

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: A.M.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2025 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

[Οι φοιτητές/-ριες του 1^{ου} έως 8^{ου} έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3, 4, 5.
Οι φοιτητές/-ριες του 9^{ου}, 10^{ου}, ..., έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3 και 4.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.]

ΘΕΜΑ 1^ο

Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης

$$X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad X(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$. Να υπολογιστεί η

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 4x - 3y + 5.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της f στην περιοχή D που σχηματίζεται από τις $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 4 \frac{\partial z}{\partial y} - z \right) = 0.$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\|, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}. \quad f = f(x, y, z), \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Sylvester)

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

$$E = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx, \quad E = \iint_D dx dy, \quad V = \iiint_D dx dy dz$$

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$m = \iint_D \sigma(x, y) dx dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma(x, y) dx dy}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma(x, y) dx dy}{m}$$

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$E = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{ροή διανυσματικού πεδίου } \vec{F})$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{u}) dx dy dz \quad (\text{όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα } \vec{u})$$

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0.$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x \varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1} x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i\{\varphi_2[y + (a + i\beta)x] - \varphi_2[y + (a - i\beta)x]\}.$$

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \dots (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0.$$

$$z = e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } a_1 \neq 0, \quad \text{ή} \quad z = e^{\frac{-\gamma_1}{\beta_1} y} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } \beta_1 \neq 0.$$

$$e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x \varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right] \quad \left| \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y} \quad \right| \quad \left| \quad u = \int f(x, a - \omega x) dx \right|$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

Έχουμε

$$\dot{X}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, \quad e^t \sin t + e^t \cos t, \quad e^t) \Rightarrow$$

$$\dot{X}(t) \cdot \dot{X}(t) = e^{2t} (\cos t - \sin t)^2 + e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t} \Rightarrow$$

$$\|\dot{X}(t)\| = \left[e^{2t} (\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t + 1) \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\|\dot{X}(t)\| = e^t \sqrt{3}$$

Άρα το ζητούμενο μήκος είναι

$$\int_a^t \|\dot{X}(t)\| dt = \int_a^t \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} (e^t - e^a).$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{e^x (e^x + e^y) - e^{2x}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{e^x}{(e^x + e^y)^2} e^y = -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^y (e^x + e^y) - e^{2y}}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = \frac{e^{2(x+y)}}{(e^x + e^y)^4} - \frac{e^{2(x+y)}}{(e^x + e^y)^4} = 0.$$

ΘΕΜΑ 3°

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial x = 0 \\ \partial f / \partial y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3x^2 + 2y + 4 = 0 \\ 2y + 2x - 3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + [(1/2)(3-2x)]^2 - 2x = 0 \\ y = (1/2)(3-2x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{συνεπώς } x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{11}{6} \text{ και } x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{απ' όπου βρίσκουμε ότι τα κρίσιμα σημεία είναι: } P_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}\right), P_2\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Υπολογίζουμε τις } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

$$\text{Οπότε } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \Delta_2 = 12x - 4.$$

$$\text{Στο } P_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{6}\right) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_1)}{\partial x^2} = -2 < 0, \quad \Delta_2 = -8 < 0 \text{ άρα δεν έχουμε τοπικό ακροτ.}$$

$$\text{Στο } P_2\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ είναι } \Delta_1 = \frac{\partial^2 f(P_2)}{\partial x^2} = 6 > 0 \quad \Delta_2 = 8 > 0 \text{ άρα έχουμε τ.ε. και } f_{\min} = f(P_2) = \frac{7}{4}$$

ΘΕΜΑ 4°

Είναι

$$\int_{x=-1}^1 \left\{ \int_{y=0}^0 (4-x^2-y^2) dy \right\} dx = \int_{x=-1}^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 dx = \int_{x=-1}^1 \left(4 - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$\int_{x=-1}^1 \left(\frac{11}{3} - x^2 \right) dx = \left[\frac{11}{3}x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^1 = \frac{20}{3}.$$

ΘΕΜΑ 5°

Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$\begin{aligned} (D_X D_Y + 3D_Y^2)(D_X - 4D_Y - 1) &= 0 \Rightarrow \\ D_Y (D_X + 3D_Y)(D_X - 4D_Y - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Στον παράγοντα D_Y αντιστοιχεί η λύση $\varphi_1(-x)$.

Στον παράγοντα $D_X + 3D_Y$ αντιστοιχεί η λύση $\varphi_2(y - 3x)$.

Στον παράγοντα $(D_X - 4D_Y - 1)$ αντιστοιχεί η $e^x \varphi_3(y + 4x)$

Άρα η γενική λύση είναι

$$z = \varphi_1(-x) + \varphi_2(y - 3x) + e^x \varphi_3(y + 4x).$$