

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: A.M.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2024 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

[Οι φοιτητές/-ριες του 1^{ου} έως 7^{ου} έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3, 4, 5.
Οι φοιτητές/-ριες του 8^{ου}, 9^{ου}, ..., έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3 και 4.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.]

ΘΕΜΑ 1^ο

Θεωρούμε τις καμπύλες με διανυσματικές (παραμετρικές) εξισώσεις:

$$\alpha) c_1(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c_1(t) = (t^2 - 1, 1+t, t^3).$$

$$\beta) c_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c_2(t) = (t^3, t^2, t^3 - 2t^2).$$

Να εκφραστούν υπό μορφή καρτεσιανών συντεταγμένων (ως τομή επιφανειών).

ΘΕΜΑ 2^ο

Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς α ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = \alpha xy^2 \vec{i} + 3x^2 y \vec{j}$$

να είναι αστρόβιλο.

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (3x^2 y, 5xy^2)$.

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ με εξίσωση $y = x^3$, όπου $A(0,0)$ και $B(1,1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ye^x$.

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα της f στην περιοχή D που σχηματίζεται από τις $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = y^2$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2z \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + z \right) = 0.$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\|, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}, \quad f = f(x, y, z), \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Sylvester)

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

$$E = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx, \quad E = \iint_D dx dy, \quad V = \iiint_D dx dy dz$$

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$m = \iint_D \sigma(x, y) dx dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma(x, y) dx dy}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma(x, y) dx dy}{m}$$

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$E = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{ροή διανυσματικού πεδίου } \vec{F})$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{u}) dx dy dz \quad (\text{όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα } \vec{u})$$

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0.$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x \varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1} x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i \{ \varphi_2[y + (a + i\beta)x] - \varphi_2[y + (a - i\beta)x] \}.$$

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \dots (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0.$$

$$z = e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } a_i \neq 0, \quad \text{ ή } \quad z = e^{\frac{-\gamma_i}{\beta_i} y} \varphi(a_i y - \beta_i x), \text{ αν } \beta_i \neq 0.$$

$$e^{\frac{\gamma_1}{a_1} x} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x \varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1} \varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right] \quad \left| \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y} \quad \right| \quad \left| \quad u = \int f(x, a - \omega x) dx \right|$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} x = t^2 - 1 \\ y = 1 + t \\ z = t^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 1 = t^2 \\ y - 1 = t \\ z = t^3 \end{array}$$

Από την 1^η και 2^η εξίσωση προκύπτει

$$x + 1 = (y - 1)^2 \quad (1)$$

Από τη 2^η και 3^η εξίσωση προκύπτει

$$z = (y - 1)^3 \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν τη ζητούμενη έκφραση.

(β) Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = t^3 - 2t^2 \end{array} \right\}$$

Από την 1^η και 2^η εξίσωση προκύπτει

$$x^2 = y^3 \quad (3)$$

Από την 1^η, 2^η και 3^η εξίσωση προκύπτει

$$z = x - 2y \quad (4)$$

Οι (3) και (4) αποτελούν τη ζητούμενη έκφραση.

ΘΕΜΑ 2^ο

Η στροφή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ είναι

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(0 - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y) \right) \vec{i} - \left(0 - \frac{\partial}{\partial z}(axy^2) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(axy^2) \right) \vec{k} \\ &= (6xy - 2axy) \vec{k} = (6 - 2a)xy \vec{k}. \end{aligned}$$

Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο όταν

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow (6 - 2a)xy \vec{k} = 0, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$a = 3.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης (τάξου AB) είναι:

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^3, \quad t \in [0, 1].$$

Άρα

$$\int_{\widehat{AB}} F = \int_{\widehat{AB}} F(c(t)) \cdot \dot{c}(t) dt = \int_0^1 (3t^2 t^3, 5t t^6) \cdot (1, 3t^2) dt = \int_0^1 (3t^5 + 15t^9) dt = \left[3 \frac{t^6}{6} + 15 \frac{t^{10}}{10} \right]_0^1 = 2$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Είναι

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \left\{ \int_{x=0}^{y^2} y e^x dx \right\} dy &= \int_{y=0}^1 \left[y e^x \right]_{x=0}^{y^2} dy = \int_{y=0}^1 (y e^{y^2} - y) dy = \frac{1}{2} \int_{y=0}^1 y e^{y^2} (y^2)' dy - \int_{y=0}^1 y dy = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_{y=0}^1 - \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{2} (e - 1) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 5^ο

Η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_X - 2D_Y + 2)(D_X + D_Y + 1)z = 0$$

Στον αναλύσιμο παράγοντα $D_X - 2D_Y + 2$ αντιστοιχεί η λύση $e^{-2x} \varphi_1(y + 2x)$.

Στον αναλύσιμο παράγοντα $D_X + D_Y + 1$ αντιστοιχεί η λύση $e^{-x} \varphi_2(y - x)$.

Άρα η γενική λύση είναι

$$z = e^{-2x} \varphi_1(y + 2x) + e^{-x} \varphi_2(y - x).$$