Παρεμβολή Hermite

- Έστω ότι είναι γνωστές οι διατεταγμένες τριάδες (x_i, $f(x_i)$, $f'(x_i)$)
- Το προσεγγιστικό πολυώνυμο Hermite ικανοποιεί τι ιδιότητες:
- Ο βαθμός του $P_n(x)$ είναι 2^n-1
- Ισχύει ότι $P_n(x_i) = f(x_i)$ και $P'_n(x_i) = f'(x_i)$ για i=1,2,…,n

Το πολυώνυμο Hermite έχει τη μορφή

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} V_k(x) f'(x_k)$$

Παρεμβολή με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

- Έστω ότι είναι γνωστές οι διατεταγμένες τριάδες $(x_i, f(x_i), f'(x_i))$
- Το προσεγγιστικό πολυώνυμο Hermite ικανοποιεί τι ιδιότητες:
- Ο βαθμός του $P_n(x)$ είναι 2^n-1
- Ισχύει ότι $P_n(x_i) = f(x_i)$ και $P'_n(x_i) = f'(x_i)$ για i=1,2,…,n

Το πολυώνυμο Hermite έχει τη μορφή $F(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} V_k(x) f'(x_k)$

$$U_i(x) = [1 - 2L_i^{'}(x_i)(x - x_i)][L_i(x)]^2$$

$$V_i(x) = (x - x_i)[L_i(x)]^2$$

Παρεμβολή με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} V_k(x) f'(x_k)$$

$$U_i(x) = [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)][L_i(x)]^2$$
$$V_i(x) = (x - x_i)[L_i(x)]^2$$

Όπου προφανώς ισχύει ότι

$$U_k(x_i) = \delta_{ik} \qquad V_k(x_i) = 0$$
$$U_k'(x_i) = 0 \qquad V_k'(x_i) = \delta_{ik}$$

Παρεμβολή με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x) f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} V_k(x) f'(x_k)$$

$$U_i(x) = [1 - 2L_i^{'}(x_i)(x - x_i)][L_i(x)]^2$$
$$V_i(x) = (x - x_i)[L_i(x)]^2$$

Όπου προφανώς ισχύει ότι

$$U_k(x_i) = \delta_{ik} \qquad V_k(x_i) = 0$$
$$U_k'(x_i) = 0 \qquad V_k'(x_i) = \delta_{ik}$$

Παρεμβολή με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

- Ο τύπος παρεμβολής Hermite γράφεται και ως

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ 1 - 2L_k'(x_k)(x - x_k) \right\} \left[L_k(x)^2 f(x_k) + \sum_{k=1}^{n} (x - x_k) \left[L_k(x) \right]^2 f'(x_k) \right]$$

- Το σφάλμα (μέγιστη απόσταση στο διάστημα παρεμβολής) είναι

$$f(x) - F(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \left[f(x) \right]^2$$

Παρεμβολή Hermite - Παράδειγμα

- Το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$
- Στα σημεία $x_0=1$, $x_1=2$ είναι:

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 3$$

- Πράγματι, επειδή $L_1(x) = 2 - x \quad L_2(x) = x - 1$

$$L_1'(x) = -1 \qquad L_2'(x) = 1$$

- Προκύπτει

$$F(x) = \begin{bmatrix} 1 - 2(-1)(2-x)^2 + \left[1 - 2(1)(x-2)\right](x-1)\frac{1}{2} \\ +(x-1)(2-x)^2(-1) + (x-2)(x-1)2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4}x + 3 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα παρεμβολής με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

- Να εκτιμηθεί η τιμή της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ στο σημείο x= 1,5 όταν είναι γνωστές οι τιμές στα σημεία $x_0=1$, $x_1=2$
- Επειδή το εφαπτόμενο πολυώνυμο στα δοθέντα σημεία είναι

$$p(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{4}x+3$$

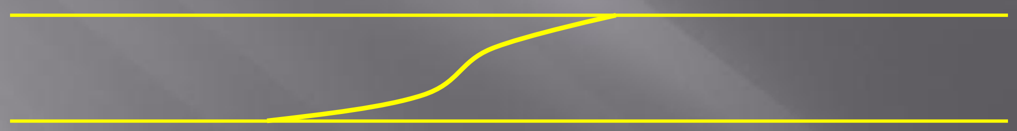
- Η τιμή p(1,5)=0,65625

Παράδειγμα παρεμβολής με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

Δυο παράλληλες σιδηροδρομικές γραμμές βρίσκονται σε απόσταση 500 μέτρων η μία από την άλλη. Επιθυμούμε να τις συνδέσουμε με γραμμή διακλάδωσης της οποίας η προβολή στις γραμμές αυτές να μη έχει μήκος μεγαλύτερο από ένα χιλιόμετρο.

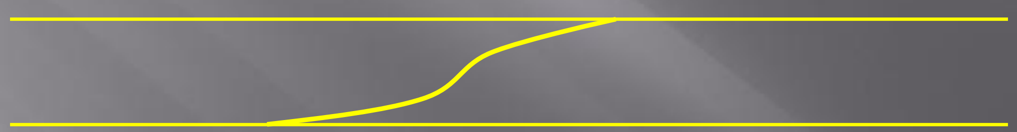
Παράδειγμα παρεμβολής με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

Δυο παράλληλες σιδηροδρομικές γραμμές βρίσκονται σε απόσταση 500 μέτρων η μία από την άλλη. Επιθυμούμε να τις συνδέσουμε με γραμμή διακλάδωσης της οποίας η προβολή στις γραμμές αυτές να μη έχει μήκος μεγαλύτερο από ένα χιλιόμετρο.



Παράδειγμα παρεμβολής με τη βοήθεια του εφαπτομενικού πολυωνύμου Hermite

Δυο παράλληλες σιδηροδρομικές γραμμές βρίσκονται σε απόσταση 500 μέτρων η μία από την άλλη. Επιθυμούμε να τις συνδέσουμε με γραμμή διακλάδωσης της οποίας η προβολή στις γραμμές αυτές να μη έχει μήκος μεγαλύτερο από ένα χιλιόμετρο.



Η διακλάδωση είναι καμπύλη $3^{ου}$ βαθμού εφαπτόμενη στις δυο παράλληλες γραμμές.
Να βρείτε την αναλυτική έκφραση της καμπύλης.