersey: Prentice-Hall.
16. Orfanidis, S.J. (1990). *Optimum Signal Processing : An Introduction* (2nd Edn), New York : McGraw-Hill.
17. Papoulis, A. (1984). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, New York: McGraw-Hill.
18. Parzen, E. (1962). *Stochastic Processes*, San Fransisco: Holden-Day.
19. Peeples, P.Z.Jr. (1987). *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*, New York: McGraw-Hill.
20. Pendat, J.S. and Piersol, A.G. (1986). *Random data : Analysis and Measurement Procedures* (Revised 2nd edn), New-York: Wiley.