

ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Καθηγητής Χρήστος Σχοινιάς
ΟΝΟΜ/ΜΟ ΦΟΙΤ.: A.M.:

Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2026 στο μάθημα:
“ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ”

[Οι φοιτητές/-ριες του 1^{ου} έως 9^{ου} έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3, 4, 5.
Οι φοιτητές/-ριες του 10^{ου}, 11^{ου}, ..., έτους θα απαντήσουν στα Θέματα 1, 2, 3 και 4.
Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.]

ΘΕΜΑ 1^ο

Έστω η επιφάνεια η οποία περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = x^2 + y^2$$

Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της παραπάνω επιφάνειας στο σημείο επαφής $P(1,2,5)$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Να υπολογιστούν οι σταθερές κ , λ και μ έτσι ώστε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y + \kappa z)\vec{i} + (\lambda x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \mu y + 2z)\vec{k}$$

να επαληθεύει τη σχέση

$$\text{rot}\vec{F} = 0.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = -x^3 + x^2 - xy^2 - y^2.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Θεωρούμε το αμελητέου πάχους χωρίο D , το οποίο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$, την ευθεία $y = 1$ και τον άξονα $x = 0$.

Αν στο χωρίο D έχει κατανεμηθεί μάζα πυκνότητας $\sigma(x, y) = 20x$, να υπολογιστούν:

(α) η μάζα του D και (β) το κέντρο μάζας του D .

ΘΕΜΑ 5^ο

Να λυθεί η μη ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x + y).$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$K(t) = \frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \left\| \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\dot{X}(t)\|} \dot{X}(t) \right) \right\|, \quad R(t) = \frac{1}{K(t)}, \quad f = f(x, y, z), \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$S = \int_a^b \|\dot{X}(t)\| dt, \quad \vec{F}(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα (Κριτήριο του Sylvester)

- (i) Αν $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο P .
- (ii) Αν $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο P .
- (iii) Αν δεν ισχύουν οι περιπτώσεις (i) και (ii) και $\Delta_k \neq 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο P .
- (iv) Αν $\Delta_k = 0$, για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για τοπικό ακρότατο στο P .

$$E = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx, \quad E = \iint_D dx dy, \quad V = \iiint_D dx dy dz$$

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)), \quad \int_c P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$m = \iint_D \sigma(x, y) dx dy, \quad \bar{x} = \frac{\iint_D x \sigma(x, y) dx dy}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y \sigma(x, y) dx dy}{m}$$

$$m = \iiint_D \sigma(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{x} = \frac{\iiint_D x \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_D y \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_D z \sigma(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$E = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2} dx dy$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{F}) dx dy dz \quad (\text{ροή διανυσματικού πεδίου } \vec{F})$$

$$I = \iiint_D (\text{div } \vec{u}) dx dy dz \quad (\text{όγκος υγρού που κινείται με ταχύτητα } \vec{u})$$

$$F(D_x, D_y)z = (D_x - \omega_1 D_y)(D_x - \omega_2 D_y) \dots (D_x - \omega_n D_y)z = 0.$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + \varphi_2(y + \omega_2 x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$z = \varphi_1(y + \omega_1 x) + x\varphi_2(y + \omega_1 x) + \dots + x^{k-1}\varphi_k(y + \omega_1 x) + \varphi_{k+1}(y + \omega_{k+1}x) + \dots + \varphi_n(y + \omega_n x).$$

$$\varphi_1[y + (a + i\beta)x] + \varphi_1[y + (a - i\beta)x] + i\{\varphi_2[y + (a + i\beta)x] - \varphi_2[y + (a - i\beta)x]\}.$$

$$F(D_x, D_y)z = (a_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1) \cdot (a_2 D_x + \beta_2 D_y + \gamma_2) \dots (a_n D_x + \beta_n D_y + \gamma_n)z = 0.$$

$$z = e^{\frac{\gamma_1 x}{a_1}} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } a_1 \neq 0, \quad \text{ ή } \quad z = e^{\frac{-\gamma_1 y}{\beta_1}} \varphi(a_1 y - \beta_1 x), \text{ αν } \beta_1 \neq 0.$$

$$e^{\frac{\gamma_1 x}{a_1}} \left[\varphi_1(a_1 y - \beta_1 x) + x\varphi_2(a_1 y - \beta_1 x) + \dots + x^{k-1}\varphi_k(a_1 y - \beta_1 x) \right] \quad \left| \quad z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{a_i x + \beta_i y} \quad \right| \quad \left| \quad u = \int f(x, a - \omega x) dx \right|$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1^ο

Θέτουμε

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

και βρίσκουμε

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \Rightarrow$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, -1) \Rightarrow$$

$$\nabla g(1, 2, 5) = (2, 4, -1).$$

Άρα

$$(\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow$$

$$(x, y, z) \cdot (2, 4, -1) = (1, 2, 5) \cdot (2, 4, -1) \Rightarrow$$

$$2x + 4y - z = 5.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+\kappa z & \lambda x-3y-z & 4x+\mu y+2z \end{vmatrix} = (\mu+1)\vec{i} + (\kappa-4)\vec{j} + (\lambda-2)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa = 4 \\ \lambda = 2 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x(2-3x) - y^2 = 0 \\ 2y(1+x) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα τα κρίσιμα σημεία είναι: } P_1(0,0) \text{ και } P_2\left(\frac{2}{3}, 0\right).$$

Υπολογίζουμε τις $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(1+x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y$.

Για το $P_1(0,0)$ έχουμε $\Delta = \left\{ (2-6x)[-2(1+x)] - (-2y)^2 \right\} \Big|_{P_1} = -4 < 0$.

Επομένως η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο P_1 .

Για το $P_2\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ έχουμε $\Delta_2 = \left\{ (2-6x)[-2(1+x)] - (-2y)^2 \right\} \Big|_{P_2} = (-2) \left[\frac{-10}{3} \right] = \frac{20}{3} > 0$ και

$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_2} = -2 < 0$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο P_2 και $f_{\max} = f(P_2) = \frac{4}{27}$.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad m &= \iint_D \sigma(x, y) dx dy = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^1 20x dy \right) dx = 20 \int_{x=0}^1 x [y]_{y=x^2}^1 dx = \int_{x=0}^1 x(1-x^2) dx = \\
 &= 20 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 = 20 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right] = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5.
 \end{aligned}$$

Άρα η μάζα θα είναι ίση με 15.

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \sigma(x, y) dx dy = \frac{1}{5} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^1 x \cdot 20x dy \right) dx = 4 \int_{x=0}^1 x^2 [y]_{y=x^2}^1 dx = 4 \int_{x=0}^1 x^2(1-x^2) dx \\
 &= 4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{x=0}^1 = 4 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15} \\
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \sigma(x, y) dx dy = \frac{1}{5} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x^2}^1 y \cdot 20x dy \right) dx = 4 \int_{x=0}^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^1 dx = 2 \int_{x=0}^1 x(1-x^4) dx = \\
 &= 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^1 = 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right] = 2 \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

Άρα το κέντρο μάζας θα είναι το σημείο $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{3} \right)$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Η ΔΕΜΠ

$$(D_x - 2D_y)z = \cos(x + y)$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\omega - 2 = 0$ η οποία έχει ρίζα την $\omega = 2$.

Θα αναζητήσουμε μία μερική λύση της μη ομογενούς ΔΕΜΠ λύνοντας την εξίσωση

$$(D_x - 2D_y)z = \cos(x + y)$$

η οποία έχει λύση

$$\begin{aligned}
 z &= \int \cos(x + \underbrace{a - 2x}_y) dx = \frac{1}{1-2} \sin[a + (1-2)x] \\
 &= -\sin(a - x) = -\sin(y + 2x - x) = -\sin(x + y)
 \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη γενική λύση είναι

$$z = \underbrace{\varphi(y + 2x)}_{\text{ομογενής}} - \underbrace{\sin(x + y)}_{\text{μη ομογενής}}.$$

Λύση ομογενούς Λύση μη ομογενούς