Πεπερασμένες Διαφορές και Παραγώγιση:
Σχέση διαφορών και τελεστών

- Το συμπτωτικό πολυώνυμο
- Τελεστές Διαφορών
- Διακριτικοποίηση της παραγώγου
- Παραγώγιση του προσεγγιστικού πολυωνύμου
  - Newton ‘s forward
  - Stirling
  - Newton’s backward
- Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Πεπερασμένες Διαφορές

- Έστω ακολουθία τιμών y_k που αντιστοιχούν σε ανισαπέχοντα ορίσματα x_k .
- Ο τελεστής προς τα πίσω διαφορών Δ δρα επί των στοιχείων της ακολουθίας $\{y_k\}$ και αποδίδει μια νέα ακολουθία $\{\Delta y_k\} = \{y_{k+1}-y_k\}$.
- Άλλοι τελεστές

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ **Δ**

- Αν y_k = c σταθερή για κάθε k, τότε $\Delta y_k=0$

- Ο τελεστής είναι γραμμικός, δηλαδή

$$\Delta[C_1 y_k + C_2 y_k] = C_1 \Delta y_k + C_2 \Delta y_k$$

- Γραμμικός συνδυασμός τελεστών

$$(\Delta_1 + \Delta_2) y_k = \Delta_1 y_k + \Delta_2 y_k$$

- Γινόμενο τελεστών $(\Delta \times \Delta)\, y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta(y_{k+1} - y_k) =$

$= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = y_{k+2} - y_{k+1} - y_{k+1} + y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k$

. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ Δ

- Λόγος τελεστών

. $\Delta[y_k / v_k] = [v_k \Delta y_k - y_k \Delta v_k]/y_{k+1} v_k$

- $\Delta C^k = C^k(C-1)$

(ειδική περίπτωση όταν C=2, τότε $\Delta 2^\kappa = 2^\kappa$)

- Δυο τελεστές L_1 και L_2 είναι αντίστροφοι ανν

. $L_1 x\, L_2 = L_2 x\, L_1 = I$

. Π.χ. αν $L_1 = L^{-1}$ και $L_2 = L$ τότε $L^{-1}(Ly_k) = y_k$.

. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ Δ

Να δείξετε ότι

- $\Delta(\sin k) = 2\sin(1/2)\cos(k+(1/2))$
- $\Delta(\cos k) = -2\sin(1/2)\sin(k+(1/2))$

. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΛΕΣΤΗ Δ

- $\Delta(\log x_k) = \log(1+(h/x_k))$
- $\Delta(\log x_k) \approx h/x_k$ (Όταν το h/x_k είναι πολύ μικρό)

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

$$\Delta^n y_k = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_{n-i}$$

Παρατηρείται ότι οι διαφορές ανώτερης τάξης έχουν αναπτύγματα ανάλογα Με εκείνα του δυωνύμου του Newton.

ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

- Δείξτε ότι $\Delta^3 = y_3-3y_2+3y_1-y_0$

. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Θεωρούνται οι παρατηρήσεις ενός σταθερού φαινομένου, που για κάποιο λόγο μετά την 3η παρατήρηση υπεισήρθε μοναδιαίο σφάλμα που παρέμεινε στις επόμενες παρατηρήσεις.

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	$\Delta^5 y_k$	$\Delta^6 y_k$	$\Delta^7 y_k$
0	5							
1	5	0						
2	5	0	0					
3	5	0	0	0				
4	6	1	1	1	1			
5	6	0	-1	-2	-3	-4		
6	6	0	0	1	3	6	10	
7	6	0	0	0	-1	-4	-10	-20

Τελεστές Διαφορών

Προς τα εμπρός διαφορές	$\Delta: \quad \Delta y_k \rightarrow y_{k+1} - y_k$
Μετατόπιση	$\mathrm{E}: \quad \mathrm{E}y_k \rightarrow y_{k+1}$
Προς τα πίσω διαφορές	$\nabla: \quad \nabla y_k \rightarrow y_k - y_{k-1}$
Μέση τιμή	$\mu: \quad \mu y_k \rightarrow y_{k+1} - y_{k-1}$
Κεντρική διαφορά	$\delta: \quad \delta y_k \rightarrow y_{k+(1/2)} - y_{k-(1/2)}$
Τελεστής παραγωγήσεως	$D: \quad Dy_k \rightarrow h\dfrac{\partial}{\partial x} y_k$

Σχέσεις που συνδέουν τελεστές

$$E = 1 + \Delta$$

$$\Delta^2 = \mathrm{E}^2 - 2\mathrm{E} + 1$$

$$\mathrm{E}\Delta = \Delta\mathrm{E}$$

$$\Delta^3 = \mathrm{E}^3 - 3\mathrm{E}^2 + 3\mathrm{E} - 1$$

Newton-Gregory

- Εάν το μέγεθος των δεδομένων είναι μεγάλο, τότε ο πίνακας διαιρεμένων διαφορών θα είναι πολύ μεγάλος. Ας υποθέσουμε ότι η επιθυμητή ενδιάμεση τιμή για την οποία ζητείται να εκτιμηθεί η τιμή της συνάρτησης βρίσκεται προς το τέλος και πάντως στο δεύτερο ήμισυ του συνόλου δεδομένων, τότε μπορεί να είναι καλύτερο για να ξεκινήσει η διαδικασία εκτίμησης από το τελευταίο σημείο του συνόλου των δεδομένων. Γι 'αυτό πρέπει να χρησιμοποιούν προς τα πίσω διαφορές και να σχηματοποιηθεί ο πίνακας των προς τα πίσω διαφορών.
- Ας προσδιοριστούν πρώτα οι προς πίσω διαφορές για να δημιουργήσουν τον πίνακα των προς τα πίσω διαφορών για το σύνολο δεδομένων.
- Με χρήση των προς τα πίσω διαφορών το συμπτωτικό πολυώνυμο Newton-Gregory θα γίνει

$$P_n(\mathrm{S}) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \ldots\ldots + \frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

Περισσότερα Συμπωτικά Πολυώνυμα

- Τύπος Gauss forward
- Τύπος Gauss backward
- Τύπος Stirling
- Τύπος Everet
- Τύπος Bessel
- Κανόνας Ζικ-Ζακ.

Παράδειγμα

k	x_k	y_k	∇y_k	$\nabla^2 y_k$	$\nabla^3 y_k$
-3	4	1	2	3	4
-2	6	3	5	7	
-1	8	8	12		
0	10	20			

Παράδειγμα

k	x_k	y_k	∇y_k	$\nabla^2 y_k$	$\nabla^3 y_k$
-3	4	1	2	3	4
-2	6	3	5	7	
-1	8	8	12		
0	10	20			

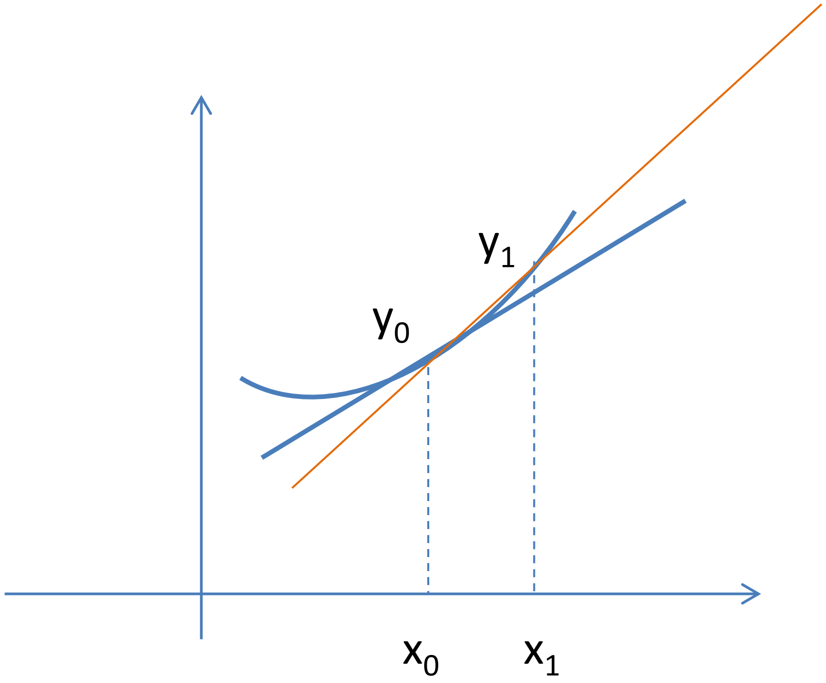
$$p_k = 20 + 12k + \frac{7}{2}k(k+1) + \frac{4}{6}k(k+1)(k+2)$$

Να εφαρμόσετε το ίδιο με τον τύπο Newton προς τα εμπρός.

Διακριτικοποίηση της παραγώγου

Διακριτικοποίηση της παραγώγου

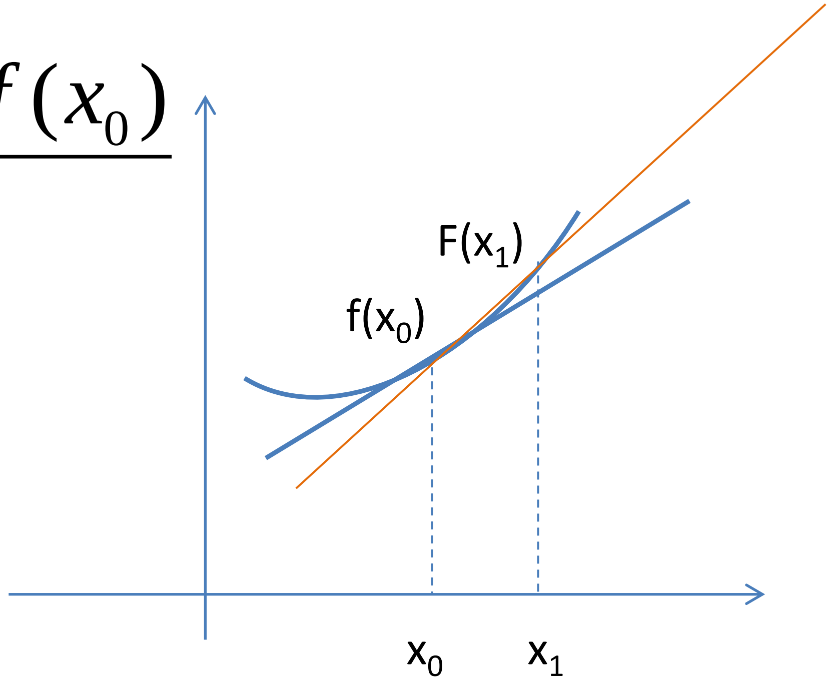
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



Διακριτικοποίηση της παραγώγου

Αν $y_0 = f(x_0)$ και $h=x_1-x_0$, τότε

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



Η προς τα εμπρός προσέγγιση της παραγώγου

Παράδειγμα

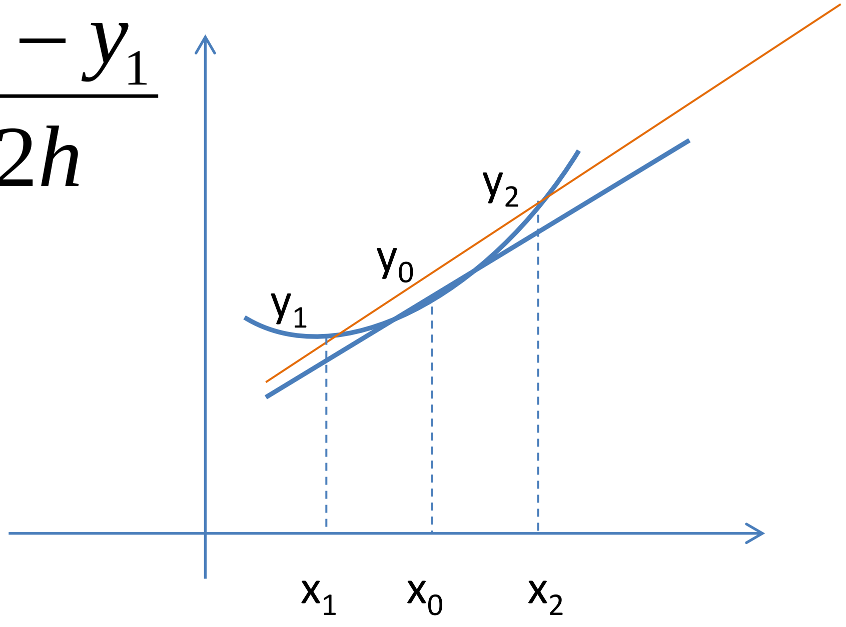
Η προς τα εμπρός προσέγγιση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=a+bx^2$
Στο σημείο $x=x_0$ είναι:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{a+b(x_0+h)^2-a-b(x_0^2)}{h} = 2bx_0+bh$$

Ενώ το σφάλμα είναι τάξεως 1 $O(h)=bh$
Η ακριβής έκφραση της παραγώγου είναι 2bx

Διακριτικοποίηση της παραγώγου
Κεντρική Διαφορά

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{2h}$$



Παράδειγμα

Η προσέγγιση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=a+bx^2$ με κεντρικές Διαφορές στο σημείο $x=x_0$ είναι:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=$$

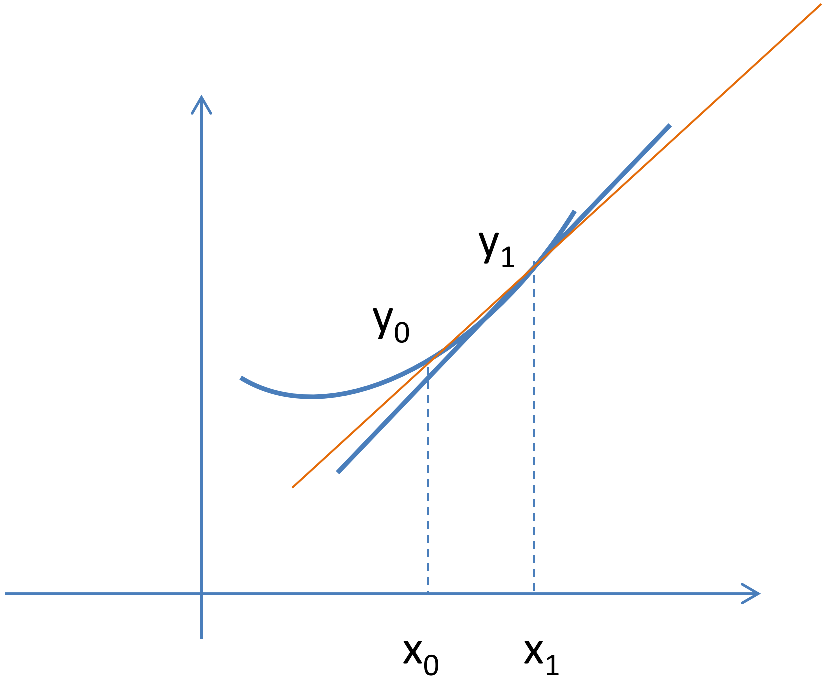
$$=\frac{a+b(x_0+h)^2-a-b(x_0-h)^2}{2h}=\frac{4bhx_0}{2h}=2bx_0$$

Ενώ το σφάλμα είναι τάξεως 0 $\qquad$ O(h)=0

Η ακριβής έκφραση της παραγώγου είναι 2bx

Διακριτικοποίηση της παραγώγου
Πεπερασμένες διαφορές προς τα πίσω.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

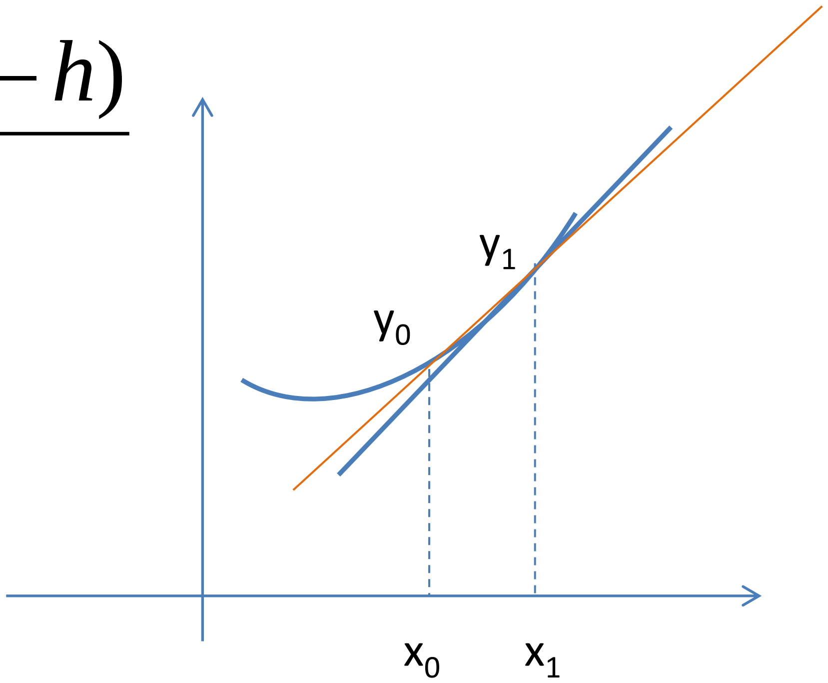


Διακριτικοποίηση της παραγώγου
Πεπερασμένες διαφορές προς τα πίσω.

Αν $y_1 = f(x_1)$ και $h=x_1-x_0$, τότε

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x1} \approx \frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}$$

Η προς τα πίσω προσέγγιση της παραγώγου



Παράδειγμα

Η προς τα πίσω προσέγγιση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=a+bx^2$
Είναι:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x1} \approx \frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} = \frac{a+bx_1^2-a-b(x_1-h)^2}{h} = 2bx_1+bh$$

Ενώ το σφάλμα είναι O(h)(τάξεως 1)
Η ακριβής έκφραση της παραγώγου είναι 2bx

Το προσεγγιστικό πολυώνυμο Newton
Προς τα εμπρός διαφορές

$$p_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^{\iota} y_0$$

ή αλλιώς

$$p(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{n-1})$$

$$p_k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \Delta^i y_0$$

$$p_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \binom{k}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots =$$

$$= y_0 + \frac{k!}{1!(k-1)!}\Delta y_0 + \frac{k!}{2!(k-2)!}\Delta^2 y_0 + \frac{k!}{3!(k-3)!}\Delta^3 y_0 + \ldots =$$

$$y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k^2 - k}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{k^3 - 3k^2 + 2k)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

Επειδή $\quad k(x) = \dfrac{x - x_0}{h}, \qquad k'(x) = \dfrac{1}{h},$

Παραγώγιση του προσεγγιστικού πολυωνύμου
Newton's forward

$$p'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + (k - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots \right)$$

$$p^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (k - 1)\Delta^3 y_0 + \frac{2k^3 - 18k + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots \right)$$

$$p^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 + \frac{2k - 3}{2}\Delta^4 y_0 + \ldots \right)$$

Παράδειγμα

x	√x	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	1,00000	2470	-58	4	0
1,05	1,02470	2411	-54	3	0
1,1	1,04881	2357	-51	3	0
1,15	1,07238	2306	-48	3	
1,2	1,09545	2259	-45		
1,25	1,11803	2214			
1,3	1,14018				

Με k=0 και x_0=1,00

$$p'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + (k - \frac{1}{2})\Delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 6k + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots \right)$$

$$p'(x) = 20\left(0{,}02470 + 0{,}000295 + 0{,}000017\right) = 0{,}50024$$

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο x+h της συνάρτησης, που δίνεται με την έκφραση y=f(x), είναι :

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο x+h της συνάρτησης, που δίνεται με την έκφραση y=f(x), είναι :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \ldots$$

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο x+h της συνάρτησης, που δίνεται με την έκφραση y=f(x), είναι :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \ldots$$

Η προσέγγιση της παραγώγου στο σημείο x με βήμα h γίνεται :

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο x+h της συνάρτησης, που δίνεται με την έκφραση y=f(x), είναι :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \dots$$

Η προσέγγιση της παραγώγου στο σημείο x με βήμα h γίνεται :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x) + \frac{h}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) + \dots$$

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor στο σημείο x+h της συνάρτησης, που δίνεται με την έκφραση y=f(x), είναι :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \dots$$

Η προσέγγιση της παραγώγου στο σημείο x με βήμα h γίνεται :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!} f^{(2)}(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) + \dots$$

όπου

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Χρήση του αναπτύγματος Taylor

Άρα:

$$f'(x) \approx f'(x) - O(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Μια καλλίτερη προσέγγιση είναι εκείνη που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο γειτονικών στο x_0 σημείων.
- Το ανάπτυγμα Taylor στα σημεία αυτά θα είναι :

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Μια καλλίτερη προσέγγιση είναι εκείνη που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο γειτονικών στο x $_0$ σημείων.
- Το ανάπτυγμα Taylor στα σημεία αυτά θα είναι :

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Μια καλλίτερη προσέγγιση είναι εκείνη που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο γειτονικών στο x_0 σημείων.
- Το ανάπτυγμα Taylor στα σημεία αυτά θα είναι :

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει :

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Μια καλλίτερη προσέγγιση είναι εκείνη που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο γειτονικών στο x_0 σημείων.
- Το ανάπτυγμα Taylor στα σημεία αυτά θα είναι :

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει :

$$f'(x = x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2 f'''}{6} + O(h^3)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Μια καλλίτερη προσέγγιση είναι εκείνη που επιτυγχάνεται με τη χρήση δύο γειτονικών στο x_0 σημείων.
- Το ανάπτυγμα Taylor στα σημεία αυτά θα είναι :

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Σφάλμα αποκοπής

Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει :

$$f'(x = x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2 f'''}{6} + O(h^3)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της παραγώγου σε σημείο

- Εξετάζεται και πάλι η $f(x)=b+ax^2$
- Η εκτίμηση της τιμής της παραγώγου είναι η ίδια με εκείνη που βρήκαμε με χρήση της κεντρικής διαφοράς
- Το σφάλμα προκύπτει από την παράγωγο τρίτης τάξης, που είναι μηδέν

- ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν η αποκοπή γίνει στο τετραγωνικό όρο, τότε η εκτίμηση συμπίπτει με την τιμή της παραγώγου στο σημείο

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της **2^{ης} παραγώγου** σε σημείο

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της **2ης παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της **2ης παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της **2ης παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της 2ης **παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

$$f(x = x_0 \pm h) - f(x_0) = \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της 2ης **παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

$$f(x = x_0 \pm h) - f(x_0) = \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη:

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της 2ης **παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

$$f(x = x_0 \pm h) - f(x_0) = \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη:

$$f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = h^2 f'' + O(h^2)$$

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της 2ης **παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

$$f(x = x_0 \pm h) - f(x_0) = \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη:

$$f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = h^2 f'' + O(h^2)$$

και

Παράδειγμα Χρήσης του αναπτύγματος Taylor για την εκτίμηση της **2ης παραγώγου** σε σημείο

Από το ανάπτυγμα Taylor στο x_0

$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

ή

$$f(x = x_0 \pm h) - f(x_0) = \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη:

$$f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = h^2 f'' + O(h^4)$$

και

$$f'' = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + O(h^2)$$

Ο τύπος του Stirling

- Ο τύπος του Stirling προκύπτει από τους τύπους του Gauss

$$p_k = y_0 + \frac{k}{2}\binom{k}{1}\delta\mu y_0 + \binom{k}{1}\delta^2 y_0 + \binom{k+1}{3}\delta^3 \mu y_0 + \frac{k}{4}\binom{k+1}{3}\delta^4 \mu y_0 + \ldots$$

$$\ldots + \binom{k+n-1}{2n-1}\delta^{2n-1}\mu y_0 + \frac{k}{2n}\binom{k+n-1}{2n-1}\delta^{2n} y_0$$

Παραγώγιση του τύπου Stirling

$$p'(x) = \frac{1}{k}\left(\delta \mu y_0 + k\delta^2 y_0 + \frac{3k^2 - 1}{6}\delta^3 \mu y_0 + \frac{2k^3 - k}{12}\delta^4 y_0 + \ldots \right)$$

Παραγώγιση του τύπου Stirling

$$p''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\delta^2 y_0 + k\delta^3 \mu y_0 + \frac{6k^2 - 1}{12}\delta^4 y_0 + \ldots \right)$$

Παραγώγιση του τύπου Stirling

$$p^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3}\left(\delta^3 \mu y_0 + k\delta^4 y_0 + \ldots\right)$$